

Albrecht Beutelspacher

„In Mathe war ich immer schlecht ... “

Martin Aigner, Ehrhard Behrends (Hrsg.)

Alles Mathematik

Ehrhard Behrends

Fünf Minuten Mathematik

Albrecht Beutelspacher

„Das ist o.B.d.A. trivial!“

Tipps und Tricks zur Formulierung mathematischer Gedanken

Albrecht Beutelspacher

Lineare Algebra

Albrecht Beutelspacher

Kryptologie

Jörg Bewersdorff

Mit Glück, Logik und Bluff

Robert Kanigel

Der das Unendliche kannte

Das Leben des genialen Mathematikers S. Ramanujan

Matthias Ludwig

Mathematik + Sport

Dietrich Paul

PISA, Bach, Pythagoras

Winfried Scharlau

Schulwissen Mathematik: Ein Überblick

Rudolf Taschner

Der Zahlen gigantische Schatten

Vieweg

Berufs- und Karriereplaner Mathematik

Albrecht Beutelispacher

„In Mathe war ich immer schlecht...“

Berichte und Bilder von Mathematik und
Mathematikern, Problemen und Witzen, Unendlichkeit
und Verständlichkeit, reiner und angewandter,
heiterer und ernsterer Mathematik

Mit Illustrationen von Andrea Best

5., aktualisierte Auflage

STUDIUM



**VIEWEG+
TEUBNER**

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der
Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<<http://dnb.d-nb.de>> abrufbar.

Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher
Justus-Liebig-Universität Gießen
Mathematisches Institut
Arndtstraße 2
D-35392 Gießen

albrecht.beutelspacher@math.uni-giessen.de
<http://www.uni-giessen.de/beutelspacher/>

1. Auflage 1996
2 Nachdrucke
2. Auflage 2000
3. Auflage 2001
3 Nachdrucke
4. Auflage 2008
- 5., aktualisierte Auflage 2009

Alle Rechte vorbehalten

© Vieweg+Teubner | GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden 2009

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Nastassja Vanselow

Vieweg+Teubner ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.viewegteubner.de



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Umschlaggestaltung: KünkelLopka Medienentwicklung, Heidelberg

Umschlagmotiv: Regine Zimmer, Dipl.-Designerin, Frankfurt/Main

Portraitphoto: Rolf K. Wegst, www.rolfwegst.com

Druck und buchbinderische Verarbeitung: MercedesDruck, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Printed in Germany

ISBN 978-3-8348-0774-8

Zu Beginn

„... und was machen Sie beruflich?“

Das war die falsche Frage. Ich hatte mich seit einer Viertelstunde mit der freundlichen jungen Dame angenehm und angeregt unterhalten, wir hatten über dies und das, Politik und Politiker, Kunst und Kinder, Lust und Laune gesprochen, als sie, nicht einmal unfreundlich, diese Frage stellte.

Ich versuchte, dem Unglück auszuweichen, und antwortete betont beiläufig: „Ich arbeite an der Uni.“

Aber das Schicksal nahm seinen Lauf: „Echt? Das ist aber interessant! Und in welchem Fachbereich?“

Aus, Schluss, Ende. Schade, denn die Frau war wirklich nett. Jetzt musste ich mich outen, und dann, das wusste ich aus eigener Erfahrung und Erzählungen vieler Kollegen, würde die Verbindung unterbrochen sein. Noch ein kaltes Lächeln, ein paar Höflichkeitsfloskeln und aus. Aber es half nichts, und so bekannte ich tapfer: „Ich bin Mathematiker“.

Ich wusste, was jetzt kam, und brauchte gar nicht mehr hinzuschauen. Sie würde zusammenzucken, ihr freundliches Gesicht würde sich verschließen, nur ihre gute Erziehung würde sie vor einem Wutanfall bewahren, sie würde stammeln „in Mathe war ich immer schlecht“ und sich dann endgültig von mir abwenden.

„Warum schauen Sie so traurig?“

Wie bitte, was sagte sie da? „Entschuldigen Sie, ich war einen Augenblick lang abwesend.“

„Das habe ich gemerkt.“ Sollte sie vielleicht zu den ganz wenigen gehören, die...? Da sprach sie weiter:

„Wissen Sie, in Mathe war ich immer schlecht ...“

Na also. Ich wusste es. Auch sie. Niemand versteht mich. Aus.

