BestMasters

Daniel Schallus

Kausalität, Analytizität und Dispersionsrelationen

Eine Analyse aus mathematischer und physikalischer Perspektive

Springer Spektrum

BestMasters

Weitere informationen zu dieser Reihe finden Sie unter
http://www.springer.com/series/13198

Mit „BestMasters" zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften.
Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Daniel Schallus

Kausalität, Analytizität und Dispersionsrelationen

Eine Analyse aus mathematischer und physikalischer Perspektive

Springer Spektrum

Daniel Schallus
Mainz, Deutschland

BestMasters
ISBN 978-3-658-13200-2 ISBN 978-3-658-13201-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-13201-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

„If there be any suspicion that the course of nature may change, and that the past may be no rule for the future, all experience becomes useless, and can give rise to no inference or conclusion. It is impossible, therefore, that any arguments from experience can prove this resemblance of the past to the future, since all these arguments are founded on the supposition of that resemblance.“

– David Hume*, An Enquiry Concerning Human Understanding*

In dem obigen Zitat beschreibt der Philosoph David Hume das Kausalitätsprinzip als Grundvoraussetzung jedweder Art von Empirie. In seinen Augen umfasste der Begriff der Kausalität unter anderem die folgenden zwei Aspekte, denen auch heute wohl kaum jemand widersprechen würde: Erstens treten Ursache und Wirkung immer nur paarweise auf, wobei dieselbe Ursache auch zu derselben Wirkung führt. Zweitens eilt die Ursache der Wirkung voraus und niemals umgekehrt. Betrachtet man nun die wissenschaftliche Empirie der Naturwissenschaften, so muss man in der Tat feststellen, dass ein Wegfallen des obigen Kausalgesetzes die gesamte Erkenntnisgewinnung dieser Wissenschaften untergraben würde. Würden nämlich gleiche Ursachen zu völlig unterschiedlichen Wirkungen führen, so wären Vergleichsexperimente unmöglich beziehungsweise ohne Aussage und Ergebnisreproduktionen wären rein zufällig. Mehr noch müsste man den Gedanken fallenlassen, dass man durch gezielte Veränderungen der Ursache und die sich daraus ergebende Veränderung der Wirkung irgendeinen Aufschluss über den zugrunde liegenden Prozess bzw. die verantwortliche Dynamik erlangen könnte. Insgesamt scheint es nur schwer vorstellbar, wie die Naturwissenschaft in einer solchen Welt – ihrer Waffen beraubt – bestehen könnte. Noch schwerer fällt die Vorstellung, verkehrt man den zweiten Grundsatz des obigen Kausalitätsprinzips. Eine Welt, in der die Wirkung der Ursache vorauseilt, ist kaum vorstellbar. Würde man beispielsweise als Kind an Lungenkrebs erkranken, weil man mit 20 Jahren anfängt zu rauchen? Und wenn ja, wer würde den erkrankten Zwanzigjährigen dazu zwingen, mit dem Rauchen anzufangen? Vermutlich sind solche Gedankenspiele aber von Anfang an zum Scheitern verurteilt, da die Ceteris-paribus-Klausel hier wohl zutiefst verletzt ist und die Welt wohl eine völlig andere wäre.

Glücklicherweise scheint es aber auch nicht notwendig über eine solche Welt nachzudenken, denn auch wenn man das Prinzip der Kausalität, wie Hume meint, nicht beweisen kann, so schreiten die Naturwissenschaften – unter der stillschweigenden Gültigkeitsannahme eben dieses Prinzips – immer weiter erfolgreich voran. Es scheint also, als sei die Gültigkeitsannahme des Kausalitätsgesetzes, wenn schon nicht beweisbar, so doch zumindest sehr erfolgreich. Nimmt man dessen Gültigkeit nun an, so gilt es allerdings auch, alle Implikationen dieser Prämisse zu akzeptieren. Dass diese keineswegs immer offensichtlich sind, schildert R. Hagedorn in seinem sehr schönen Aufsatz mit dem Titel „Causality and Dispersion Relations“ [Hag66].

