BestMasters

Eva Maria Hickmann

Differentialgleichungen als zentraler Bestandteil der theoretischen Physik

Harmonischer Oszillator, Wellengleichung und Korteweg-de-Vries-Gleichung

Springer Spektrum

BestMasters

Mit **„BestMasters“** zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften. Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Springer awards **"BestMasters"** to the best master's theses which have been completed at renowned Universities in Germany, Austria, and Switzerland. The studies received highest marks and were recommended for publication by supervisors. They address current issues from various fields of research in natural sciences, psychology, technology, and economics. The series addresses practitioners as well as scientists and, in particular, offers guidance for early stage researchers.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/13198

Eva Maria Hickmann

Differentialgleichungen als zentraler Bestandteil der theoretischen Physik

Harmonischer Oszillator, Wellengleichung und Korteweg-de-Vries-Gleichung

Springer Spektrum

Eva Maria Hickmann
Fachbereich 08 – Institut für Kernphysik
Johannes Gutenberg-Universität
Mainz, Deutschland

ISSN 2625-3577 ISSN 2625-3615 (electronic)
BestMasters
ISBN 978-3-658-29897-5 ISBN 978-3-658-29898-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-29898-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denjenigen bedanken, die mich während meines Studiums und ganz besonderes bei der Anfertigung dieser Masterarbeit unterstützt haben.

Beginnen möchte ich mit einem großen Dankeschön an den Betreuer meiner Masterarbeit, Herrn Prof. Dr. Stefan Scherer, der von Anfang an meine Begeisterung für die Arbeit mit Differentialgleichungen teilte. In zahlreichen Gesprächen nahm er sich Zeit, um mit mir über meine Arbeit zu sprechen. Dabei waren seine geduldigen Erklärungen, durch die ich sehr viel gelernt habe, und die vielen Anregungen besonders wertvoll für mich.

Außerdem möchte ich mich bei meinem Freund Simon Gütthoff für die moralische Unterstützung im Zeitraum der Masterarbeit aber auch während meines gesamten Studiums bedanken. Er zeigte immer Verständnis, wenn ich vor Problemen stand, und schaffte es, mich immer wieder zu motivieren. Darüber hinaus war er immer mein erster Ansprechpartner bei Problemen mit Latex.

Für das Korrekturlesen meiner Arbeit möchte ich mich bei meiner Mutter Margret Hickmann bedanken. Darüber hinaus hat sie mich gemeinsam mit meinem Vater Alfred Hickmann im Verlauf meines gesamten Studiums vertrauensvoll unterstützt. Auch ohne den familiären Rückhalt über meine Eltern hinaus durch meine Geschwister Regina Braun und Stefan Hickmann mit ihren Familien wäre mein Studium vermutlich nicht so erfolgreich gewesen. Dafür danke ich euch sehr.

Zuletzt danke ich allen Kommilitoninnen und Kommilitonen für die schöne Zeit und das gemeinsame Lernen. An dieser Stelle sei meinem Cousin Matthias Liesenfeld besonders gedankt für seine Zeit und Geduld, mir einige Details der Mathematik zu erklären.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Einleitung

Wie der Titel verrät, beschäftigt sich diese Arbeit mit Differentialgleichungen in der Physik. Genauer gesagt werden beispielhaft die drei Differentialgleichungen Schwingungsgleichung, Wellengleichung und Korteweg-de-Vries-Gleichung diskutiert und anhand dieser Beispiele allgemeine Methoden und Herangehensweisen zur Lösung von Differentialgleichungen herausgearbeitet.

Es stellt sich die Frage, wieso wir uns überhaupt mit Differentialgleichungen und deren Lösungsmethoden in einer physikalischen Arbeit beschäftigen. Diese Frage beantwortet sich jedoch sehr schnell, wenn wir die eigentliche Aufgabe der Naturwissenschaft Physik betrachten, welche darin besteht, Gesetzmäßigkeiten zu finden, die die Natur beschreiben. Dabei sind die zeitlich und örtlich veränderlichen Zustände der Natur viel interessanter als die zeitlich und örtlich konstanten.

Schließlich ist beispielsweise die Bewegung eines großen Steins unter der Annahme, dass keine extremen Unwetter auftreten und kein Mensch oder Tier den Stein wegbewegt, schnell beschrieben, denn dieser Stein befindet sich für alle Zeiten an einem festen Ort $\vec{x}'$. Wir können also den Ort des Steins in Abhängigkeit von der Zeit t mit $\vec{x}(t) = \vec{x}' = konstant$ angeben.

Betrachten wir aber alternativ ein Blatt, das auf einem Fluss treibt, und nehmen wieder an, dass keine Umweltfaktoren das Blatt von der Oberfläche des Flusses entfernen, so benötigen wir zur Beschreibung der Bewegung eine viel kompliziertere Gleichung. Zwar können wir annehmen, dass sich das Blatt mit der gleichen Geschwindigkeit wie das Wasser im Fluss bewegt, allerdings ist diese Geschwindigkeit abhängig von verschiedenen Faktoren wie zum Beispiel der Wasserhöhe oder der Flussbreite. Das bedeutet, die Fließgeschwindigkeit ist abhängig vom Ort, und dieser ist wiederum abhängig von der Zeit. Wenn alle

E. M. Hickmann, *Differentialgleichungen als zentraler Bestandteil der theoretischen Physik*, BestMasters, https://doi.org/10.1007/978-3-658-29898-2_1

Einflüsse auf die Fließgeschwindigkeit bekannt sind, kann eine Differentialgleichung aufgestellt werden, deren Lösung die Bewegung des Blattes beschreibt.