„... und deswegen würde mich eigentlich interessieren, was Sie so machen.“

Hör ich recht? Täuscht mich nicht mein Ohr?

Ich hatte den Eindruck, dass ich etwas erklären musste. „Wissen Sie, es ist eigentlich immer so, dass sich die Leute sofort zurückziehen, wenn sie erfah-

ren, dass ich Mathematiker bin. Ich werde komisch angesehen, wie wenn ich von einem anderen Stern käme, und jedes Gespräch hört auf.“

„Hm. Ist das immer so?“

„Ganz furchtbar ist es mit den Politikern. Wenn ein Landrat oder ein Minister eine Mathematiktagung eröffnet, kokettiert er richtig damit, dass er schon in der Schule in Mathematik schlecht war und von unserer Wissenschaft rein gar nichts versteht. Ein Skandal! So ein Mann würde sich doch nie trauen, bei der Eröffnung eines Anglistenkongresses zuzugeben, dass er kein Englisch kann.“

„Na, das klingt ja furchtbar. Aber ich kann die Leute schon verstehen. Jeder muss Mathe in der Schule lernen, aber keiner kapiert, was das ist, Mathematik. Von Bio, Kunst, Literatur weiß ich zwar auch nicht mehr viel, aber ich habe das Gefühl zu wissen, um was es dabei geht. Sogar von Wissenschaften, die ich in der Schule nicht hatte, wie Jura und Volkswirtschaft, glaube ich, ein bisschen zu verstehen. Aber Mathe? Keine Ahnung. Eine Mauer. Und nicht mal die besten kommen durch.“

„Und Sie meinen?“

„Ist doch klar. In der Schule musste jeder eine Strategie entwickeln, wie er den Mathematikunterricht, in dem er keinen Sinn erkannte, einigermaßen überleben konnte. Und das hat er nicht vergessen. Auch wenn er Karriere gemacht hat.“

„Aber das stimmt doch gar nicht“, ereifere ich mich, „Mathematik ist voller Schönheiten, enthält Kulturleistungen ersten Ranges und hat viele praktische Anwendungen.“

„Das mag ja alles sein“, werde ich gebremst, „aber das weiß doch niemand. Kein Mensch weiß, was die Mathematiker eigentlich treiben, was Mathematik ist und was sie uns nützt. Das scheint wirklich eine Welt für sich zu sein.“

„Aber jeder kann sich doch informieren, es gibt zahllose Mathematikbücher, in denen das drinsteht“, verteidige ich mich.

Da wird sie fast ernst, schaut mich an und sagt: „Keine Ausreden! Ihr Mathematiker habt die Pflicht, uns zu erklären, was ihr macht. Nicht alles, aber doch soviel, dass wir anderen ein bisschen was verstehen. Das kann doch nicht so schwer sein. Ich will doch zum Beispiel auch nicht alle Einzelheiten der kontrapunktischen Technik von Johann Sebastian Bach wissen, aber wenn jemand darüber forscht, wird er mir bestimmt erklären, was er macht. Warum tut ihr Mathematiker das nicht?“

„Weil ... weil das doch niemand interessiert“, stottere ich.

„Quatsch!“ Jetzt wird sie energisch. „Im Gegenteil, ich kenne viele Leute, die endlich wissen wollen, was Mathematik wirklich ist, nachdem sie das in der Schule nicht mitbekommen haben.“

„Sie meinen?“

„Ja, ich meine.“ Und dann lächelt sie: „Ich fänd’s zum Beispiel schön, wenn Sie mir ein bisschen erzählen würden. Sie können das bestimmt gut. Es muss ja nichts so furchtbar Tiefsinniges sein. Womit beschäftigen sich Mathematiker überhaupt? Was forschen Sie? Gibt es noch Geheimnisse? Warum muss das eigentlich so unverständlich sein? Ich fänd’s einfach nett, wenn Sie mal versuchen würden, mir ein bisschen auf die Sprünge zu helfen.“

Ach! Ist das schön! Das ist ja fast zu schön!

