BestMasters

Jonas Pohl

Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen

Eine Einführung für Lehramtsstudierende

Springer Spektrum

BestMasters

Mit „BestMasters“ zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften.

Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Jonas Pohl

Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen

Eine Einführung für Lehramtsstudierende

Springer Spektrum

Jonas Pohl
Bochum, Deutschland

Masterarbeit, Johannes Gutenberg Universität Mainz, 2016

OnlinePlus Material zu diesem Buch finden Sie auf
http://www.springer.com/978-3-658-17125-4

BestMasters
ISBN 978-3-658-17124-7 ISBN 978-3-658-17125-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-17125-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich all jenen danken, die mich im Rahmen dieser Masterarbeit begleitet haben.
Ganz besonders möchte ich Herrn Prof. Scherer danken, der meine Arbeit durch seine fachliche und persönliche Unterstützung begleitet hat. Dies beginnt mit der Einführung in die theoretische Physik durch seine Vorlesungen, die mein Interesse und meine Freude an der theoretischen Physik entwickelt haben und schließt bei den produktiven Besprechungen mit kompetenter Beratung in der Erarbeitungsphase dieser Arbeit.
In diesem Zusammenhang möchte ich auch Mark Popenco danken. Der permanente gegenseitige Austausch während der langen Bearbeitungszeit förderte ein tieferes Verständnis der Theorie.
Danken möchte ich außerdem meinen Kommilitonen Marc, Julian und Daniel durch deren Anregungen meine Arbeit kontinuierlich verbessert wurde und außerdem die Studiumzeit zu einer unvergessenen Zeit werden ließ.

Bochum im November 2016

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Die Sensation ist perfekt als David Reitze, der Leiter des Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO), im Februar 2016 verkündet: “We have detected gravitational waves. We did it.” Mit dieser Entdeckung ist ein weiterer Nachweis von Einsteins Gravitationstheorie erbracht. Einstein hat die Theorie der Gravitationswellen entwickelt, aber selbst nie geglaubt, dass es je möglich sein könnte diese Wellen zu detektieren. Die Allgemeine Relativitätstheorie (kurz: ART) ist von Albert Einstein vor 101 Jahren im November 1915 vorgestellt worden. Im Education Studiengang kommt ein Physikstudent leider nur wenig in Kontakt mit der berühmten Theorie. Diese Masterarbeit soll eine Einführung in die Gravitationstheorie von Albert Einstein liefern.

Die Gravitation ist eine der vier fundamentalen Wechselwirkungen der Physik. Innerhalb der fundamentalen Wechselwirkungen kommt der Gravitation eine Sonderstellung zu. Sie ist diejenige der vier, die noch nicht mit den anderen drei vereinheitlicht werden konnte. Schon Einstein wollte die zu seinen Lebzeiten nicht vereinheitlichten Theorien in Einklang bringen. Er schreibt 1949 [PAI 09, S. 473]: “Unsere Aufgabe ist es, die Feldgleichungen für das totale Feld zu finden.”

Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik sind die starke, die schwache und die elektromagnetische Wechselwirkung einheit-

J. Pohl, *Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen*,
BestMasters, DOI 10.1007/978-3-658-17125-4_1

lich beschrieben. Das Standardmodell der Elementarteilchen ist eine Quantenfeldtheorie. Für die Allgemeine Relativitätstheorie ist es bisher nicht gelungen eine vollständige Quantentheorie zu formulieren. Ein Problem stellt dabei die Nicht-Linearität der Feldgleichungen dar. Die Feldgleichungen werden im Rahmen dieser Arbeit ausführlich diskutiert. Die Vereinheitlichung der vier fundamentalen Wechselwirkungen stellt eine Hauptaufgabe der aktuellen theoretischen Physik dar [ELL 15, Vorwort]. Die Allgemeine Relativitätstheorie wird auch auf Grund einer anderen Tatsache als einer der "Eckpfeiler" der Physik angesehen [HEL 06, Vorwort]. Die Gravitationstheorie ist im Teilgebiet der Kosmologie von zentraler Bedeutung. So basiert die Beschreibung des expandierenden Universums auf den Einstein'schen Feldgleichungen.

