

BestMasters

Alexandra Stillert

Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher

Eine Einführung
für Lehramtsstudierende



Springer Spektrum

BestMasters

Mit „**BestMasters**“ zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften. Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Springer awards “**BestMasters**” to the best master’s theses which have been completed at renowned Universities in Germany, Austria, and Switzerland. The studies received highest marks and were recommended for publication by supervisors. They address current issues from various fields of research in natural sciences, psychology, technology, and economics. The series addresses practitioners as well as scientists and, in particular, offers guidance for early stage researchers.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/13198>

Alexandra Stillert

Allgemeine Relativitätstheorie und Schwarze Löcher

Eine Einführung
für Lehramtsstudierende

 Springer Spektrum

Alexandra Stillert
Fachbereich 08 – Institut für Kernphysik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Mainz, Deutschland

ISSN 2625-3577

ISSN 2625-3615 (electronic)

BestMasters

ISBN 978-3-658-25099-7

ISBN 978-3-658-25100-0 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-25100-0>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

An dieser Stelle gilt mein Dank meiner Familie, insbesondere meinen Eltern und meiner Oma, die mir mein Studium ermöglicht und mich in allen Entscheidungen unterstützt haben. Insbesondere möchte ich meinem Opa an dieser Stelle danken, der meinen weiteren Werdegang leider nicht mehr miterleben kann, jedoch stets interessiert an meinem Studium war.

Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei meinem ehemaligen Kommilitonen Andreas Bünning. Er hat mich während der ganzen Arbeit stets unterstützt hinsichtlich des Korrekturlesens und konnte mir bei Problemen mit Latex zur Seite stehen. Außerdem ermutigte er mich immer wieder, weiter zu machen, selbst wenn ich an manchen Stellen nicht weiter wusste.

Schließlich danke ich meinen Freunden Sabrina Geimer und Johannes Lhotzky, die für mich meine Studienzeit einmalig gemacht haben. Sei es durch die Praktika, die wir zusammen durchgeführt und betreut haben, oder die gemeinsamen Treffen außerhalb der Universität. Durch den ständigen Austausch ist eine Freundschaft entstanden, die auch nach dem Studium noch anhält.

Zum Schluss möchte ich den größten Dank aussprechen an Prof. Dr. Stefan Scherer, der mir nicht nur das Thema nahegelegt, sondern auch eine exzellente Betreuung geboten hat. Die regelmäßigen Treffen trugen dazu bei, dass ich kontinuierlich an der Arbeit geschrieben habe. Die intensiven Gespräche während der Betreuung sorgten dafür, dass einige Probleme behoben werden konnten sowie andere Schwierigkeiten entdeckt wurden. Besonders bedanken möchte ich mich auch hinsichtlich der Zeit, die sich Prof. Dr. Scherer für mich genommen hat, zumal die Treffen doch gerne mal länger dauerten als geplant. Auch Prof. Dr. Martin Reuter sei gedankt für die Zweitkorrektur sowie die Literaturempfehlung.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Der Grundstein zur Allgemeinen Relativitätstheorie	5
2.1	Newtons Gravitationstheorie	5
2.2	Spezielle Relativitätstheorie	8
2.2.1	Lorentz-Transformation	10
3	Das Sprungbrett zur Allgemeinen Relativitätstheorie	15
3.1	Analogie zur Elektrodynamik	15
3.2	Äquivalenzprinzip	17
3.3	Metrik in der Allgemeinen Relativitätstheorie	19
4	Mathematische Grundlagen	21
4.1	Krümmung	21
4.2	Differenzierbare Mannigfaltigkeit	23
4.3	Riemann-Raum	24
4.3.1	Tensoren und Metrik im Riemann-Raum	25
4.3.2	Christoffel-Symbole	27
4.3.3	Geodätengleichung	30
4.3.4	Kovariante Ableitung	32
4.3.5	Paralleltransport	34
4.3.6	Krümmungstensor	35
5	Allgemeine Relativitätstheorie	41
5.1	Kovarianzprinzip	42
5.2	Einstein'sche Feldgleichungen	43
5.2.1	Der Energie-Impuls-Tensor	44
5.2.2	Einstein'sche Feldgleichungen im Vakuum	47
5.2.3	Einstein'sche Feldgleichungen mit Materie	48
5.3	Struktur und Eigenschaften der Feldgleichungen	54

5.4	Klassische Tests der Einstein-Theorie	55
6	Schwarze Löcher	59
6.1	Entstehung	59
6.2	Starre Schwarze Löcher	61
6.2.1	Schwarzschild-Lösung	61
6.2.2	Der Fall in ein Schwarzes Loch	68
6.2.3	Alternative Koordinaten	75
6.3	Rotierende Schwarze Löcher	85
6.3.1	Kerr-Metrik	85
6.3.2	Ereignishorizont	86
6.3.3	Statische Grenze	88
6.3.4	Bewegungen bei rotierenden Schwarzen Löchern	90
6.3.5	Kerr-Newman-Metrik	99
7	Zusammenfassung	103
A	Herleitung einzelner Formeln	107
A.1	Feldgleichung nach Newton	107
A.2	Wegelement der Minkowski-Metrik für ein rotierendes Bezugssystem	108
A.3	Transformationsverhalten des Christoffel-Symbols	109
A.4	Komponenten des Maxwell'schen Tensorfeldes	109
A.5	Diagonaleinträge des Ricci-Tensors der Schwarzschild-Metrik	111
A.6	Die totalen Differenziale der Kruskal-Szekeres-Koordinaten	112
A.7	Die zweite Darstellung der Kerr-Metrik in den Boyer-Lindquist-Koordinaten	113
	Literaturverzeichnis	115

Abbildungsverzeichnis

2.1	Darstellung ein und desselben Ereignisses in den räumlichen Koordinaten der Inertialsysteme IS und IS'	12
4.1	Bezugssysteme K und K' mit eingezeichneten Stäben und Relativbewegung zueinander.	22
4.2	Paralleltransport im euklidischen und zweidimensionalen Raum.	35
5.1	Entwicklung von den nichtrelativistischen Gesetze zu den relativistischen Gesetzen mit Gravitation über die jeweiligen Transformationen.	43
6.1	Anwendung der Schwarzschild-Metrik in verschiedenen Gebieten um eine kugelsymmetrische Massenverteilung.	66
6.2	Fall eines Astronauten in ein starres Schwarzes Loch.	68
6.3	Zeitlicher Verlauf des Falls eines Astronauten aus dessen Sicht (Eigenzeit) sowie aus der eines außenstehenden Beobachters (scheinbare Zeit).	74
6.4	Zusammenhang von Radius und Zeit in Eddington-Finkelstein-Koordinaten.	76
6.5	Darstellung der radialen Lichtkegel und ihrer Bahnkurven bezüglich eines Schwarzen Lochs in Eddington-Finkelstein-Koordinaten.	79
6.6	Null-Koordinaten u und v mit einfallenden und ausfallenden Lichtstrahlen.	81
6.7	Darstellung der radialen Bewegung in Kruskal-Szekeres-Koordinaten.	84
6.8	Zweidimensionale Abbildung der Ereignishorizonte r_+ , r_- , statischen Grenze r_{st} , Ergosphäre sowie Singularität $r = 0$ eines rotierenden Schwarzen Lochs aus Sicht der Rotationsachse.	89
6.9	Darstellung der Lichtkegel bei einem rotierenden Schwarzen Loch.	94
6.10	Bahn des fallenden Astronauten, der im großen Abstand vom Schwarzen Loch startet und keinen Drehimpuls besitzt.	99



1 Einleitung

„In space, no one can hear you
scream; and in a black hole, no one
can see you disappear.“

Stephen Hawking

Am 14. März 2018 starb der britische Physiker Stephen Hawking,¹ der durch seine populärwissenschaftlichen Bücher die moderne Physik der Öffentlichkeit zugänglich machte. Sein Leben war geprägt von der Untersuchung Schwarzer Löcher und ihrer Eigenschaften. Dass die Schwarzen Löcher ein faszinierendes und gleichzeitig kein einfaches Gebiet in der Astrophysik sind, wird nicht nur durch den zweiten Satz im voranstehenden Zitat von Hawking deutlich, sondern auch durch seine Aussage

„I used to think information was destroyed in black holes. This was my
biggest blunder, or at least my biggest blunder in science.“²

Sinngemäß bringt Hawking hier zum Ausdruck, dass die Theorie zu Schwarzen Löchern noch nicht vollständig erforscht ist und viele Fragen weiterhin noch offen bleiben. Auch er hat zwischenzeitlich Ansichten verwerfen müssen. Dass sich Hawking überhaupt mit der Theorie Schwarzer Löcher beschäftigen konnte, verdankte er Albert Einstein mit seiner Allgemeinen Relativitätstheorie, kurz ART, die erstmals im November 1915 veröffentlicht wurde. Wie weitreichend die Arbeiten zur ART sein würden, konnte sich wohl auch Einstein selbst nicht ausmalen. Die Allgemeine Relativitätstheorie bildet die theoretische Grundlage vieler Forschungsgebiete in der Astrophysik.