Da meinte sie noch: „Es muss ja nicht sofort sein.“

... und damit blenden wir uns aus diesem Gespräch aus, denn seine unmittelbare Fortsetzung hatte nur wenig mit wissenschaftlicher Mathematik zu tun...



Dieses Buch ist meine Antwort auf die Herausforderung der jungen Frau.

Mein Ziel ist gleichzeitig bescheiden und verwegen: Ich will Sie, liebe Leserin, lieber Leser, nicht zur Mathematik bekehren. Ich erhoffe mir auch keine Liebeserklärung (an die Mathematik). Und ich erwarte nicht, dass Sie nach der Lektüre dieses Buches Mathematik „können“. Aber ich wünsche mir, dass die eine oder der andere bei oder nach der Lektüre denkt:

„Eigentlich ganz witzig / nützlich / aufregend, was die da machen“, oder

„So geheimnisvoll ist Mathematik ja gar nicht!“ oder auch einfach nur stöhnt:

„Diese Mathematiker!“

Für wen habe ich dieses Buch geschrieben? Natürlich zunächst für Sie, junge Dame, die mich so liebenswürdig dazu aufgefordert hat. Aber mit Ihnen kann jeder Mensch das Buch ohne Reue genießen, der

- Mathematik liebt, oder
- Mathematik hasst, oder
- einfach *in Mathe immer schlecht war*.



Viele der Texte sind entstanden, als ich darüber nachdachte, wie ich Mathematik in Vorlesungen, Vorträgen und anderen Veranstaltungen vermitteln kann. Daher habe ich beim Schreiben vor allem an folgende Leser gedacht, denen ich das Buch besonders ans Herz legen möchte:

- Studierende der Mathematik. Für sie kann das Buch auch eine etwas andere Einführung in das Studium sein.
- Ehemalige Studierende, also Mathematiklehrerinnen und -lehrer, sowie Kolleginnen und Kollegen aus der Wirtschaft. Für sie kann es als Argumentationshilfe gegenüber nichtmathematischen Kolleginnen und Kollegen dienen.
- Zukünftige Studierende, also interessierte Schülerinnen und Schüler. Für sie kann dieses Buch ein erster Einblick in eine neue Welt sein.



Dieses Büchlein besteht aus einzelnen Betrachtungen, die lose in die folgenden fünf Abschnitte eingeteilt werden:

- Was ist Mathematik? oder Versuch der Beschreibung eines Unbeschreiblichen
- Mathematik von außen betrachtet oder Wir nähern uns der Sache ganz behutsam
- Wir machen Mathematik oder Keine Angst!
- Mathematiker oder Was sind das für Menschen?
- Angewandte Mathematik oder Warum und wie?

Lassen Sie sich überraschen!

Nur eine Bemerkung vorab: Im dritten Abschnitt lade ich Sie ein, mit mir ein bisschen Mathematik zu machen. Ich verspreche Ihnen, keinen „Mathe-Horror“ zu erzeugen. Dafür bürgen schon die Themen: Der Fußball, das Schachbrett und Zauberkits. Sie werden die jeweilige Fragestellung *und* die Antwort verstehen!

Im Gegensatz zu vielen Mathematikbüchern können Sie dieses Buch an jeder Stelle aufschlagen und sofort zu lesen beginnen. Denn mathematische Vorkenntnisse brauchen Sie nur im letzten Kapitel, und auch dort nur an ganz wenigen Stellen. Und wenn Sie diese nicht verstehen, blättern Sie einfach eine Seite weiter. Sie kommen danach wieder genauso gut mit wie jeder andere.

Die einzelnen Beiträge sind teilweise witzig, teilweise ernst, manchmal kurz und manchmal lang, zum Teil werden Randthemen, zum Teil zentrale Themen behandelt. Aber allen Beiträgen ist eines gemeinsam: Es sind *meine* Blicke aus der Mathematik heraus und von außen auf die Mathematik. Allerdings sind

auch meine Blickwinkel sehr verschieden, und ich versuche überhaupt nicht, sie zu harmonisieren.

Manchen werden einige Abschnitte zu unseriös sein, andere werden sich vielleicht an meinen teilweise deutlichen Aussagen stoßen. Beide Gruppen bitte ich um Nachsicht. Lesen Sie einfach nur das, was Ihnen gefällt!