Das 20. Jahrhundert ist in der Physik neben der Allgemeinen Relativitätstheorie von der Quantentheorie geprägt. Die quantisierte Theorie wurde über einen langen Zeitraum von vielen verschiedenen Wissenschaftler formuliert. Die Allgemeine Relativitätstheorie zeichnet sich im Gegensatz dazu auch dadurch aus, dass sie im Wesentlichen durch eine Person allein aufgestellt wurde. Natürlich haben sich auch andere Physiker als Albert Einstein mit der Gravitation auseinandergesetzt.[1] Auch hat Einstein Hilfe bei der mathematischen Beschreibung gehabt. So führt Großmann ihn ab 1912 in die Differentialgeometrie ein.

In einer Nachrichtensendung am 11. Februar 2016, dem Tag an dem der erste Nachweis einer Gravitationswelle verkündet wurde, sagt der

[1] An dieser Stelle sollten Hermann Minkowski und David Hilbert genannt werden [SCHR 11, Kap. 2].

Nachrichtensprecher zum Thema der Allgemeinen Relativitätstheorie und Gravitationswellen: "Das kann man als normaler Mensch nicht verstehen, das kann man höchtens ahnen."

Der Anspruch dieser Masterarbeit ist es nicht, dass jeder, vom Nachrichtensprecher als "normaler Mensch" Bezeichneter, Einsteins Theorie durch Lesen dieser Arbeit versteht. Vielmehr sind als Zielgruppe Lehramtsstudenten und Lehrer, die bereits Kenntnisse in den Methoden der Physik und Mathematik haben, vorgesehen. So wird vorausgesetzt, dass sich der Leser mit der Speziellen Relativitätstheorie bereits beschäftigt hat. Dennoch werden die wichtigsten Erkenntnisse zum Einstieg in das Themengebiet wiederholt. Eine weitere Grundlage ist die Mechanik der theoretischen Physik.[2] Außerdem setzen wir die mathematischen Kenntnisse, die im Rahmen des Physik-Education-Studiums erworben werden, voraus und werden sie nicht explizit erläutern. Allerdings sind an den entsprechenden Stellen Verweise zum Nachlesen der nicht wiederholten Inhalte angegeben.

Der Leser soll einen Einblick in die 100 Jahre der Relativitätstheorie erhalten. Dabei wird der Bogen von der Speziellen Relativitätstheorie im Jahr 1905 bis zum direktem Nachweis von Gravitationswellen 2015 gespannt. Die Geschichte der Gravitationstheorie fängt noch früher an. Die Arbeit beginnt mit einer Betrachtung der Newton'schen Gravitationstheorie, auf der auch die Argumentation Einsteins fußt. Nachdem anschließend die für die Argumentation nötigen Erkenntnisse der Speziellen Relativitätstheorie wiederholt wurden, wird der Übergang zur Allgemeinen Relativitätstheorie geschaffen.

[2] Als Beispiele, die dem Leser bekannt sein sollten, seien der Lagrange-Formalismus oder das klassische Kepler-Problem genannt.

Über erste naive Versuche der Verallgemeinerung der Newton'schen Theorie und das Äquivalenzprinzip gelangt die Diskussion zur gekrümmten Raum-Zeit.

Damit physikalische Gesetze in der gekrümmten Raum-Zeit beschrieben werden und schließlich die berühmten Feldgleichungen aufgestellt werden können, muss zunächst der mathematische Rahmen des Riemann'schen Raumes diskutiert werden. In Hinblick auf die Zielgruppe dieser Arbeit wird auf die Darstellung in differentialgeometrischen Objekten verzichtet.[3] Eine Diskussion der Diffentialgeometrie geht über den Umfang dieser Arbeit hinaus.

Sind die mathematischen Voraussetzungen geschaffen, wird auf die Einstein'schen Feldgleichungen eingegangen. Konkret werden die eingeführten Objekte mit der Schwarzschild-Lösung in einer vorgegebenen Geometrie bestimmt. Mithilfe dieser exakten Lösung der Feldgleichungen folgt dann die Diskussion der Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie. Es werden die drei klassischen Phänomene der Rotverschiebung, der Lichtablenkung und der Periheldrehung des Merkurs thematisiert.