Die vorliegende Masterarbeit richtet sich an Lehramtskandidaten und Lehrer, die bereits Kenntnisse in Physik und Mathematik erworben haben. Die Vorlesungen zur Theoretischen Physik für Lehramtler werden vorausgesetzt, sodass sich der Leser zumindest mit der Newton'schen Gravitationstheorie und der Speziellen Relativitätstheorie, kurz SRT, bereits befasst haben sollte. Auch die nötigen mathematischen Hilfsmittel, die im Rahmen

¹Sein Zitat entstammt Hawking (2016) [16], S. 14.

²Siehe Smith (2016) [31], S. 118.

der Newton'schen Gravitationstheorie und der Speziellen Relativitätstheorie erforderlich sind, werden als bekannt vorausgesetzt. Weitergehende mathematische Rechenfertigkeiten, die für ein besseres Verständnis unerlässlich sind, werden an gegebener Stelle in einem eigenen Kapitel behandelt. Auf eine vertiefende mathematische Darstellung wird jedoch verzichtet, da sie den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Zum besseren Verständnis sind Zwischenschritte in einzelnen Rechnungen aufgeführt. Rechnungen, die den Leseffluss zu stark unterbrechen würden, sind entweder kenntlich im Anhang aufgeführt oder es wird auf die entsprechende Literatur verwiesen.

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Einführung in das Thema Schwarze Löcher zu geben. Auch wenn die Newton'sche Gravitationstheorie sowie die Spezielle Relativitätstheorie vorausgesetzt werden, sollen sie zu Beginn der Arbeit noch einmal zusammenfassend dargestellt werden, um den Werdegang zur Allgemeinen Relativitätstheorie darzulegen. Nach der Klärung mathematischer Grundlagen, in denen wir den Riemann-Raum als mathematische Beschreibung von gekrümmten Räumen einführen werden, wird schließlich die Allgemeine Relativitätstheorie behandelt. Wir beginnen mit dem grundlegenden Kovarianzprinzip und stellen dann die Einstein'schen Feldgleichungen für Vakuum und Materie vor. Dargestellt werden schließlich noch die Struktur und Eigenschaften der Feldgleichungen. Wir runden dieses Kapitel mit den klassischen Tests ab, die Einsteins Theorie belegen.

Im zweiten Teil dieser Arbeit befassen wir uns mit der Theorie von Schwarzen Löchern als ein Anwendungsbeispiel der Allgemeinen Relativitätstheorie. Nach der Entstehung über einen Sternkollaps lenken wir den Fokus zunächst auf starre Schwarze Löcher. Nachdem wir die Schwarzschild-Lösung als mathematische Beschreibung des kugelsymmetrischen Schwarzen Lochs und, mit ihrer Hilfe, den Ereignishorizont als eine wichtige Grenze behandelt haben, widmen wir uns der Frage, was bei einem Fall eines Astronauten in ein Schwarzes Loch passiert. Wir unterteilen den Fall in die Sichtweise eines außenstehenden Beobachters, der sich in einem ruhenden Raumschiff befindet, und in die des fallenden Astronauten selbst. Anschließend betrachten wir noch zwei alternative Darstellungen der Schwarzschild-Lösung und grenzen sie von der ursprünglichen Darstellung ab.

Im Anschluss befassen wir uns mit rotierenden Schwarzen Löchern als eine Erweiterung zu den starren Schwarzen Löchern. Als mathematische Beschreibung dient die Kerr-Metrik. Neben dem Ereignishorizont als wichtiges Merkmal erhalten wir die statische Grenze als eine weitere Eigenschaft, die rotierende Schwarze Löcher auszeichnet. Schließlich wird noch ein Einblick gegeben, wie Licht sich radial und tangential in einem rotierenden Schwarzen Loch bewegt. Da sich die Beschreibung von Bewegungen von Teilchen in rotierenden Schwarzen Löchern als mathematisch anspruchsvoll erweist, betrachten

wir nur den Fall eines Astronauten vom Standpunkt eines außenstehenden Beobachters. Dies ist mit den bis dahin behandelten mathematischen Rechenfertigkeiten beschreibbar. Für die generelle Beschreibung von Bewegungen von Testteilchen wird das Konzept der Killing-Vektoren benötigt, was jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Abgerundet wird der zweite Teil von einer Diskussion der Kerr-Newman-Metrik, die die Ladung als drittes Merkmal der allgemeinsten Lösung Schwarzer Löcher beinhaltet.