Dies ist ein traditionelles Buch. Es besteht aus Papier, ist gebunden und hat einen Umschlag. Sie können es in die Hand nehmen, Sie können sich damit abends zu Hause in den Sessel setzen und es sogar mit ins Bett nehmen.

Eine meiner Quellen ist aber ganz anderer Art. Damit meine ich nicht die Textverarbeitung mit dem Computer, sondern die Möglichkeit, in den internationalen Datennetzen unbeschränkt nach interessanter, merkwürdiger oder kurioser Mathematik zu suchen. Ich habe nicht nur im Netz gestöbert, sondern besonders aus den Beiträgen der Newsgroup sci.math viel gelernt. Neben vielem Unnötigen und Ärgerlichen sind dort auch Schätze zu finden.



Dies ist ein subjektives Buch. Sie können viel aus diesem Buch lernen. Denn indem ich sehr nahe an die Mathematik herangehe, kann ich Dinge klar sagen, die in der nüchternen Wissenschaftssprache grundsätzlich nicht ausdrückbar sind.

Gerade ein so offenes Buch hätte ich ohne die ständige Ermutigung vieler Menschen nicht schreiben können.

Von Zeit zu Zeit habe ich Freunden und Bekannten Entwürfe einzelner Kapitel geschickt, worauf viele mit wahren Bekenntnisbriefen reagierten. Offenbar haben diese Abschnitte wunde Punkte berührt. Die Briefe haben mir gezeigt, dass ich auf dem richtigen Weg war.

Ich danke vielen Musen weiblichen und männlichen Geschlechts für ihre unschätzbaren Dienste: Benno Artmann, Christoph Beutelspacher, Jörg Eisfeld, Christian Fenske, Udo Heim, Günter Hölz, John Lochhas, Ute Rosenbaum, Meike Stamer, Johannes Ueberberg, Hans-Georg Weigand, Herbert Zeitler. Für Hilfe in letzter Minute danke ich Klaus-Clemens Becker und Markus Failing.

Ganz besonders möchte ich meinem Kollegen Axel Pfau danken. Er hat mich seit Jahren immer wieder direkt („Sie können das!“) und indirekt aufgefordert, ein solches Buch zu schreiben. Eigentlich saß er mir während des Schreibens immer „virtuell“ gegenüber. Was wird er nun zu dem fertigen Produkt sagen?

Ich hatte das große Glück, dass ich Andrea Best gewinnen konnte, Illustrationen für dieses Buch zu zeichnen. Da sie nicht nur Kunst, sondern auch Mathematik studiert hat und unter anderem bei mir Vorlesungen gehört hat, weiß sie, wovon sie zeichnet. Ich bin überzeugt, dass das Buch durch ihre Illustrationen sehr gewonnen hat. Herzlichen Dank!

Nicht zuletzt danke ich dem Vieweg Verlag und vor allem meiner Lektorin, Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch. Ich weiß, dass nicht wir Autoren allein die Bücher machen, sondern dass die Mitarbeiter des Verlags mit ihren Kenntnissen und ihrer Erfahrung beim Entstehen eines Buches eine wesentliche Rolle spielen.

Und bei einem Buch, das aus der Reihe tanzt, ist das besonders wichtig.

Inhaltsverzeichnis

Zu Beginn	V
------------------------	----------

Was ist Mathematik? oder

Versuch der Beschreibung eines Unbeschreiblichen.....	1
--	----------

Was ist Mathematik?	3
David und Goliath oder Was ist ein mathematischer „Satz“?	15
„Nun, oh Unendlichkeit, bist du ganz mein!“	25
„Im Unendlichen gibt's genügend Raum und Geld“	35

Mathematik von außen betrachtet oder

Wir nähern uns der Sache ganz behutsam	41
---	-----------

Wieviel Mathematik gibt es?	43
Mit dem Taxi nach Oberwolfach	48
Die Top Ten der mathematischen Sätze.....	52

Wir machen Mathematik oder Keine Angst!	59
--	-----------

Probleme, Knocheien, Kuriositäten.....	61
Was Mathematiker nicht wissen und nicht können	75
Der Fußball	80
Das Schachbrett.....	87
Simsalatik und Mathakadabra	94