D. Schallus, *Kausalität, Analytizität und Dispersionsrelationen*, BestMasters,
DOI 10.1007/978-3-658-13201-9_1

Hagedorn beschreibt dort ein Dialog zwischen einem Erfinder und einem Physiker. Ersterer hat die findige Idee, eine Brille zu entwerfen, welche es dem Träger ermöglicht, bei Dunkelheit zu sehen. Er hat auch schon einen Plan, wie seine – sicherlich gewinnbringende – Erfindung genau funktionieren soll. Seine Brille soll für genau eine Frequenz durchlässig sein und alle anderen absorbieren. Das vermeintlich Geniale dieser Idee erschließt sich, wenn man als Lichtquelle einen diskreten Lichtblitz untersucht. Ein solcher ließe sich mathematisch beispielsweise durch eine Deltadistribution $\delta(t - t_0)$ beschreiben. Betrachtet man diese nun im Frequenzraum, so wird der Lichtblitz durch eine Überlagerung zeitlich unendlich ausgedehnter Sinuswellen dargestellt. Dabei überlagern sich die Sinuswellen derart, dass außerhalb des Zündungszeitpunktes immer destruktive Interferenz stattfindet. Durch die Brille, so der Erfinder, werden jetzt allerdings alle Frequenzen bis auf eine herausgefiltert, sodass keine destruktive Interferenz mehr stattfinden kann. Das Ergebnis: Nachdem man einen dunklen Raum betritt, zündet man kurz einen Lichtblitz und kann von da an im Dunkeln sehen. Die Erfindung klingt ohne Frage genial, vielleicht sogar zu genial, um davon überzeugt zu sein. Denn auch der Erfinder merkt seine Verwunderung darüber an, dass er der Erste ist, der über eine solche Erfindung nachdenkt, und muss zudem eingestehen, dass ihm die Konstruktion einer solchen Brille noch nicht gelungen ist. Aber wo ist der Denkfehler, wieso beschleicht einen das flaue Gefühl eines Paradoxons? Resümiert man die Erläuterungen des Erfinders, so stellt man keine Fehler fest, er hat lediglich eine Sache vergessen. Da keine Überlagerung der Sinuswellen mehr stattfindet, erhellt die Brille den Raum nicht nur <u>nach</u> dem Zünden des Blitzes sondern auch schon <u>vorher</u>. Genau wie in dem obigen Beispiel würde der Träger also sehend den dunklen Raum betreten, wohl wissend, dass er auf fatalistische Weise gezwungen ist, in Kürze einen Lichtblitz zu zünden. Die Brille kann also niemals funktionieren, da sie einem der fundamentalsten Prinzipien der Physik, nämlich dem der Kausalität, widerspricht. So grundsätzlich und niederschmetternd diese Erkenntnis für den Erfinder auch sein mag, so wenig zufriedenstellend ist sie zugleich. In der Tat muss man nicht Mathematiker oder Physiker sein, um diese Antwort als unbefriedigend zu empfinden. Es drängt sich die Frage auf, wie oder wo genau das Kausalitätsprinzip die Konstruktion einer solchen Brille verhindert. Gibt es eine Möglichkeit, einen Blick hinter den einerseits so selbstverständlichen, andererseits so schwer fassbaren Begriff der Kausalität zu werfen? Zur Beantwortung dieser Frage betritt der Physiker die Bühne. Er möchte die Brille als einen „Vermittler“ zwischen einem Input, nämlich dem einlaufenden Licht, und einem Output, dem gefilterten Licht, beschreiben. Die Eigenschaften des Vermittlers sollen dabei möglichst allgemein gehalten werden. Es werden zunächst lediglich zwei Annahmen getroffen: Erstens sollen sich die Übertragungseigenschaften des Vermittlers nicht ändern, es sollte also egal sein, ob man das Experiment heute oder tausend Jahre später durchführt. Formal verbirgt sich darin die Forderung der zeitlichen Translationsinvarianz[1], welche konkret besagt, dass die Physik heute noch genauso sein sollte wie in ferner Zukunft und dass sich – in unserem Fall – die Brille in diesem Zeitraum nicht verändert. Die zweite Einschränkung besagt, dass sich der Prozess kausal verhalten soll, dass also nicht die Wirkung der Ursache vorauseilt. Versucht man diese Aussagen nun in die Sprache der Physik – also die Mathematik – zu übersetzen, so bietet sich zur Vereinfachung noch eine dritte Forderung an. Es wird festgelegt, dass der Zusammenhang zwischen Input und Output linear sei. Mit Hilfe dieser Vereinbarungen lässt sich die Verbindung zwischen Input $f(t) = \delta(t - t_0)$, Vermittler $g(t)$ und Output $x(t)$ als Faltung zunächst folgendermaßen beschreiben:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t')\delta(t' - t_0)\mathrm{d}t',$$

wobei g aufgrund der Zeittranslationsinvarianz nur von der Differenz $t - t'$ abhängt. Berücksichtigt man zudem die Kausalitätsbedingung $x(t) = 0$ für $t < t_0$, so hat dies auch Auswirkungen auf die Übertragungsfunktion $g(t)$. Es ergibt sich nämlich

$$0 \equiv x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - t')\delta(t' - t_0)\mathrm{d}t' = g(t - t_0) \quad (t < t_0).$$