Im letzten Kapitel stehen dann Gravitationswellen im Mittelpunkt der Diskussion. Nachdem die Beschreibung ebener Wellen und deren Effekte auf Materieteilchen dargestellt wurde, schließt die Arbeit mit der Entdeckung der Gravitationswellen im Jahr 2016.

[3] Es wird darauf verzichtet, obwohl diese Darstellungsweise in modernen Diskussionen üblich ist.

Die mathematische Darstellung und Argumentationsweise ist hauptsächlich an den Lehrbüchern von Fließbach [FLI 12a], Ryder [RYD 09] und Schröder [SCHR 11] orientiert. Des Weiteren sind die Standardwerke dieses Themengebietes zu nennen. Dazu zählen die Lehrbücher von Misner, Thorne und Wheeler [MTW 73][4] und Weinberg [WEI 72].

[4] Pais berichtet in [PAI 09, Kap. 15], dass dieses Lehrbuch aufgrund seines Umfangs und der Vielzahl an Seiten auch “Das Telefonbuch” genannt wird.

2 Die Newton'sche Gravitationstheorie

Von welchem Ausgangspunkt wollen wir Einsteins Gravitationstheorie kennenlernen? Wir rekapitulieren zu Beginn die Beschreibung der Gravitation nach Newton. Vektoren im $\mathbb{R}^3$ machen wir durch Fettdruck kenntlich.

Auf eine Masse m, die sich im Abstand $\mathbf{r}$ von einer anderen Masse M befindet, wirkt, nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz, die Kraft

$$\mathbf{F} = -\frac{MmG}{r^3}\,\mathbf{r}. \tag{2.1}$$

Erweitern wir die Betrachtung auf N Massen, die über die Gravitation wechselwirken und verwenden das zweite Newton'sche Gesetz der Mechanik $\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$, so erhalten wir die Bewegungsgleichung:

$$m_i \frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = -G \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{m_i m_j (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^3}, \quad i = 1, \ldots, N. \tag{2.2}$$

Diese Gesetze ((2.1) und (2.2)) bilden eine sehr erfolgreiche Theorie. So lassen sich beispielsweise Planetenbahnen durch diese Theorie beschreiben.[1] Aber auch Phänomene auf anderen Größenordnungen wie die Bahnkurven von waagerechten oder schrägen Würfen lassen sich mit der Newton'schen Theorie hinreichend gut beschreiben.

[1] Eine umfangreiche Darstellung der Kepler'schen Gesetze findet sich in [NOL 13a, Kap. 2.5].

J. Pohl, *Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen*,
BestMasters, DOI 10.1007/978-3-658-17125-4_2

Wollen wir nun die Aussage der Newton'schen Theorie verallgemeinern, ist es ratsam eine weitere Größe einzuführen. Analog zum Elektromagnetismus stellen wir eine Feldstärke auf. Die Gravitationsfeldstärke $\mathbf{g}$ beschreibt ein Gravitationsfeld, so wie die elektrische Feldsträrke $\mathbf{E}$ ein elektrisches Feld beschreibt:

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{F}}{m} \overset{(2.1)}{=} -\frac{GM}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}. \tag{2.3}$$

Im Elektromagnetismus wird die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ durch ein Potential ausgedrückt. Auch in der Gravitationstheorie lässt sich $\mathbf{g}$ durch den Gradienten eines Skalarfeldes ausdrücken. Dazu führen wir das Gravitationspotential $\Phi(\mathbf{r})$ ein:[2]

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi(\mathbf{r}) \;\Rightarrow\; \Phi(\mathbf{r}) := -\frac{GM}{|\mathbf{r}|}. \tag{2.4}$$

Betrachten wir mehrere Massen, die das Feld erzeugen oder eine kontinuierliche Verteilung, so formulieren wir:

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G\sum_j \frac{m_j}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j|} = -G\int d^3r'\,\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{2.5}$$