Mathematiker oder Was sind das für Menschen?.....	103
--	------------

Mathematiker über Mathematik	105
Nichtmathematiker über Mathematik	108
Die Angst der Mathematiker vor der Verständlichkeit	111
Worüber Mathematiker lachen (können).....	120
Insiderwitze	128
Mathematische Charakterköpfe	130
Warum Mathematik ?.....	144

Angewandte Mathematik oder Warum und wie?	147
Auf der Suche nach der angewandten Mathematik.	
Eine Komödie in fünf Akten	149
Irrtum ausgeschlossen oder	
Computer lesen nach der Ganzwortmethode.....	154
Warum wendet man ausgerechnet Mathematik an?	
Überlegungen anhand von Beispielen aus der Kryptologie.....	166
Wie werden Informationen am schnellsten verteilt?.....	178

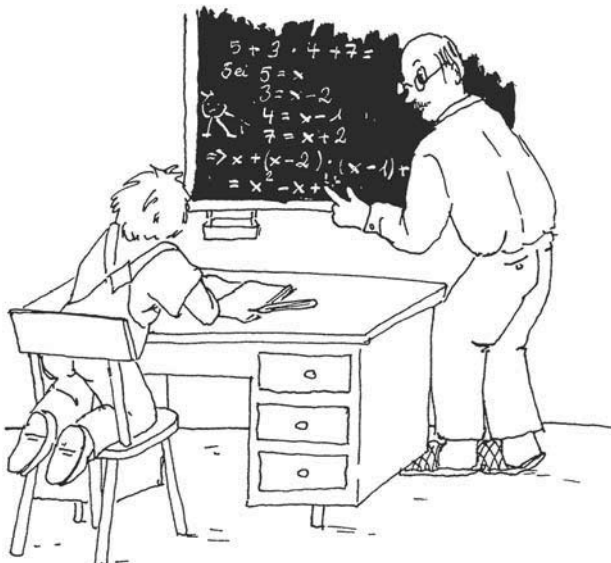
Was ist Mathematik?

oder

Versuch der Beschreibung eines Unbeschreiblichen

Hier finden Sie:

- Verschiedene Sichtweisen der Mathematik
- Eine Diskussion über das Wesen eines mathematischen Satzes
- Die Rolle des Unendlichen in der Mathematik
- Ein Gespräch, in dem ein Rabe dem Teufel demonstriert, wie man ganz legal Raum und Geld zaubert



Was ist Mathematik?

Genauso wie bei vielen anderen Erscheinungsformen des Lebens (Philosophie, Musik, Liebe) kann Mathematik nicht eindeutig definiert werden. Jede Definition wäre entweder nichtssagend oder zu einengend. Man kann aber versuchen, Mathematik von verschiedenen Seiten zu beleuchten. Dabei offenbaren sich überraschende und tiefe Einblicke in das Wesen der Mathematik.

„Denk ich an Mathe in der Nacht, bin ich um den Schlaf gebracht.“ – Vielleicht können auch Sie in diesen Heinrich Heine nachempfundenen Stoßseufzer einstimmen. Aber die Tatsache, dass Sie bis hierher gelesen haben, lässt mich hoffen, dass Sie diesen Satz nicht für eine abschließende Beschreibung der Mathematik halten.

Bevor wir versuchen, Mathematik zu beschreiben, beantworten wir die einfachere Frage: Was ist Mathematik *nicht*?

- *Mathematik ist keine Naturwissenschaft.*

Die Gegenstände der Mathematik sind nicht diejenigen der Naturwissenschaften: In der Mathematik geht es nicht primär um real existierende Objekte wie Fernsehrohre, Kohlenstoffverbindungen oder Bakterien, sondern um geistige Gegenstände, wie Zahlen, Punkte, Geraden und ihre Beziehungen. Aber auch die Methode der Mathematik ist anders: Es geht nicht darum, aus Einzelbeobachtungen „induktiv“ ein Naturgesetz zu erschließen, sondern aus einer mathematischen Aussage eine andere „deduktiv“ (das heißt durch reines Denken) abzuleiten.