Demnach muss $g(t) \equiv 0$ für $t < 0$ gelten, die Übertragungsfunktion für negative Werte also verschwinden. Es ist dem Physiker folglich gelungen, den Vorgang mathematisch zu beschreiben und dabei auf eine Bedingung für die Übertragungsfunktion zu stoßen. Doch was ist damit gewonnen, inwieweit lässt uns dies hinter den Vorhang der Kausalität blicken? Es ist die Mathematik in Form des Titchmarsh'schen Theorems [Tit48], die ihre volle Eleganz aufblitzen lässt und den Vorhang somit etwas anhebt. Titchmarsh konnte nämlich zeigen, dass der Real- und Imaginärteil einer Funktion G, deren Fourier-Transformierte g für negative Werte verschwindet, unter bestimmten Bedingungen in Form einer Hilbert-Transformation miteinander verknüpft sind. Im Rahmen der Physik waren es Kramers und Kronig, die als Erste diesen als Dispersionsrelationen bezeichneten Zusammenhang zwischen dem Brechungsindex und dem Absorptionskoeffizienten herstellten [Kra27, Kro26]. Es ist eben genau dieser Zusammenhang, der dem Erfinder zum Verhängnis wird. Zwar kann dieser eine Brille entwerfen, die bestimmte Frequenzen herausfiltert, also den Absorptionskoeffizienten modifiziert. Allerdings kann er dies nicht tun, ohne gleichzeitig den Brechungsindex zu verändern. Das Prinzip der Kausalität „sorgt dafür", dass

[1] Betrachtet man das obige Zitat Humes, so könnte man seine Aussagen sicherlich auch auf das Prinzip der Zeittranslationsinvarianz beziehen.

sich der Brechungsindex genau in der Weise ändert bzw. der Input genau die Phasenverschiebung erfährt, dass sich die Wellen zu früheren Zeiten auslöschen und keine Wirkung der Ursache vorauseilt. Dies mag unglaublich klingen, wie aber zu Beginn erläutert wurde, wäre der wirklich unglaubliche Fall derjenige, in dem es sich anders verhält. Es ist das Titchmarsh'sche Theorem, welches diesen Zusammenhang zwischen dem Offensichtlichen einerseits und dem schwer Vorstellbaren andererseits liefert.

Im Rahmen der vorliegenden Masterarbeit soll der hier nur angeschnittene Zusammenhang zwischen Kausalität und Dispersionsrelationen sowohl mathematisch fundiert als auch ausführlich und verständlich dargelegt werden. Um die oben angesprochene Verbindung auf ein solides Fundament zu stützen, soll zunächst das Titchmarsh'sche Theorem bewiesen werden (Kap. 3). Das Theorem ergänzt die Beziehung zwischen Kausalität und Dispersionsrelationen um den Begriff der Analytizität und komplettiert somit die namensgebende Trias dieser Arbeit. Die Beweisführung beschränkt sich dabei nicht auf das Zitieren der bereits veröffentlichten Ideen Titchmarshs [Tit48]. Neben dem rein fachlichen Anspruch besteht eine beachtliche Herausforderung des Beweises darin, das relevante Theorem aus Titchmarshs umfassendem Werk zu isolieren. Der gewünschte Satz, namentlich Theorem 95, stellt innerhalb des besagten Buches nämlich nur eines von mehr als 100 Theoremen dar. Insofern ist es nicht verwunderlich, dass Titchmarsh häufig Bezug auf andere Theoreme nimmt. Die Aufgabe des Autors besteht nun zum einen darin, einen kompakten, dem Umfang einer Masterarbeit angemessenen Beweis zu liefern, ohne dabei wesentliche Teile desselbigen zu unterschlagen. Zum anderen müssen die Ausführungen Titchmarshs neu strukturiert, um Zwischenschritte ergänzt und um hilfreiche Erläuterungen erweitert werden. Nur so bleibt die Ausführung verständlich und wird einer breiten Leserschaft zugänglich. Um diese anspruchsvolle Aufgabe zu bewältigen, werden dem genannten Kapitel einige mathematische Erläuterungen vorangestellt (Kap. 2). Diese umfassen insbesondere wichtige Sätze der Funktionentheorie sowie Aussagen über sogenannte Hardy-Räume.

Nachdem diese mathematischen Grundlagen bereitgestellt wurden und der Zusammenhang zwischen Kausalität, Analytizität und Hilbert-Transformierter im Sinne des Titch-marsh'schen Theorems dargelegt wurde, gilt es im Folgenden, diese Verbindung mit Hilfe wichtiger physikalischer Beispiele zu verdeutlichen. Die dazu behandelten Themen erstrecken sich hierbei über weite Bereiche der Physik. Als Paradebeispiel dient der gedämpfte harmonische Oszillator (Kap. 4). Dieser verdeutlicht auf sehr einfache Art und Weise den Zusammenhang der angesprochenen Trias. Eben dieses Modell liegt auch dem daran anschließend untersuchten Lorentz-Oszillator zugrunde (Abschn. 5.1). Dieser liefert eine erste Beschreibung der elektrischen Permittivität einer Substanz. Anknüpfend daran wird der Zusammenhang zwischen Absorption und Dispersion im Rahmen der Kramers-Kronig-Relationen untersucht. Diese fügen sich perfekt in die beschrie-