Nun können wir die Bewegungsgleichung (2.2) für eine Masse m am Ort $\mathbf{r}$ durch das Potential ausdrücken:

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -m\nabla\Phi(\mathbf{r}). \tag{2.6}$$

Wir folgen weiter der Argumentation in der Elektrostatik und stel-

[2] Wir normieren das Gravitationspotential Φ dergestalt, dass es für $r \to \infty$ verschwindet.

len nun Feldgleichungen auf. Feldgleichungen sind Differentialgleichungen der Potentiale [FLI 12a, Kap. 1]. Wir bestimmen dazu:

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\nabla\Phi(\mathbf{r})). \tag{2.7}$$

In der Elektrostatik ist die elektrische Ladung q die Quelle des Feldes. Durch die Analogiebetrachtung muss also nach Gleichung (2.3) die Masse als Proportionalitätsfaktor zwischen Feld und Kraft die Quelle sein. In der Newton'schen Theorie betrachten wir demnach Massenverteilungen, bzw. bei kontinuierlichen Verteilungen die Massendichte $\rho(\mathbf{r})$, als Quelle des Feldes. Wir stellen zwei Feldgleichungen auf. Im ersten Fall betrachten wir ein Vakuum, also ohne die Anwesenheit von Masse.[3] Ist keine Masse vorhanden, tritt auch kein Gravitationsfeld auf. Diese Feldgleichung wird in diesem Fall Laplace-Gleichung genannt:

$$\triangle\Phi(\mathbf{r}) = 0. \tag{2.8}$$

Ist eine Masse vorhanden, müssen wir zur Bestimmung der Poisson-Gleichung, wie die Feldgleichung dann genannt wird, die Definition

[3] Die Laplace-Gleichung gilt, allgemeiner formuliert, in Raumgebieten, in denen sich keine Masse befindet. Betrachten wir beispielsweise nur die Erde als Masse im Universum, so gilt außerhalb der Erde die Laplace-Gleichung. Auch wenn hier offensichtlich kein Vakuum vorliegt.

unseres Potentials (2.5) einsetzen:[4]

$$\begin{aligned}\triangle\Phi(\mathbf{r}) &= \triangle\left(-G\int d^3r'\,\frac{\rho(r')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\\ &= -G\left(\int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\triangle\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\\ &= -G\int d^3r'\rho(\mathbf{r}')\{-4\pi\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\}\\ &= 4\pi G\rho(\mathbf{r}).\end{aligned}\tag{2.9}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer wurde mit einer Berechnung aus [SCHE 10, Kap.5.1.7] aufgelöst. Im Anhang B.2.2 dieser Arbeit kann die Schlussfolgerung nachvollzogen werden.

Im Abschnitt 4.1 werden wir erkennen, dass die nun präsentierte Theorie der Gravitation mit den Feldgleichungen (2.8) und (2.9) nicht mit der Speziellen Relativitätstheorie (kurz: SRT) vereinbar ist. Nach der Formulierung der SRT besteht also die Notwendigkeit einer neuen Theorie der Gravitation. Auf Basis dessen vollziehen wir dann Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie nach. Zunächst rekapitulieren wir allerdings einige wichtige Erkenntnisse der Speziellen Relativitätstheorie.

[4] Die analoge Betrachtung in der Elektrostatik ist im Vorlesungskript [SCHE 10, Kap. 5.1.7] oder im Lehrbuch von Fließbach [FLI 12b, Kap. 6] nachzulesen.

3 Die Spezielle Relativitätstheorie

1905 hat Albert Einstein die Spezielle Relativitätstheorie in der Veröffentlichung “Zur Elektrodynamik bewegter Körper” präsentiert [EIN 05]. Die physikalische Grundlage stammt von H.A. Lorentz. Nach ihm ist die Lorentz-Transformation benannt. Die mathematische Struktur basiert auf den Arbeiten von Poincaré [SCHR 11, Kap. 1].[1] Es ist also festzuhalten, dass die SRT im Gegensatz zur Allgemeinen Relativitätstheorie nicht das Werk von Einstein allein ist, sondern vielmehr von verschiedenen Wissenschaftlern entwickelt wurde.