Die Abgrenzung der Mathematik gegenüber den Naturwissenschaften bedeutet aber nicht, dass es keine Verbindungen gibt. Im Gegenteil: Große Teile der Mathematik sind durch naturwissenschaftliche Fragestellungen motiviert, und die klassische angewandte Mathematik besteht aus Anwendungen in den Naturwissenschaften, vor allem in der Physik.

- *Mathematik ist kein Sport.*

Auch kein Denksport. Zwar hat Mathematik sehr viel mit Denken zu tun, und der Übergang von Denksportaufgaben zu ernsthaften mathematischen

Problemen ist oft fließend. Aber Mathematik nur als eine Sammlung von Denksportaufgaben aufzufassen, greift zu kurz. Die Aufgabe der Mathematik besteht nicht darin, möglichst viele Kreuzworträtsel oder Logeleien zu lösen, sondern sie beschäftigt sich mit Problemen, die eine „Bedeutung“ haben. Das muss nicht heißen, dass die Probleme der Mathematik aus den Anwendungen kommen, ihre Bedeutung ist in der Regel vor allem innermathematisch begründet – und sehr häufig ist die Bedeutung eines Problems nicht von vornherein sichtbar.

Die Abgrenzung der Mathematik gegenüber Denksportaufgaben heißt aber nicht, dass es keine Zusammenhänge gibt. Anspruchsvolle Denksportaufgaben dienen nicht nur als Inspiration für Forscher, sondern haben ihre Funktion auch in der Erziehung junger Mathematikerinnen und Mathematiker.

- *Mathematik ist kein Glaube.*

In der Mathematik sprechen wir nicht in vager, objektiv nicht überprüfbarer Weise über die geistigen Gegenstände. Vielmehr ist Mathematik eine Wissenschaft, manche sagen sogar: das ideale Modell einer Wissenschaft. Das Besondere an der Mathematik ist gerade, dass man objektiv verifizierbare Aussagen über geistige Gegenstände, wie zum Beispiel die unendliche Menge aller natürlichen Zahlen machen kann.

Die Abgrenzung der Mathematik gegenüber religiösen Phänomenen wie Glaube, bedeutet nun aber nicht, dass dies völlig getrennte Welten sind. Wie keine andere exakte Wissenschaft lotet die Mathematik die Grenzen menschlicher Erkenntnis aus. Objekte der mathematischen Neugierde sind vor allem unendliche Gegenstandsbereiche. Typische Fragen, die die Mathematik beantworten kann, sind: Wie kann man über alle Gegenstände unendlicher Bereiche nachprüfbar Aussagen machen? Wie kann man unendliche Bereiche vergleichen? Gibt es verschiedene Stufen der Unendlichkeit?

Übrigens: Ich sage nicht „Mathematik ist keine Kunst.“ Auf banale Weise ist dieser Satz natürlich richtig: Mathematik ist nicht Musik, Malerei oder Poesie. Aber es gibt tief liegende Verwandtschaften zwischen der Arbeit eines Mathematikers und der eines Künstlers, und wir werden in diesem Buch an einigen Stellen Musik oder Literatur zur Verdeutlichung heranziehen.



Was ist Mathematik nun wirklich? Aus den obigen Abgrenzungen können wir schon das folgende ableiten: Mathematik beschäftigt sich in objektiv nachvollziehbarer Weise mit „wichtigen“ geistigen Gegenständen.

Auch das ist natürlich keine Definition der Mathematik. Ich werde auch gar nicht versuchen, *eine Definition* für die Mathematik anzugeben. Ich biete Ihnen gleich *vier* an.

Genauer gesagt beschreibe ich vier Sichtweisen der Mathematik, von denen sich keine auf die andere reduzieren lässt, die sich aber gegenseitig ergänzen. Es handelt sich um koexistente Beschreibungen der Mathematik. In jedem Mathematiker sind alle vier Aspekte vorhanden, bei einem der eine mehr, beim anderen der andere.



Bei dem Begriff „Mathematik“ stellen sich schnell Assoziationen wie „Logik“, „Beweis“, „Korrektheit“ ein. In der Mathematik gibt es „Sätze“, die aus Voraussetzung und Behauptung bestehen, und die man beweisen muss. Die Sätze sind oft als „Wenn-dann-Aussagen“ ausgedrückt: *Wenn* die Voraussetzung gilt, dann gilt auch die Behauptung.