Wir haben an diesem kleinen Beispiel gesehen, dass wir Differentialgleichungen benötigen, um viele Phänomene, Bewegungen oder Zustände in der Natur zu beschreiben, die sich zeitlich und/oder örtlich verändern. Da diese die wirklich interessanten Fälle sind, bilden Differentialgleichungen einen zentralen Bestandteil der (theoretischen) Physik. Aufgrund ihrer großen Bedeutung schauen wir uns im Hauptteil dieser Arbeit einige Differentialgleichungen an. Vorher gibt es für die Leserinnen und Leser, die mit den benötigten mathematischen Methoden nicht vertraut sind, ein Kapitel, das diese zusammenfasst.

2 Wissenswertes aus der Mathematik

In diesem Kapitel werden verschiedene mathematische Konzepte erläutert, die später bei der Lösung von Differentialgleichungen hilfreich sein werden. Neben der komplexen Integration sowie der Delta-Funktion wird insbesondere die Fourier-Transformation beleuchtet, deren Grundlage die Fourier-Reihen darstellen. Außerdem ist die Kenntnis der Bedeutung von orthogonalen Funktionen wichtig. Aus diesem Grund werden diese nun zuerst kurz behandelt.

2.1 Orthogonale Funktionen

Wir interpretieren im Folgenden den Raum der Funktionen als einen Vektorraum V. Das bedeutet, dass wir uns jede Funktion als einen Vektor im unendlich-dimensionalen Vektorraum vorstellen. Nur so können wir den Begriff der orthogonalen Funktionen definieren.

Damit die Definition der orthogonalen Funktionen mathematisch korrekt gelingt, genügt es nicht, einen beliebigen Vektorraum V zu betrachten. Wir benötigen stattdessen (mindestens) einen Prä-Hilbert-Raum (vgl. Bronstein u. a. (2013)).

Definition 1 (Prä-Hilbert-Raum)**.** *Ein Vektorraum V über dem Körper $\mathbb{K}$ (wir arbeiten im Folgenden mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) heißt Prä-Hilbert-Raum bzw. Raum mit Skalarprodukt, wenn jedem Paar von Elementen $x, y \in V$ eine Zahl $\langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$, das Skalarprodukt von x und y, zugeordnet ist, sodass die folgenden Bedingungen (Axiome des Skalarprodukts) gelten:*

E. M. Hickmann, *Differentialgleichungen als zentraler Bestandteil der theoretischen Physik*, BestMasters, https://doi.org/10.1007/978-3-658-29898-2_2

H1 $\langle x, x \rangle \geq 0$, *insbesondere* $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ *und* $\langle x, x \rangle = 0$ *genau dann, wenn* $x = 0$,

H2 $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$,

H3 $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$,

H4 $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$,

wobei $x, y, z \in V$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *und* v^* *das komplex Konjugierte von* v *ist (vgl. Bronstein u. a. (2013)).*

Da uns der Prä-Hilbert-Raum nur vorübergehend genügt, definieren wir an dieser Stelle schon den Hilbert-Raum, der später in diesem Kapitel eine große Rolle übernehmen wird.

Definition 2 (Hilbert-Raum)**.** *Ein vollständig unitärer Raum mit Skalarprodukt heißt Hilbert-Raum (vgl. Bronstein u. a. (2013)).*
Wir bezeichnen einen Hilbert-Raum als separabel, wenn seine Dimension höchstens abzählbar-unendlich ist (vgl. Wong (1994)).

Dazu ergänzend sei gesagt, dass wir einen normierter Raum unitär nennen, wenn wir in ihm ein Skalarprodukt einführen können, welches durch $\parallel x \parallel = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ mit der Norm verknüpft ist (vgl. Bronstein u. a. (2013)). Weiter bedeutet nach Rudin (1999) vollständig, dass jede Cauchyfolge in diesem Raum gegen ein Element aus diesem Raum konvergiert.

Definition 3 (Orthogonale Elemente)**.** *Sei* V *(mindestens) ein Prä-Hilbert-Raum. Nach Bronstein u. a. (2013) heißen zwei Elemente* $x, y \in V$ *orthogonal, wenn*

$$\langle x, y \rangle = 0. \tag{2.1}$$

Diese Definition ist sehr allgemein für Elemente eines Prä-Hilbert-Raums. Wir benötigen im Folgenden jedoch orthogonale Funktionen. Daher betrachten wir nun Räume im Sinne von Definition 4.

Definition 4 (Raum der quadratintegrierbaren Funktionen)**.** *Als die Menge $L^2[a,b]$ aller auf $I = [a,b]$ quadratintegrierbaren, reellen oder komplexen Funktionen bezeichnen wir die Menge der Funktionen $\{f(x)\}$, die die Gleichung*

$$\int_a^b dx|f(x)|^2 < \infty \tag{2.2}$$

erfüllen (vgl. (Bronstein u. a., 2013)).

Dieser Raum der quadratintegrierbaren Funktionen ist ein Hilbert-Raum, was aus dem folgenden Satz mit Beweis folgt.

Satz 1. *Seien $f, g \in L^2[a,b]$. Dann erfüllt das Skalarprodukt*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b dx f^*(x)g(x) \tag{2.3}$$

die Axiome des Skalarprodukts aus Definition 1. Des Weiteren lässt sich der Raum $L^2[a,b]$ bezüglich dieses Skalarprodukts normieren und ist vollständig. Er ist also ein Hilbert-Raum.