Wolfgang Tschirk

Der Laplacesche Dämon

Kosmos, Erde, Mensch und Atom in Differentialgleichungen

SACHBUCH

Springer

Der Laplacesche Dämon

Wolfgang Tschirk

Der Laplacesche Dämon

Kosmos, Erde, Mensch und Atom in Differentialgleichungen

Springer

Wolfgang Tschirk
Wien, Österreich

ISBN 978-3-662-61646-8 ISBN 978-3-662-61647-5 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61647-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Die Naturwissenschaft verdankt einen großen Teil ihres Erfolgs der Mathematik. Zum einen liegt das daran, dass man einen Sachverhalt auf vielerlei Weise ausdrücken kann und uns die Mathematik verlässlich von einem Ausdruck zum anderen leitet. Wer sie anwendet, mag in seinen Prämissen irren, vielleicht weil er unzureichend beobachtet. Sind aber einmal die Prämissen sicher, dann auch alles, was aus ihnen folgt. Zum anderen haben die Mathematiker für viele Erscheinungen passende Bilder gefunden. Eine dieser Erscheinungen ist die Veränderung; ihr Bild die Differentialrechnung, und deren höchste Stufe: das sind die Differentialgleichungen.

„Ein Verstand, der für einen gegebenen Augenblick alle die Natur belebenden Kräfte und die gegenseitige Lage der sie zusammensetzenden Wesen kennte und zugleich umfassend genug wäre, diese Daten der Analysis zu unterwerfen, würde die Bewegungen der größten Weltkörper und des kleinsten Atoms durch ein- und dieselbe Formel ausdrücken; für ihn wäre nichts ungewiss; vor seinen Augen lägen Zukunft und Vergangenheit." Wie könnte ein solcher Verstand (den man nach seinem Erfinder den *Laplaceschen Dämon* nennt) zu seiner Formel kommen? Zum Beispiel dadurch, dass er feststellt, nach welchem Gesetz die belebenden Kräfte den Zustand der Natur verändern, dann aus dem Gesetz der Zustands*änderungen* auf ein Gesetz des Zustands selbst schließt und zuletzt der Natur für einen gegebenen Augenblick die gegebenen Werte zuschreibt. In anderen Worten: dass er eine Differentialgleichung findet, sie löst und in die Lösung eine Anfangsbedingung setzt. Darum geht es in diesem Buch. Zwar müssen wir bescheiden sein; wir können nicht die ganze Natur, sondern immer nur einen Aspekt von ihr der Analysis unterwerfen. Doch was uns diese Analysis enthüllen wird, ist überwältigend: die Bewegungen der größten Weltkörper und des kleinsten Atoms und vieles von dem, was dazwischen liegt. Und nicht weniger überwältigend wird der Blick hinter die Kulissen sein: auf die Verstandesleistungen jener, die dem Dämon Stück für Stück sein Geheimnis ablauschen.

Dieses Buch ist kein Lehrbuch der Mathematik. An die Stelle unerbittlicher Strenge ist die Anschaulichkeit gesetzt und der pragmatische Zugang des Naturwissenschaftlers. Dabei vertraue ich auf die mathematische Höflichkeit des Lesers, um mit Edwin Jaynes zu sprechen: „For a courteous reader, the fact that a writer differentiates $f(x)$ twice already implies that he considers it twice differentiable."

Wenn Sie sich dennoch zu unvermittelt in den Formalismus gestoßen fühlen, mögen Ihnen die Grundzüge der Differential- und Integralrechnung im Anhang den Eintritt erleichtern.

Wien
April 2020

Wolfgang Tschirk

Inhaltsverzeichnis

Differentialgleichungen

1

Differentialgleichungen lassen uns staunen: Auf den ersten Blick scheinen sie nur zu beschreiben, was unmittelbar geschehen ist oder geschieht; in ihren Lösungen aber lesen wir Vergangenheit und Zukunft, Nahes und Fernes, sie offenbaren die Gesetze des Größten wie des Kleinsten. Wir beginnen mit einigen Beispielen, klären grundlegende Begriffe und Fakten und unternehmen Ausflüge in die Geschichte.

1.1 Rutherfords Gesetz des radioaktiven Zerfalls

Im Jahr 1896 stieß Henri Becquerel auf eine unbekannte Art von Strahlen, die das Uran aussendet und deren Intensität über Monate nicht nachlässt. Die Strahlen waren unabhängig von der chemischen Verbindung, in der das Uran vorlag; sie mussten daher vom Uran-Atom selbst ausgehen. Becquerel bezeichnete den Effekt als Radioaktivität. Marie Curie, eine Studentin Becquerels, entdeckte kurz darauf die Radioaktivität beim Thorium. Dieses Element wählte Ernest Rutherford zum Objekt seiner Studien. Er beobachtete, wie es „ein Gas" abgab, das er Thorium-Emanation nannte und das seinerseits radioaktiv war. Die Aktivität dieses Stoffs war, anders als jene des Urans, unbeständig; sie nahm jede Minute etwa um die Hälfte ab. Rutherford erklärte dieses seltsame Verhalten mit der Annahme, die Anzahl n radioaktiver Teilchen (*particles;* den Begriff des Atomkerns gab es noch nicht) würde mit der Zeit abnehmen; und zwar musste die Anzahl dn der pro Zeitspanne dt zerfallenden Teilchen proportional zur Anzahl der vorhandenen sein:

$$\frac{dn}{dt} = -\lambda n. \tag{1.1}$$

Damit hatte er eine Beziehung zwischen der Anzahl n und ihrer zeitlichen Änderung dn/dt gefunden: eine *Differentialgleichung.* Diese Gleichung lösen heißt, eine Funktion $n(t)$ finden, für die sie stimmt. Wir verwenden dazu ein Verfahren, das zum