Dies ist die traditionelle Sicht der Mathematik, die wir kurz so formulieren:

**Mathematik ist der Versuch,
logische Zusammenhänge zu entdecken.**

Das Schema ist klar: Eine Aussage B wird auf eine andere Aussage A zurückgeführt, aus der sie logisch abgeleitet werden kann. Man sagt dazu auch, man beweist die Implikation

$$A \Rightarrow B.$$

Dieser Ansatz geht auf die alten Griechen zurück, die vor über 2000 Jahren die Macht logischer Argumente entdeckten.

Dies klingt für uns banal, aber man kann die Bedeutung dieser Idee kaum überschätzen: Statt A und B direkt zu verifizieren, braucht man nur A zu verifizieren. Und wenn man eine Aussage C auf B zurückführen kann, braucht man nur A zu verifizieren; B und C gelten dann automatisch.

Das Ziel der Mathematik ist also, logische Abhängigkeiten zwischen Aussagen zu entdecken. Darunter fällt auch der Versuch, Abhängigkeiten zwischen Begriffen herauszufinden („jedes Rechteck ist ein Parallelogramm“). Eines wird dabei auch deutlich: Es handelt sich stets um mathematische Aussagen und mathematische Begriffe.

Wenn man diesen Ansatz radikal weiterverfolgt, so kommt man dazu, die ganze Mathematik, beziehungsweise ein Teilgebiet, wie zum Beispiel die Geo-

metrie, auf wenige Grundaussagen zurückzuführen. Diese Grundaussagen werden *Axiome* genannt.

Extrem ausgedrückt: Aus den Axiomen kann die gesamte Theorie (also zum Beispiel die Geometrie) logisch entwickelt werden; in den Axiomen „steckt die ganze Theorie bereits drin“.

Der erste Versuch eines „axiomatischen Aufbaus“ war die Geometrie von Euklid (ca. 300 v. Chr.), die er in seinen „Elementen“ dargelegt hat. Wenn auch – aus heutiger Sicht – noch manche Lücke zu finden ist, so ist doch der Anspruch insgesamt großartig eingelöst: Aus wenigen Axiomen wird die gesamte „euklidische Geometrie“ aufgebaut.

Die erste lückenlose Axiomatik der Geometrie wurde von David Hilbert (1862–1943) geliefert, der mit seinem Buch „Grundlagen der Geometrie“ 1899 die Diskussion über die Grundlagen der Geometrie in gewissem Sinne abschloss und einen Grundstein für die Mathematik des 20. Jahrhunderts legte.

Die Axiome können naturgemäß nicht mehr auf andere Aussagen zurückgeführt werden. Mit anderen Worten: Die Gültigkeit der Axiome kann nicht mehr mathematisch bewiesen werden. Dies hat eine wichtige Konsequenz bei Anwendungen dieser Theorie: Die Gültigkeit der Axiome muss dann zum Beispiel empirisch verifiziert werden.

Konsequent zu Ende gedacht führt dieser Ansatz zu einem formalistischen Verständnis von Mathematik. Aus dieser Sicht besteht ein Beweis einer mathematischen Aussage prinzipiell nur darin, eine „Wahrheitstafel“ richtig auszufüllen.

Mit Hilfe einer Wahrheitstafel kann die Richtigkeit einer logischen Formel auf prinzipiell ganz einfache Weise überprüft werden. Im folgenden Abschnitt wird dies ausgeführt. Wenn Sie das nicht interessiert, können Sie den Exkurs auch getrost überblättern.

Exkurs über Wahrheitstafeln

Im Folgenden soll das Instrument der Wahrheitstafeln näher beschrieben werden. Diese beziehen sich auf Aussagen; daher müssen wir erst klären, was man in der Mathematik unter einer „Aussage“ versteht.

In der Mathematik geht es um Aussagen über mathematische Sachverhalte; diese Aussagen sind entweder richtig oder falsch. Aus schon bestehenden Aussagen (richtigen oder falschen) können wir neue Aussagen zusammensetzen, die ebenfalls richtig oder falsch sein können. Bei diesen Prozessen des Zusammensetzens handelt es sich um Grundtechniken der Mathematik.