In dieser Arbeit wird vorausgesetzt, dass sich der Leser bereits mit der Speziellen Relativitätstheorie auseinandergesetzt hat. Die wichtigsten Erkenntnisse können in den Lehrbüchern von Schröder [SCHR 14] und Gönner [GOE 96, Kap. 1-4] nachgelesen werden. Es wird sich in dieser Arbeit auf Transformationen und Tensorrechnung im Minkowski-Raum beschränkt. Dabei sind nur die wichtigsten Erkenntnisse und Argumentationsschritte präsentiert. Zudem sind nicht alle Zwischenschritte und Herleitungen angegeben, da der Leser bereits mit dem Thema vertraut ist. Es wird kein Anspruch auf Vollständigkeit erhoben, da dieses Kapitel hauptsächlich

[1] Zur historischen Entwicklung der SRT sei dem Leser [SCHR 14, Kap. 2] empfohlen.

J. Pohl, *Allgemeine Relativitätstheorie und Gravitationswellen*,
BestMasters, DOI 10.1007/978-3-658-17125-4_3

zur Einführung der auch für die Allgemeine Relativitätstheorie relevanten Begriffe dient. Ebenfalls wird der Leser an einem vertrauten Inhalt in die Notation der Arbeit eingeführt. Aufbauend auf dieser Argumentation soll dann ein verständlicher Weg zur Allgemeinen Relativitätstheorie gefunden werden.

3.1 Die Galilei-Transformation

Stellen wir uns einen fahrenden Zug vor, der sich mit konstanter Geschwindigkeit fortbewegt. In dem Zug springe ein Mann auf und ab. Dieser Vorgang sieht für einen Beobachter, der im Zug sitzt, anders aus als für einen Beobachter, der neben der Strecke außerhalb des Zuges steht.[2]

Aus dieser Überlegung erkennen wir, dass zur Beschreibung eines physikalischen Vorgangs ein Bezugssystem, in dem der Vorgang stattfindet, angegeben werden muss. Die Bewegung der Person ist abhängig vom Beobachter. Bezugssysteme, die relativ zum Fixsternhimmel ruhen oder sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zum Fixsternhimmel bewegen, nennen wir Inertialsysteme (kurz: IS).[3]

Diese Bezeichnung war schon vor dem Beginn des 20. Jahrhunderts bekannt. Ausgangspunkt ist das Relativitätsprinzip von Galileo Galilei:[4]

---

[2] Das Relativitätsprinzip wurde von Galilei aufgestellt. In [BK 09, Kap. 1.1.1] ist seine berühmte Argumentation von Bewegungen auf einem Schiff aus dem Werk [GAL 91, S. 197-198] erläutert.

[3] Die Argumentation anhand des Fixsternhimmels ist historisch begründet. Genau genommen sind auch die Fixsterne über einen großen Zeitraum betrachtet nicht fest. Der Begriff Inertialsystem stammt von Ludwig Lange. Er wurde im Werk [LAN 85, S. 273] 1885 eingeführt.

[4] Dies ist eine moderne Formulierung. Die Begriffsbildung erfolgt wie zuvor beschrieben erst im 19. und 20. Jahrhundert.

Alle Inertialsysteme sind gleichwertig bezüglich der Formulierung der Gesetze der Mechanik [KW 00].

Damit ist gemeint, dass unabhängig vom Beobachter die physikalischen Gesetze dieselbe Form haben. Beispielsweise haben die Newton'schen Gesetze in allen IS dieselbe Form. Wir werden diese Aussage gleich verifizieren (siehe (3.6)). Der Fachterminus lautet an dieser Stelle Kovarianz unter Transformation von IS nach IS'. Aus dieser Aussage folgt unmittelbar, dass es keinen absoluten Raum gibt. Wir können Vorgänge nur in relativ zueinander definierten IS angeben. Aber keines der IS ist bevorzugt [FLI 14, Kap. 34]. Wir beginnen die Beschreibung mit der Diskussion von Transformationen.

Transformation

Eine Transformation ist eine Abbildung, die zwischen zwei Koordinatensystemen definiert ist. Jede Koordinate des einen Koordinatensystems ist eine Funktion der Koordinaten des anderen Koordinatensystems. Sicherlich ist der Leser mit der Aussage vertraut, dass Punkte im $\mathbb{R}^3$ sowohl durch kartesische als auch durch Kugelkoordinaten beschrieben werden können. Die Kugelkoordinaten (r, Θ, Φ) können als Funktionen der kartesischen Koordinaten aufgestellt werden, $(r(x, y, z), \Theta(x, y, z), \Phi(x, y, z))$.

Ebenso können wir die umgekehrte Transformation $(x(r, \Theta, \Phi), y(r, \Theta, \Phi), z(r, \Theta, \Phi))$ angeben.[5]

Zu einer kovarianten Form eines Gesetzes gehören neben der Angabe der Inertialsysteme IS und IS' immer auch die entsprechenden

[5] Damit eine Funktion als Koordinatentransformation infrage kommt, muss sie bestimmte Eigenschaften erfüllen. Diese sind beispielsweise in [SCHE 15, Kap. 1.1] angegeben.

Funktionen, die angeben wie das eine IS in das andere IS' übertragen wird. Doch welche Transformationen sind diejenigen, unter denen kovariante Gesetze formulierbar sind?

Hierzu treffen wir Annahmen über die Struktur von Raum und Zeit. Wir gehen von der Isotropie des Raumes aus. Das bedeutet, dass alle räumlichen Richtungen äquivalent sind. Es soll auch keine Rolle spielen, an welcher Stelle im Raum und zu welchem Zeitpunkt ein physikalisches Gesetz betrachtet wird. Dies wird als Homogenität des Raumes bzw. der Zeit bezeichnet. Wechseln wir also von einem Inertialsystem in ein anderes, soll sich die Form der physikalischen Gesetze, nach dem Relativitätsprinzip, nicht ändern. Die entsprechenden Transformationen tragen deshalb heute Galileis Namen.[6] Die entscheidende Folgerung aus Homogenität und Isotropie des Raumes ist, dass der Abstand an jedem Ort gleich gemessen werden kann. Die Transformation muss demnach abstandserhaltend sein. Da wir auch von der Homogenität der Zeit ausgehen, gilt diese Abstandsgleicheit auch für Zeitabstände.

Wegelement

Der Abstand in einem Vektorraum ist über das Skalarprodukt definiert. Betrachten wir zwei Punkte P und Q, so lässt sich der Abstand zwischen den Punkten mit

$$|P - Q| = \sqrt{(P_x - Q_x)^2 + (P_y - Q_y)^2 + (P_z - Q_z)^2} \tag{3.1}$$

[6] Die Bezeichnung Galilei-Transformation wurde von P. Frank 1909 eingeführt [PAI 09, Kap. 7].

bestimmen. Sind die Punkte nur infinitesimal voneinander entfernt, so ergibt sich der Abstand aus den Quadraten der infinitesimalen Differentiale:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{3.2}$$

Wir betrachten der Einfachheit halber das Quadrat von dl. Diese Größe nennen wir das Wegelement des Raumes,

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{3.3}$$

Welche Transformationen gibt es nun, die den Abstand zwischen zwei Punkten im Koordinatensystem nicht ändern und somit zu den Galilei-Transformationen zählen?

Als erstes leuchtet uns ein, dass eine Translation im Raum durch einen Vektor $\mathbf{a}$ den Abstand nicht ändert, wenn der Raum an jeder Stelle gleich ist. Auch eine Verschiebung in der Zeit durch ein Zeitintervall $\Delta\tau$ hat keinen Einfluss auf den Abstand zweier Punkte. Eine Drehung um einen Winkel ϕ ändert den Abstand ebenso wenig wie eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit v zwischen den beiden Inertialsystemen.

Die allgemeinen Galilei-Transformationen fassen alle genannten Möglichkeiten zusammen:[7]

$$x'^i = \alpha^i{}_k \; x^k + a^i + v^i t; \quad t = t + \tau. \tag{3.4}$$

Hierbei stehen die x^i für die kartesischen Komponenten des Vektors ($x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$), der den Ort angibt.[8] Wir unterdrücken

[7] Die Galilei-Transformationen sind Elemente der Galilei-Gruppe. Gruppentheoretische Aspekte sind u.a. in [SCHE 15, Kap. 1.1] zu finden.

[8] Lateinische Indizes nehmen in dieser Arbeit die Werte 1,2,3 an.

wie gewohnt nach Einstein'scher Summenkonvention das Summenzeichen.[9] Analog dazu geben v^i und a^i ebenfalls Komponenten der entsprechenden Vektoren an.

Die Forderung, dass der Abstand erhalten bleibt, schränkt die Matrizen α, die die Drehung beschreiben, ein. Es müssen orthogonale Matrizen sein, denn diese erfüllen nach Definition:

$$\alpha^T \alpha = \mathbb{1}.$$

Aus dieser Eigenschaft folgt, dass das Wegelement $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ unter jeder Galilei-Transformation kovariant ist.

Es ist aufwendig die folgenden Gedankengänge mit den allgemeinen Galilei-Transformationen auszuführen. Wir werden uns auf Relativbewegungen in der x-Richtung beschränken. Um unsere Argumentation zu stützen, reicht diese Betrachtung der speziellen Galilei-Transformation vollkommen aus. Es sei jedoch angemerkt, dass es sich um einen Spezialfall handelt, der sich jedoch auf eine allgemeine Betrachtung übertragen lässt.

Die spezielle Galilei-Transformation umfasst die Betrachtung eines IS', das sich in Bezug zu einem als ruhend definiertem IS in einer Koordinatenrichtung mit der konstanten Geschwindigkeit v bewegt [FLI 12a, Kap. 3]:

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'. \tag{3.5}$$

[9] Einstein führte diese Konvention bei der Beschreibung der ART ein [PAI 09, Kap. 12e]. In [EIN 16] schreibt er: "Es ist deshalb möglich, ohne die Klarheit zu beeinträchtigen, die Summenzeichen wegzulassen.[...] Tritt ein Index in einem Term zweimal auf, so ist über ihn stets zu summieren, wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist."

Es lässt sich nun nachweisen, dass sich die Form der Kraft aus der Newton'schen Gravitationstheorie (2.1) unter (3.5) nicht ändert. Dazu setzen wir die Transformation in das Gesetz (2.1) ein:

$$F' = m\frac{d^2x'}{dt'^2} = m\frac{d}{dt'}\left(\frac{dx}{dt} - v\right) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}. \tag{3.6}$$

Die rechte Seite von (2.1) ist ebenfalls invariant, da der Vektor $\mathbf{r}$ den Relativabstand zwischen den Massen angibt. Dieser ändert sich durch die spezielle Galilei-Transformation nicht. Das Gesetz ist also kovariant unter speziellen Galilei-Transformationen.[10]

Schwierigkeiten mit den Maxwell-Gleichungen

Im 19. Jahrhundert wurde die Theorie der Elektrostatik und Elektrodynamik entwickelt. Maxwell konnte dieses Gebiet durch die nach ihm benannten Maxwell-Gleichungen beschreiben.[11] Diese Gleichungen sind nicht kovariant unter Galilei-Transformation. Dies zeigt sich schon beim Additionsgesetz von Geschwindigkeiten.

Gehen wir zu der Beschreibung vom Anfang des Kapitels zurück. Der Mann im Zug laufe nun von einem Ende des Waggons zum anderen. Im mitbewegten System sei seine Geschwindigkeit u. Nun bestimmen wir die Geschwindigkeit, die der an der Strecke stehende Beobachter misst.

Dazu müssen wir wieder die Transformation anwenden:

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x + vt) = \frac{dx}{dt} + v = u + v. \tag{3.7}$$

[10] Die allgemeine Argumentation findet sich in [SCH 13a, Kap. 4.7].
[11] Zur Diskussion der Maxwell-Gleichungen siehe [JAC 06, Kap. 6].