W. Tschirk, *Der Laplacesche Dämon*,
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61647-5_1

ersten Mal 1690 von Jakob Bernoulli beschrieben wurde, das *Trennen der Variablen* (Anhang B.4). Wir schreiben (1.1) als

$$\frac{dn}{n} = -\lambda\, dt;$$

das ist möglich, wenn $n \neq 0$ ist. Jetzt integrieren wir beiderseits, erhalten

$$\ln n = -\lambda t + C$$

und rechnen n aus:

$$n = e^{-\lambda t + C} = e^C\, e^{-\lambda t} = C\, e^{-\lambda t}$$

(den Faktor e^C nennen wir der Einfachheit halber wieder C). Die Bedeutung von C ergibt sich, wenn wir $t = 0$ setzen:

$$n(0) = C\, e^{-\lambda \cdot 0} = C;$$

es handelt sich also um die Zahl der Teilchen zur Zeit 0. Damit sind wir zur Lösung

$$n(t) = n(0)\, e^{-\lambda t} \tag{1.2}$$

gelangt. Rutherford publizierte sie im Jahr 1900 [44]. Wir können uns davon überzeugen, dass (1.2) tatsächlich eine Lösung von (1.1) darstellt. Leiten wir die Funktion nämlich ab, ergibt sich genau die Gleichung:

$$\frac{dn(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[n(0)\, e^{-\lambda t}\right] = n(0)\, e^{-\lambda t} \cdot (-\lambda) = -\lambda n(t).$$

Heute wissen wir, dass es sich bei der Thorium-Emanation um das Radon-Isotop ^{220}Rn handelt. Es hat eine Halbwertszeit von 54,5 Sekunden; in diesem Zeitraum zerfällt jeweils die Hälfte seiner zu Beginn vorhandenen Atome, also ist

$$\frac{n(54{,}5\,\mathrm{s})}{n(0)} = 0{,}5.$$

Daraus und aus (1.2) lässt sich die Zerfallskonstante λ bestimmen:

$$\lambda = -\frac{\ln \frac{n(t)}{n(0)}}{t} = -\frac{\ln \frac{n(54{,}5\,\mathrm{s})}{n(0)}}{54{,}5\,\mathrm{s}} = -\frac{\ln 0{,}5}{54{,}5\,\mathrm{s}} = 0{,}0127\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Schon dieses Beispiel zeigt die Macht der Differentialgleichungen: In (1.1) steht nur, wie sich die Teilchenanzahl im nächsten Augenblick (in der Zeitspanne dt, die wir uns zunächst nur als sehr klein vorstellen) ändern wird; die Lösung (1.2) aber beschreibt deren Entwicklung für alle Zeiten. Dieselbe Lösung, angewandt

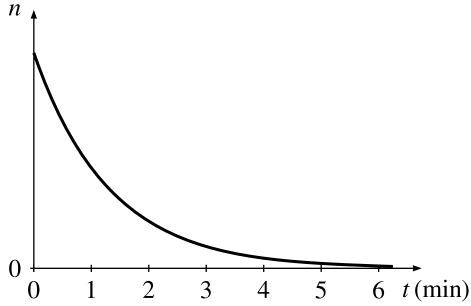

Abb. 1.1 Zerfall des Radon-Isotops ^{220}Rn: Anzahl n der Kerne als Funktion der Zeit t

auf radioaktiven Kohlenstoff, erlaubt die Datierung jahrtausendealter Objekte; und angewandt auf Uran, enthüllt sie das Alter unserer Galaxis!

Rutherfords Entdeckung – aus Thorium wird Radon – hatte für den Physiker noch ein Nachspiel. Mit ihr war der uralte Traum der Alchimisten in Erfüllung gegangen: die Umwandlung eines chemischen Grundstoffs in einen anderen, und Rutherford erhielt dafür den Nobelpreis. Nicht den der Physik, sondern den der Chemie, womit er sich nicht nur Ruhm, sondern auch Spott einhandelte; denn die Kollegen beglückwünschten ihn nun zu seiner „Umwandlung vom Physiker zum Chemiker".

1.2 Differentiale, Grenzwerte, Näherungen

Betrachtet man Rutherfords Gleichung und ihre Lösung kritisch, so fallen drei Punkte auf, die es zu klären gilt.

Erstens, was man unter der Zeitspanne dt zu verstehen hat und dementsprechend unter der Anzahl dn der in dt zerfallenden Teilchen. Hier handelt es sich nicht um messbare Größen, und weder dt noch dn sind, für sich allein genommen, relevant. Bedeutung hat lediglich der Ausdruck dn/dt, und zwar als Grenzwert eines echten Quotienten, der sich aus folgender Überlegung ergibt: Zunächst denke man sich eine messbare Zeitspanne Δt. In dieser verringert sich die Anzahl n der Teilchen um Δn, die zerfallen. Rutherford behauptete, Δn sei proportional zu n : Gibt es doppelt so viele Teilchen, werden auch doppelt so viele zerfallen. Außerdem ist Δn proportional zu Δt : In der doppelten Zeit zerfallen doppelt so viele. Insgesamt ist also

$$\Delta n = -\lambda n \Delta t$$

mit der Proportionalitätskonstanten λ; oder, durch Δt dividiert:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = -\lambda n.$$

Da sich gemäß dieser Beziehung innerhalb jeder Zeitspanne die Anzahl der vorhandenen Teilchen ändert, gibt es nicht *ein einziges, genaues* n für das gesamte

Intervall Δt; und dann ist unklar, was das n auf der rechten Seite der Gleichung bedeutet. Exakt wird seine Bedeutung erst, wenn man Δt gegen null gehen lässt, denn innerhalb eines „unendlich kleinen“ Zeitintervalls ist n konstant. Auf der linken Seite gelangt man zu einem Grenzwert

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta n}{\Delta t},$$

den man dn/dt nennt, und mit diesem ergibt sich (1.1). Im Gegensatz zu Δn und Δt, bei denen es sich um echte Differenzen handelt, sind dn und dt keine. Man nennt sie *Differentiale* und den Ausdruck dn/dt *Differentialquotient*. Diese Bezeichnungen, die Schreibweise und vor allem die elementaren Rechenregeln für Differentiale hat Leibniz eingeführt und damit, zeitgleich mit Newton, aber im Wesentlichen unabhängig von ihm, die Differentialrechnung erfunden. Was Leibniz als dy/dt schrieb, nämlich die Ableitung einer Größe y nach der Zeit t, hat Newton als $\dot{y}$ notiert. Wir werden für die Ableitungen nach t wahlweise die eine oder die andere Schreibweise verwenden und für die Ableitung nach x wahlweise dy/dx oder y'. Die Ableitung der Ableitung (die zweite Ableitung) heißt dann d^2y/dt^2 oder $\ddot{y}$ bzw. d^2y/dx^2 oder y''.

Zweitens haben wir von der Funktion $n(t)$ vorausgesetzt, dass sie differenzierbar sei, was genau genommen nicht stimmt. Sie ist nicht einmal stetig; denn n ist eine Anzahl (von Teilchen) und kann sich daher nur in ganzzahligen Sprüngen ändern. Unter dem Mikroskop sähe man daher nicht, wie in Abb. 1.1, eine glatte Kurve, sondern Treppenstufen. Dieser Einwand lässt sich gegen viele Funktionen erheben, die in den Erfahrungswissenschaften vorkommen und dort ohne Bedenken, dafür aber mit wertvollen Ergebnissen, differenziert werden. Denn viele Größen sind, wie unser n, in Wirklichkeit diskret, und die Annahme ihrer Stetigkeit ist eine Idealisierung. Man kann sogar davon ausgehen, dass *jede* Größe diskret ist; Erwin Schrödinger, der Schöpfer der Wellenmechanik, merkte nämlich an, dass jedes Experiment von vornherein eine endliche (und daher diskrete) Menge möglicher Ausgänge festlegt: „Wir lokalisieren das Wirkliche innerhalb eines endlichen Diskontinuums von Möglichem“ [47]. Diese Idealisierung funktioniert, weil die diskreten Größen so viele mögliche Werte haben und der Abstand zwischen je zwei benachbarten Werten so klein ist, dass der Eindruck eines Kontinuums entsteht. Beim radioaktiven Zerfall können wir Stetigkeit und Differenzierbarkeit in diesem Sinn voraussetzen, solange n groß ist; und da jede Spur eines Elements ungeheuer viele Atome enthält, ist das in beinahe allen beobachtbaren Fällen erfüllt. Überhaupt werden wir stets voraussetzen, dass unsere Grenzwerte, Ableitungen, Summen oder Integrale existieren, und das nicht mehr eigens erwähnen. Sprechen wir beispielsweise von einer „beliebigen“ Funktion, so meinen wir, dass sie die zu ihrer Verwendung nötigen Eigenschaften hat (genügend oft differenzierbar ist usw.) und *ansonsten* beliebig.

Drittens folgt der radioaktive Zerfall nicht deswegen dem genannten Gesetz, weil jedes Teilchen wüsste, wann es zerfallen muss. Ganz im Gegenteil: Für das einzelne Teilchen existiert, soviel wir wissen, nichts als eine Wahrscheinlichkeit dafür, dass es in der nächsten Zeiteinheit zerfällt. Das Zerfallsgesetz ist ein statistisches, und tatsächlich beschreibt es nicht die zeitliche Entwicklung der Teilchenanzahl selbst, sondern die des Erwartungswerts dieser Anzahl. Sehr große Teilchenanzahlen stimmen aber mit ihrem Erwartungswert so gut überein, dass der Fehler jenseits aller Messgenauigkeit liegt und man in den Formeln den Erwartungswert durch die Anzahl selbst ersetzen kann, wie es in (1.1) und (1.2) ja auch geschehen ist. (Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Ableitung des Zerfallsgesetzes finden Sie in [55].) Auch viele andere, wenn nicht sogar alle Gesetzmäßigkeiten, von denen in diesem Buch die Rede sein wird, sind statistischer Natur, können aber aus analogen Gründen als deterministisch angesehen werden. Von dieser Freiheit werden wir, wie in den Erfahrungswissenschaften üblich, Gebrauch machen.

1.3 Differentialgleichung und Anfangswertaufgabe

In (1.1) und (1.2) erkennen wir die zwei wesentlichen Merkmale von Differentialgleichungen: Sie enthalten Ableitungen, und ihre Lösungen sind nicht Werte, sondern Funktionen. Handelt es sich bei den Lösungen um Funktionen einer einzigen Variablen, nennt man die Gleichung eine *gewöhnliche;* handelt es sich um Funktionen mehrerer Variabler, nennt man sie eine *partielle.* Die Nummer der höchsten in einer Differentialgleichung vorkommenden Ableitung bezeichnet man als deren *Ordnung.* Im Sinn dieser Klassifikation ist (1.1) eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung. Neben den genannten Eigenschaften gibt es unzählige weitere: Man unterscheidet implizite und explizite Gleichungen, lineare und nichtlineare, homogene und inhomogene, skalare und vektorielle, Gleichungen mit konstanten und mit variablen Koeffizienten, man kennt exakte, autonome und unter den partiellen Gleichungen 2. Ordnung elliptische, parabolische und hyperbolische. Da es in diesem Buch nicht um eine umfassende Theorie der Differentialgleichungen geht, werden wir nur solche Eigenschaften ansprechen, die im jeweiligen Kontext, beispielsweise bei der Wahl eines Lösungsverfahrens, von Bedeutung sind.

Die *allgemeine Lösung* einer Differentialgleichung ist die Menge ihrer Lösungsfunktionen. Da (1.2) für jeden denkbaren Wert $n(0)$ eine Lösung von (1.1) ist, gibt es unendlich viele Lösungsfunktionen. (Aus mathematischer Sicht kann $n(0)$ auch nicht-ganzzahlig und sogar negativ sein, im physikalischen Experiment natürlich nicht.) Eine *bestimmte* Lösungsfunktion erhält man, indem man einen *Anfangswert* festlegt. So entsteht eine *Anfangswertaufgabe* (Abb. 1.2). Ein Anfangswert muss nicht unbedingt ein Wert der gesuchten Funktion zum Zeitpunkt 0 sein. Man könnte einen anderen Zeitpunkt t_0 wählen und $n(t_0)$ als Anfangswert bezeichnen. Der Begriff des Anfangswerts ist auch nicht daran gebunden, dass die Lösungsfunktion eine Funktion der Zeit ist; die unabhängige Variable kann jede beliebige Bedeutung haben. Und ein Anfangswert muss nicht ein Funktionswert sein, es kann sich um den Wert einer Ableitung handeln. So sind auch durch $y(2) = 1$ und $y'(\pi) = 0$ Anfangswerte festgelegt.

Mit dem bis hierher Besprochenen sind wir dem Geheimnis des Fabelwesens, das man nach seinem Erfinder Pierre-Simon de Laplace den *Laplaceschen Dämon* nennt, schon auf der Spur. Als Laplace schrieb: „Ein Verstand, der für einen gegebenen Augenblick alle die Natur belebenden Kräfte und die gegenseitige Lage der sie

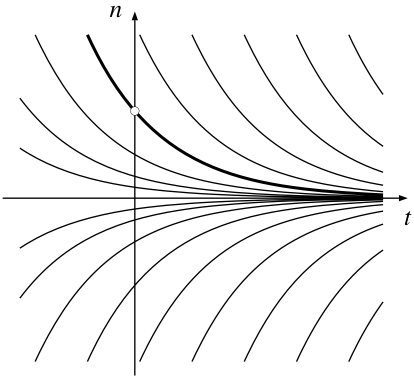

Abb. 1.2 Einige Lösungsfunktionen von (1.1). Ein Anfangswert von n (Punkt) legt eine davon als Lösung der Anfangswertaufgabe fest

zusammensetzenden Wesen kennte und zugleich umfassend genug wäre, diese Daten der Analysis zu unterwerfen, würde die Bewegungen der größten Weltkörper und des kleinsten Atoms durch ein- und dieselbe Formel ausdrücken; für ihn wäre nichts ungewiss; vor seinen Augen lägen Zukunft und Vergangenheit.“ – da waren die Differentialgleichungen längst erfunden und mit ihnen der Drei-Schritte-Plan, den so ein Dämon braucht. Kann er nämlich erstens feststellen, nach welchem Gesetz die belebenden Kräfte den Zustand der Natur verändern (also eine Differentialgleichung formulieren), zweitens aus dem Gesetz der Zustands*änderungen* das Gesetz des Zustands selbst ableiten (also die Gleichung lösen) und drittens der Natur für einen gegebenen Augenblick die gegebenen Werte zuschreiben (also in die Lösung eine Anfangsbedingung setzen), dann entüllen sich ihm die Bewegungen der größten Weltkörper und des kleinsten Atoms und vieles von dem, was dazwischen liegt, einschließlich unserer selbst.

Der Anblick einer Gleichung löst bei Mathematikern einen Reflex aus; nämlich die Frage, ob (und unter welchen Umständen) die Gleichung eine Lösung habe, und wenn ja, ob diese eindeutig sei. Der Naturwissenschaftler misst der Frage in der Regel weniger Bedeutung bei: Beschreibt seine Gleichung die Bewegung eines Objekts im Schwerefeld, dann muss sie eine Lösung haben, weil es eine solche Bewegung *gibt*; und sie kann nur eine einzige Lösung haben, weil ein Objekt sich unter definierten Bedingungen nur auf eine einzige Art bewegt. Betritt er allerdings experimentell unerschlossenes Terrain, dann muss auch er die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen beantworten, sonst geht es ihm wie Paul Dirac. Der fand 1928 eine Gleichung für das Elektron, die *zwei* Lösungen zuließ: eine für das Elektron und eine zweite für ein Teilchen gleicher Masse, aber entgegengesetzter Ladung. Damals vermuteten alle einen Fehler in Diracs Theorie; bis Carl Anderson 1932 das Positron in der kosmischen Strahlung fand. Wir werden in der Frage der Lösbarkeit einen Mittelweg beschreiten: Die grundlegende und exakte Beweisführung überlassen wir den Mathematikern, deren Resultate wir gern übernehmen (Anhang B.3). Dort aber, wo wir konkrete Lösungsmethoden anwenden, zeigen wir, dass sie tatsächlich das Gewünschte leisten.

1.4 Wie die Differentialgleichung zur Welt kam

Als Rutherford sein Gesetz formulierte, waren die Differentialgleichungen fast 300 Jahre alt, ihre systematische Behandlung mehr als 200. Wir können ohne viel Risiko die Urheberschaft Galilei zuschreiben, der um 1600 begann, das Fallen von Körpern zu untersuchen und speziell die Veränderung von deren Geschwindigkeit mit der Zeit. Damals gab es noch keine Differentialrechnung; daher schrieb Galilei seine Gleichungen nicht so, wie wir es heute tun. Dass es aber dem Inhalt nach Differentialgleichungen waren, davon werden wir uns schon im nächsten Abschnitt überzeugen.

Die Gleichungen, wie wir sie kennen, entstanden ein Menschenalter später zusammen mit der Differential- und Integralrechnung, und in gewissem Sinn gaben sie den Anstoß zu dieser. In den 1660er-Jahren begann Isaac Newton, seines Zeichens Naturphilosoph, Abläufe in der Natur mathematisch zu beschreiben. Zeitlich veränderliche Größen nannte er Fluenten, deren Veränderungen Fluxionen. Die Fluenten bezeichnete er mit den letzten Buchstaben des Alphabets, x, y, z, ihre Fluxionen, die wir heute Ableitungen nach der Zeit nennen, mit $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$. Newton besprach zwei Aufgaben: aus der Beziehung zwischen Fluenten die Beziehung zwischen ihren Fluxionen zu ermitteln und umgekehrt [23,51]. Jene seiner Gleichungen, die Fluxionen enthalten, sind Differentialgleichungen im heutigen Sinn, und die zweite newtonsche Aufgabe, aus ihnen die Gleichungen der Fluenten zu finden, entspricht dem Lösen. Newton unterschied drei Typen von Differentialgleichungen: solche mit zwei Fluxionen und einer ihrer Fluenten, mit zwei Fluxionen und beiden Fluenten und mit mehr als zwei Fluxionen. Für jeden Typ gab er Lösungswege an. Diese hatten mit den heutigen wenig zu tun, und auch die Gleichungen selbst sind vergessen. Newtons Version der Differential- und Integralrechnung überlebte ihren Schöpfer nicht. Was wir heute haben, das haben wir von Leibniz.

Eigentlich war Gottfried Wilhelm Leibniz ein Amateurwissenschaftler, ein barockes Universalgenie im schönsten Sinn des Wortes. Studiert hatte er Philosophie, Theologie, Mathematik, Physik und Astronomie, promoviert wurde er zum Doktor der Rechte. Die Nachwelt ehrt ihn als Philosophen, von Beruf gab er Diplomat an. Und gerade dieser Mann legte den Grundstein nicht nur zur modernen Logik, sondern auch zur Differential- und Integralrechnung unserer Tage. Sein *Novus methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus* analysiert nicht die Bewegung, sondern die statische Kurve [23]. Leibniz führte die unendlich kleinen Differenzen, die Differentiale, ein; an die Stelle des Differenzenquotienten $\Delta y/\Delta x$, der im Allgemeinen nur eine Näherung für die Steigung der Tangente ist, trat der Differentialquotient dy/dx, der sie exakt wiedergibt. Das begriffliche Problem der unendlich kleinen Größen löste Leibniz pragmatisch: Er schlug vor, sie einfach hinzunehmen als die kleinsten vorstellbaren Dinge, gerade noch nicht null. Leibniz gab Rechenregeln für Differentiale an und baute sie zum „Calculus differentialis“ aus, den er 1684 veröffentlichte. Nun konnte man zu jeder Funktion, die eine Kurve beschreibt, eine Funktion finden, die die Steigung der Tangente beschreibt: die erste Ableitung. Fasst man die erste Ableitung wieder als Kurve auf, kann man auch ihr eine Steigungsfunktion zuordnen, die zweite Ableitung, usw. Für die zweiten Differentiale schrieb

Leibniz ddx und ddy. Er erkannte, dass die Bestimmung der Fläche darauf reduziert werden kann, eine Kurve zu finden, die ein gegebenes Gesetz für die Tangenten besitzt, dass also die Berechnungen von Steigung und Fläche invers zueinander sind. Über die Flächenberechnung berichtet sein „Calculus summatorius“ von 1686. Wenn die Ableitung einer Funktion wieder eine Funktion sein kann, dann sollte das auch für die Umkehrung der Ableitung gelten, die Leibniz Integral nannte. Zur Fläche zwischen zwei festen Grenzen, dem bestimmten Integral, kam so das unbestimmte hinzu, nämlich die Fläche als Funktion der Kurve und der Grenzen selbst. Über unbestimmte Integrale schrieb Leibniz zum ersten Mal 1694.

Dass unsere Differential- und Integralrechnung auf die leibnizsche zurückgeht und Newtons Fluxionen in ihr nicht mehr vorkommen, liegt zuerst daran, dass Leibniz' Ansatz der allgemeinere, rein mathematische ist, während in Newtons Methode stets die Einschränkung auf die Physik erkennbar bleibt, und dass Leibniz für einen klaren formalen Aufbau sorgte, während Newtons Beispiele Rezepte für den Einzelfall sind. Es ist aber auch eine Folge des Zorns, den Leibniz' Schriften in England hervorriefen, wo doch der Calculus auf der Insel erfunden worden war und nur Newtons notorische Abscheu vor dem Publizieren (sein Beitrag blieb dreißig Jahre lang ungedruckt) die Prioritätsfrage überhaupt hatte aufkommen lassen. Trotzig weigerten sich die Briten, ihr Wissen mit den Gelehrten auf dem Kontinent zu teilen, und Newton schwieg, von Seitenhieben auf den Deutschen abgesehen, erst recht, so dass seine Ideen isoliert blieben. Leibniz nahm die Sache gelassen (schließlich war er Philosoph) und hielt sich mit Kommentaren zurück (schließlich war er Diplomat). Vielleicht fände Newton Trost, vielleicht aber auch Anlass für neuerlichen Ärger darin, dass seine Mechanik, dargelegt in drei Axiomen und dem Gravitationsgesetz, nicht zuletzt durch die Mathematik des Kontrahenten unsterblich wurde.

1.5 Am Anfang war die Bewegung

Wie sich Körper bewegen, beschreibt die *Kinematik*. Manches von ihr, darunter die ältesten – 400 Jahre alten – Differentialgleichungen, verdanken wir Galilei. Die Beschreibung der *Translation,* die wir vorrangig behandeln, verwendet Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung, jeweils als Funktion der Zeit oder als Funktionen voneinander. Bei der Beschreibung der *Rotation* treten an die Stelle dieser Größen Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung, die Zeit bleibt. *Warum* Körper sich bewegen, also die Diskussion von Kräften, Drehmomenten und daraus abgeleiteten Größen, ist nicht Gegenstand der Kinematik, sondern der *Dynamik,* von der erst in Abschn. 1.6 die Rede sein wird.

Wir entwickeln im Folgenden die Gesetze der Translation bei konstanter Beschleunigung. Die maßgeblichen Differentialgleichungen sind so einfach, dass man sie auf den ersten Blick gar nicht als Differentialgleichungen auffasst. Sie bergen einige Überraschungen – von der Erkenntnis, dass die gesamte Kinematik bei konstanter Beschleunigung in nur fünf Schriftzeichen zusammengefasst werden kann, bis hin zur Antwort auf die Frage, was es eigentlich ist, das Galilei entdeckt hat, als er der Legende nach seine Kugeln vom schiefen Turm zu Pisa warf.

(1) Kinematik der Translation

Legt ein Körper in der Zeit dt den Weg dr zurück, dann sagt man, er habe eine Geschwindigkeit

$$v = \frac{dr}{dt}. \tag{1.3}$$

Ändert sich seine Geschwindigkeit in der Zeit dt um dv, dann sagt man, er habe eine Beschleunigung

$$a = \frac{dv}{dt}. \tag{1.4}$$

Das sind zwei wohlbekannte Begriffsbestimmungen, ausgedrückt in besonders einfachen Differentialgleichungen. Diese lassen sich auch leicht lösen, nämlich durch Trennen der Variablen und Integrieren:

$$r = \int v\,dt, \tag{1.5}$$

$$v = \int a\,dt. \tag{1.6}$$

Wir haben stillschweigend angenommen, ein Körper hätte zu jeder Zeit einen definierten Ort. Reale und daher ausgedehnte Körper besetzen aber unendlich viele Punkte im Raum gleichzeitig. Das wollen wir nicht berücksichtigen; wir sehen von der Ausdehnung der Körper ab und betrachten sie als Punkte. Dabei ignorieren wir auch alle Erscheinungen, die eine Ausdehnung mit sich bringen könnte, beispielsweise Drehung im Raum oder Formänderung. Die Physik hat für diese Idealisierung den Begriff des Massepunkts geprägt. Er kommt in zweierlei Hinsicht der Wirklichkeit nahe: Zum einen betrachtet man meist Änderungen des Orts, die viel größer sind als die Abmessungen des Körpers, so dass Letztere praktisch keine Rolle spielen. Zum anderen gelten die Gesetze der Translation sogar für ausgedehnte Körper exakt, wenn man als Ort des Körpers den Ort seines Schwerpunkts ansieht.

Nun wenden wir uns der Lösung des durch (1.3) und (1.4) gegebenen Gleichungssystems für den Fall konstanter Beschleunigung zu. Es sei also

$$a(t) = a = \text{const.}$$

Dann ist gemäß (1.6)

$$v(t) = \int a dt = at + C$$

mit einer noch unbestimmten Konstanten C. Wir haben unendlich viele Lösungsfunktionen erhalten (für jeden Wert von C eine) und damit die allgemeine Lösung von (1.4). Die Bedeutung von C wird klar, wenn wir $t = 0$ setzen:

$$v(0) = a \cdot 0 + C = C.$$

C ist also die Anfangsgeschwindigkeit, und damit ist

$$v(t) = v(0) + at. \tag{1.7}$$

(Oft schreibt man v_0 anstatt $v(0)$. Auf diese Schreibweise verzichten wir, um nicht eine neue Größe einzuführen.)

Mit (1.7) ist eine Lösung $v(t)$ von (1.4) gefunden; und da (1.4) zusammen mit einem Wert $v(0)$ eine lineare Anfangswertaufgabe 1. Ordnung darstellt und eine solche eindeutig lösbar ist (Anhang B.3), ist die Lösung auch die einzige. Nun können wir die Ortsfunktion ermitteln. Mit (1.5) und (1.7) ist

$$r(t) = \int [v(0) + at]\, dt = v(0)\, t + \frac{a}{2}\, t^2 + C$$

mit einer weiteren vorerst unbestimmten Konstanten C. Das ist die allgemeine Lösung von (1.3). Setzen wir hier $t = 0$, ergibt sich

$$r(0) = v(0) \cdot 0 + \frac{a}{2} \cdot 0^2 + C = C;$$

also ist C der Anfangsort und

$$r(t) = r(0) + v(0)\, t + \frac{a}{2}\, t^2 \tag{1.8}$$

die einzige Lösung der linearen Anfangswertaufgabe 1. Ordnung aus (1.3) und einem Wert $r(0)$.

Die Gl. (1.7) und (1.8) bilden zusammen eine vollständige Beschreibung der Bewegung bei konstanter Beschleunigung, oft auch *gleichmäßig beschleunigte* Bewegung genannt. An diese Tatsache knüpfen sich drei interessante Feststellungen und eine noch interessantere Frage.

Erste Feststellung: Nimmt man die Begriffe Ort und Zeit als gegeben an, enthält die Beschreibung der gleichmäßig beschleunigten Bewegung keinerlei Physik. Denn (1.3) und (1.4) sind bloße Definitionen, und (1.7) und (1.8) folgen aus ihnen durch mathematische Umformungen. Daher kann es kein Experiment geben, das diese Beschreibung widerlegen würde. Insofern handelt es sich bei allem, was wir dazu bisher besprochen haben, um ein reines Gedankenspiel.

Zweite Feststellung: Die vielen verschiedenen Bewegungsgesetze, die vor allem in Schulbüchern auftauchen, gehen aus (1.7) und (1.8) durch Einsetzen spezieller Bedingungen hervor. Beispielsweise folgen die Gesetze des freien Falls:

$$\begin{aligned} r &= \frac{g}{2}\, t^2, \\ v &= gt, \\ v &= \sqrt{2gr} \end{aligned}$$

aus den Anfangsbedingungen $v(0) = 0$ (der Körper wird ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen), $r(0) = 0$ (wir messen vom Ort des Loslassens aus) und der Gleichsetzung $a = g$ (die Beschleunigung entspricht der Erdbeschleunigung). Die Gleichungen der unbeschleunigten *(gleichförmigen)* Bewegung ergeben sich wiederum durch Einsetzen von $a = 0$.

Dritte Feststellung: Wir haben den Ort als skalare Größe behandelt und das Problem damit als räumlich eindimensional. Nimmt man zur ersten Raumdimension x die zweite und dritte, y und z, dazu und führt die Vektoren

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

ein, ändert sich nichts Grundlegendes. Denn die Ableitung eines Vektors ist ein Vektor, dessen Komponenten die Ableitungen der Komponenten des ersten sind:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix}$$

usw. Mit der Punktschreibweise für die Ableitung nach t enthält die Formel

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{a} \tag{1.9}$$

alles über die gleichmäßig beschleunigte Bewegung im dreidimensionalen Raum.

Und nun zur entscheidenden Frage: Wenn die Bewegungsgesetze bloße Definitionen sind – was hat Galilei eigentlich entdeckt?

(2) Galilei und der freie Fall

Zweitausend Jahre lang waren schwere Körper schneller gefallen als leichte. Und zwar, weil Aristoteles das so gesagt hatte. Dann kam Galileo Galilei und zeigte, dass dem nicht so ist, indem er es einfach ausprobierte. Ob er seine schwere und leichte Kugel tatsächlich vom schiefen Turm zu Pisa geworfen hat, wissen wir nicht; wir wissen aber, wie es ausgegangen ist. Ein solches Experiment wäre Aristoteles undenkbar erschienen, denn die antiken Philosophen vertrauten ihren Gedanken eher als dem trügerischen Sinneseindruck. Dass es auch in der Folge nicht dazu kam – Zeit, zwei Kugeln fallen zu lassen, hatte man ja genug –, liegt vor allem daran, dass die Lehre des Aristoteles mehr und mehr den Charakter einer Religion annahm und das Wort schwerer wog als die Fakten.

Nachdem Galilei also geklärt hatte, dass alle Körper, sofern sie keinen Widerstand erfahren, gleich schnell fallen, erhob er die Frage, nach welchem Gesetz sich ihre Geschwindigkeit ändert. Das war schwerer zu beantworten, denn man konnte zwar Wegstrecken zuverlässig messen, nicht aber die Zeit. Die genauesten Uhren waren Wasseruhren: Behälter, aus denen sich ein feiner Wasserstrahl ergoss, der anschließend gewogen wurde. Damit waren die kurzen Zeiten des freien Falls nicht zu bestimmen. Deshalb kam Galilei auf die Idee, Kugeln nicht fallen, sondern eine schiefe Ebene hinabrollen zu lassen. Er nahm an, dass dies die Bewegung verlangsamen, ihr Gesetz aber ansonsten nicht antasten würde, und hatte Glück damit. Nun maß Galilei die Wegstrecken, die eine rollende Kugel in jeweils gegebenen Zeitintervallen (deren Länge in Sekunden keine Rolle spielt) zurücklegte; seine Ergebnisse zeigt Tab. 1.1.

Tab. 1.1 Galileis Kugel-Experiment auf der schiefen Ebene. Die Zeiteinheit ist nicht bekannt, der Weg wurde in *punti,* entsprechend etwa Millimetern, gemessen

Zeit	1	2	3	4	5	6	7	8
Weg	33	130	298	526	824	1192	1620	2104

Ob Galilei tatsächlich eine Wasseruhr verwendet oder die Zeit anders gemessen hat (worüber es in [21] eine reizende Spekulation gibt), in nicht von Belang. Wesentlich ist das Muster, das er fand: Die Wege verhalten sich etwa proportional zum Quadrat der Zeiten. Mit den 33 punti der ersten Messung als Einheit betragen die Wege der anderen beinahe exakt 4, 9, 16, 25, 36, 49 und 64. Damit war das Gesetz

$$r(t) = ct^2$$

gefunden. Nun meldete sich der Mathematiker in Galilei: Wenn er annahm, die Geschwindigkeit nähme in gleichen Zeitabschnitten um den gleichen Betrag zu (in unseren Worten: die Beschleunigung wäre konstant), erhielt er durch Rechnung exakt das quadratische Gesetz, ebenso wie wir es im vorigen Abschnitt erhalten haben. Andere Gesetzmäßigkeiten, so fand er, standen im Widerspruch zu den Daten. Das zu berechnen war keine geringe Leistung, denn zu Galileis Zeiten gab es noch keinen Differential- und Integralkalkül; doch sein Scharfsinn überwand auch dieses Problem. Zu guter Letzt übertrug er sein Ergebnis, experimentell an der schiefen Ebene erhalten, auf den freien Fall. Denkt man sich nämlich die Ebene steiler und steiler und folgt die Kugel stets dem quadratischen Gesetz, dann muss sie das auch im Grenzfall der unendlich steilen, also senkrechten Ebene tun: im freien Fall.

In heutiger Sprache zusammengefasst, hat Galilei also gefunden, dass frei fallende Körper eine konstante, vom Körper unabhängige Beschleunigung erfahren. Das ist der physikalische Inhalt seines Gesetzes, und erst dadurch wird unsere Voraussetzung aus dem letzten Abschnitt (a = const) auf die *reale* Bewegung im erdnahen Schwerefeld anwendbar.

1.6 Newtons zweites Axiom und der freie Fall

In Abschn. 1.5 haben wir die Bewegung von Körpern bei konstanter Beschleunigung beschrieben. Die Frage, warum sie sich so bewegen, haben wir ausgeklammert; nun beantworten wir sie in Newtons Worten: „Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur." (Die Änderung der Bewegung ist proportional zur bewegenden Kraft und erfolgt in Richtung der geraden Linie, in der die Kraft wirkt.) Das ist Newtons zweites Axiom, erschienen 1687 in seinem Hauptwerk *Philosophiae naturalis principia mathematica,* den mathematischen Prinzipien der Naturphilosophie. Was Newton Bewegung nannte, nennen wir heute Impuls, und unter der Änderung verstand er die Änderung pro Zeiteinheit, also die Ableitung nach der Zeit. Da Newton auch die Richtung der Kraft angegeben hat, ist dieses Gesetz ein vektorielles. Mit den Bezeichnungen $\mathbf{p}$ für den Impuls- und $\mathbf{F}$ für den Kraftvektor lautet es

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = k\mathbf{F},$$

wobei k eine zunächst unbestimmte Konstante ist. Der Impuls ist das Produkt aus Masse m und Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Wir können das Axiom daher schreiben als

$$k\mathbf{F} = \frac{d}{dt}[m\mathbf{v}] = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Wählt man die Einheiten passend: Kilogramm für die Masse, Meter für den Weg, Sekunden für die Zeit und Newton für die Kraft, dann ist $k = 1$ und es ergibt sich die bekannte Formel

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}. \tag{1.10}$$

Nun, da wir den Zusammenhang zwischen Kraft und Bewegung kennen, können wir Bewegungen von Körpern unter dem Einfluss von Kräften berechnen. Wir beschränken uns auf zwei Kräfte: Schwerkraft und Reibung, stellen uns also einen fallenden Körper vor, den das umgebende Medium behindert. (Wenn man trotz Reibung vom *freien* Fall spricht, drückt man aus, dass der Körper nicht etwa durch Zwangskräfte auf einer bestimmten Bahn geführt wird.) Das Medium sei in Ruhe; dann ist jede Reibungskraft, welchem Gesetz sie ansonsten auch immer folgen mag, der Bewegung entgegengerichtet. Der Körper sei diesmal nicht auf einen Massepunkt reduziert, da Reibung nur auf ausgedehnte Körper wirkt. Wir denken uns alle Kräfte an seinem Schwerpunkt angreifend. Der Körper soll ohne Anfangsgeschwindigkeit losgelassen werden. Auf den Beweis, dass er dann senkrecht fällt, verzichten wir – das überlassen wir der Anschauung. Wegen des senkrechten Fallens genügt es, die Bewegung in *einer* Dimension zu betrachten und ebenso alle Kräfte, also Vektoren beiseite zu lassen und skalar zu rechnen (Abb. 1.3).

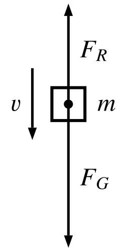

Abb. 1.3 Freier Fall mit Reibung. Gewicht F_G und Reibungskraft F_R greifen im Schwerpunkt der Masse m an

Wir ermitteln nun den zeitlichen Verlauf der Fallgeschwindigkeit: die Funktion $v(t)$. Wählt man als positive Richtung die Richtung der Bewegung, dann wirkt auf den Körper in Summe die Kraft $F_G - F_R$. Nach (1.10) ist dann

$$F_G - F_R = ma.$$

Das Gewicht des Körpers ist das Produkt aus seiner Masse m und der Erdbeschleunigung g. Damit und mit (1.4) können wir die letzte Beziehung schreiben als

$$mg - F_R = m\,\frac{dv}{dt}.$$

Das kürzen wir durch m und erhalten für v die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{F_R}{m}. \tag{1.11}$$

Diese Gleichung lösen wir nun für drei Fälle: dass die Reibung (1) null, (2) proportional zur Geschwindigkeit und (3) proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit ist.

(1) Die Reibung ist null

Ist $F_R = 0$, dann ist die rechte Seite von (1.11) und damit die Beschleunigung konstant. Bewegungen dieser Art haben wir schon in Abschn. 1.5 behandelt. Gemäß (1.7) ergibt sich, wenn die Anfangsgeschwindigkeit $v(0) = 0$ ist:

$$v(t) = gt.$$

Die Geschwindigkeit ist proportional zur Zeit und nur dadurch begrenzt, dass der Fall einmal endet.

(2) Die Reibung ist proportional zur Geschwindigkeit

Zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskräfte treten auf, wenn Körper sich durch zähes Medium bewegen. Dann ist

$$F_R = 6\pi\eta r v,$$