Was eine Aussage „ist“, definieren wir nicht. Wir brauchen das auch gar nicht zu tun, wir müssen nämlich mit Aussagen nur richtig umgehen können. Entscheidend ist, dass eine Aussage prinzipiell nur falsch oder wahr sein kann. Aussagen in diesem Sinne sind zum Beispiel die folgenden:

Am Nordpol herrschen mehr als 50° Celsius.

Alle Mathematikstudenten sind intelligent.

Es gibt unendlich viele Primzahlen.

$2 + 2 = 5$.

Keine Aussagen sind zum Beispiel:

Hallo!

$5 + 3$

π

Howgh, ich habe gesprochen!

Die erste Funktion von Wahrheitstafeln ist zu erklären, wie man aus zwei Aussagen A und B eine dritte machen kann. Die wichtigsten „zusammengesetzten“ Aussagen sind:

$\neg A$ (nicht A),

$A \vee B$ (A oder B),

$A \wedge B$ (A und B),

$A \Rightarrow B$ (wenn A, dann B),

$A \Leftrightarrow B$ (A genau dann, wenn B).

Wie kann man eine solche zusammengesetzte Aussage beschreiben? Wir erinnern uns, dass eine Aussage wahr oder falsch ist. Wir müssen also für unsere zusammengesetzten Aussagen nur festlegen, wann sie wahr und wann sie falsch sein sollen. Das hängt natürlich davon ab, ob die Aussagen A und B wahr oder falsch sind. Dies können wir mit Hilfe von **Wahrheitstafeln** ausdrücken.

Wir betrachten als Beispiele die zusammengesetzten Aussagen $A \wedge B$ („A und B“) und $A \Rightarrow B$ („wenn A, dann B“):

Wahrheitstafel für $A \wedge B$

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Das bedeutet:

Wenn A und B wahr sind, so ist $A \wedge B$ eine **wahre** Aussage.

Wenn A wahr und B falsch ist, so ist $A \wedge B$ eine **falsche** Aussage.

Wenn A falsch und B wahr ist, so ist $A \wedge B$ eine **falsche** Aussage.

Wenn A und B falsch sind, so ist $A \wedge B$ eine **falsche** Aussage.

Beispiel: Die Aussage $(2 + 2 = 5) \wedge (5 \text{ ist eine Primzahl})$ ist eine falsche Aussage.

Wahrheitstafel für $A \Rightarrow B$

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Das bedeutet:

Wenn A und B wahr sind, so ist $A \Rightarrow B$ eine **wahre** Aussage.

Wenn A wahr und B falsch ist, so ist $A \Rightarrow B$ eine **falsche** Aussage.

Wenn A falsch und B wahr ist, so ist $A \Rightarrow B$ eine **wahre** Aussage.

Wenn A und B falsch sind, so ist $A \Rightarrow B$ eine **wahre** Aussage.

Beispiel: Die Aussage $(2 + 2 = 5) \Rightarrow (5 \text{ ist eine Primzahl})$ ist eine wahre Aussage.

Wahrheitstafeln dienen nicht nur der Definition von Aussagen; ihre *zweite Funktion* besteht darin, dass man mit ihnen (einfache) Sätze beweisen kann.

Was ist ein mathematischer Satz? Eine formale Art, dies zu sehen, ist folgende: Ein mathematischer Satz ist eine zusammengesetzte Aussage, die *immer wahr* ist. Damit meinen wir, dass sie unabhängig von der Verteilung der Wahrheitswerte der Einzelaussagen wahr ist. (Eine ausführliche Diskussion des Wesens mathematischer Sätze erfolgt im nächsten Abschnitt.)

Betrachten wir dazu ein einfaches Beispiel. Wir wollen uns überzeugen, dass die Aussage $(A \wedge B) \Rightarrow A$ gilt. Mit dem Kalkül der Wahrheitstafeln geht man dabei wie folgt vor. Es werden sämtliche Variablen (in unserem Fall sind dies nur A und B) aufgeführt, alle Kombinationen von wahr und falsch aufgelistet und für jede einzelne Kombination durch elementare logische Schlüsse verifiziert, dass die behauptete Aussage richtig ist: