Dietmar Herrmann

Mathematik der Neuzeit

Geschichte der Mathematik in Europa von Vieta bis Euler

Springer Spektrum

Mathematik der Neuzeit

Dietmar Herrmann

Mathematik der Neuzeit

Geschichte der Mathematik in Europa von Vieta bis Euler

Springer Spektrum

Dietmar Herrmann
FH München
Anzing, Bayern, Deutschland

ISBN 978-3-662-65416-3 ISBN 978-3-662-65417-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-65417-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Nikoo Azarm
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Gewidmet meiner lieben Gattin Eva,
mit Dank für ihre Geduld in Zeiten, zu denen ich
wieder zu lange am Computer saß.

Vorwort

> Nach einer ungebrochenen, viele Jahrhunderte überdauernden Tradition wird die Mathematik in unserem Zeitalter der Massenbildung nicht mehr als integraler Teil unserer Kultur angesehen. Die Isolation der forschenden Gelehrten, der bedauernswerte Mangel an inspirierenden Lehrern, die Anzahl der langwierigen und anspruchslosen kommerziellen Lehrbücher und der generelle Erziehungstrend – weg von dieser anspruchsvollen Disziplin – haben viel zu einer gegen die Mathematik gerichteten Mode im Bildungswesen beigetragen. Es ist ein großes Verdienst der Öffentlichkeit, dass das Interesse an der Mathematik dennoch ungebrochen ist.
> (Richard Courant im Vorwort zum Buch *Mathematics in Western Culture* von M. Kline, 1953).

Dieses Buch ist der vierte Teil einer Buchreihe zur Geschichte der Mathematik. Thema ist die Mathematik der Neuzeit in Europa, also einer Epoche der Glaubenskriege, Gegenreformation und Aufklärung.

Der Band ist zunächst ein Lesebuch, das nach einer Kurzbiografie des jeweiligen Mathematikers wichtige und bemerkenswerte Ergebnisse aus dessen Lebenswerk referiert. Für alle Leserinnen und Leser, die sich für die geschichtliche Entwicklung interessieren, wird das soziale und kulturelle Umfeld der Gelehrten durch Bilder und zahlreiche Zitate ausführlich geschildert. An vielen Stellen wird auch auf literarische Bezüge eingegangen.

Die Auswahl aus den mathematischen Werken beansprucht nicht, *repräsentativ* zu sein, dennoch vermitteln auch exemplarische Beispiele Einblicke in die mathematische Gedankenwelt des 16. und 17. Jahrhunderts. Bei der Besprechung der Anfänge der Algebra erfolgt ein Rückblick in die Zeit der Renaissance, ebenso bei der Erfindung der Perspektive. Der im Buch erfasste Zeitraum geht bis zum Tod Eulers (1783). Es enthält zahlreiche Hinweise und Vorgehensweisen, die zur Eigenbeschäftigung anregen.

Aber das Buch ist mehr: Es bietet eine Bestandsaufnahme der erreichten Resultate in Geometrie, Algebra, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zahlentheorie und Rechentechnik bis Eulers Tod. Dies erleichtert die Suche nach geeigneten Themen für Unterricht, Vorlesung und Seminare.

Vieles, was hier zur Darstellung kommt, ist mathematisches Allgemeingut. Dennoch werden hier einige Zusammenhänge offengelegt, die bisher wenig oder gar nicht beachtet wurden, und so vielleicht neue Einsichten erzeugt und Erinnerungen an frühere Vorlesungen geweckt. Der Text ist weitgehend elementar gehalten und durch zahlreiche Beispiele erläutert; bei der Behandlung von Ableitungen und Integralen sind Grundkenntnisse aus einführenden Vorlesungen in Höherer Mathematik nützlich.

Das Buch ist ein mathematisch orientiertes Geschichtsbuch; es kann *nicht* bei der Vielzahl der angesprochenen Themen, wie ein modernes Lehrbuch, umfassende Definitionen oder Regeln aufstellen. Die Darstellung ist *historisch*, so wird das Rechnen mit Reihen ohne die heute obligatorischen Konvergenzbetrachtungen und Restgliedabschätzungen vorgeführt.

Um das Lesen der Texte zu erleichtern, wird die moderne mathematische Schreibweise gewählt; an einigen Stellen wird auch auf die historischen Schreibweisen eingegangen. Die Kapitel des Buchs über Einzelpersonen sind chronologisch nach dem Geburtsjahr angeordnet. Die anderen Sachthemen wie die „Erfindung der Perspektive“, „Rechenhilfsmittel“ usw. sind problemgeschichtlich dargestellt, dabei wird ein Mittelweg eingeschlagen zwischen bloßer Faktenvermittlung und akribischer Darstellung aller Einzelheiten.

Der Autor wünscht allen Leserinnen und Lesern eine anregende Lektüre!

München

Dietmar Herrmann

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Einleitung

1

We all know that the triumph for a historian of science is to prove that nobody ever discovered anything (Jacquard Hadamard, Newton Tercentenary Celebration Royal Society, Juli 1946).

Wenn mich ein neues Buch erreicht, dann suche ich, was ich daraus lernen kann, und nicht, was ich daran kritisieren kann (G. W. Leibniz).

Pro captu lectoris habent sua fata libelli (Terentianus Maurus, um 200 n. Chr.).

Igitur eme, lege, fruere (Also kaufe, lies und erfreue dich!) (Kopernikus, Vorwort De Revolutionibus 1543).

Es gibt Leute, die wollen, dass ein Schriftsteller nie von Dingen rede, über die schon andere gesprochen haben; sonst klagt man ihn an, nichts Neues zu sagen. Auch wenn auch die Gegenstände, die er behandelt, nicht neu sind, so ist doch die Anordnung neu. Wenn man Ball spielt, so ist es derselbe Ball, mit welchem der eine wie der andere spielt, aber der eine schlägt ihn besser als der andre (Pascal, Pensées 696).

1.1 Wozu dient die Geschichte der Mathematik?

Die Geschichte der Mathematik kann unter mehrfachen Gesichtspunkten betrachtet werden:

Man möchte die Entstehungsgeschichte unserer heutigen Mathematik kennenlernen und erfahren, zu welcher Zeit und auf welche Weise gewisse mathematische Teildisziplinen entstanden sind. Besonders interessant ist zu wissen, wie, wann und durch wen berühmte mathematische Sätze geprägt bzw. bewiesen wurden.

Neben der chronologischen Geschichte von mathematischen Sachverhalten will man sich über die Entwicklung, Zusammenhänge, Entfaltung und Wechselwirkung der zugrunde liegenden Ideen informieren, wobei wichtige, sich ausbreitende Ideen sach- und problemgeschichtlich dargestellt werden sollen.

D. Herrmann, *Mathematik der Neuzeit,* https://doi.org/10.1007/978-3-662-65417-0_1

> Wissenswert ist es auch, etwas über die soziokulturellen Hintergründe der Wissenschaftler zu erfahren, wie ihr Leben und Wirken durch Zeitumstände, Reisen, Kontakte, kriegerische Auseinandersetzungen und religiöse Normen beeinflusst wurden.

Anzumerken ist, dass die Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik keinesfalls reiner Selbstzweck ist, denn oft erlangt man das Verständnis von einzelnen Sachverhalten am besten dadurch, dass man die historische Entwicklung studiert. *Last not least* dürfte gerade die Mathematikgeschichte dazu geeignet sein, die – immer stärker zu zerfallen drohende – Einheit der Mathematik aufzuzeigen.

1.2 Zum Inhalt des Buchs

Kap. 2 berichtet über die Weiterentwicklung der Algebra, die im Band *Mathematik des Mittelalters* bis zur Entdeckung der Formeln von Cardano geschildert wurde. Sehr ausführlich wird die Geschichte des komplexen Rechnens bis Gauß dargestellt. Spezielle Probleme bei Bombelli und Vieta finden sich in den Abschn. 2.2 und 2.3. Auf die großartigen Entdeckungen Eulers im Komplexen wird separat im Abschn. 14.1 eingegangen. Abschn. 2.4 zeigt den Stand der Algebra bei Thomas Harriot, dessen Werk später von John Wallis fortgesetzt wird.

Kap. 3 schildert die Erfindung der Perspektive und geht damit auf die Zeit der frühen Renaissance zurück. Aus Umfangsgründen können nur einige wichtige italienische Künstler besprochen werden, wie Leon Battista Alberti (Abschn. 3.2) und Piero de della Francesca (Abschn. 3.3). Die Künstler nördlich der Alpen werden durch Albrecht Dürer (Abschn. 3.4) und Jan Vredemann de Vries (Abschn. 3.5) vertreten. Ganz neu ist das Erscheinen einer neuen Art der Geometrie bei Girard Desargues (Abschn. 3.6), die zum Vorläufer der projektiven Geometrie wird. Sie überwindet die Geometrie nach Euklid, benötigt keine metrischen Maße wie Länge, Fläche usw. und findet alle Eigenschaften von Kegelschnitten durch Projektionen des Kreises.

Kap. 4 zeigt die Entwicklung der Rechenhilfsmittel. Neben der frühen Form der *Prosthaphaeresis* (Rechnen mittels trigonometrischen Umformungen) in Abschn. 4.2 ist hier insbesondere der Bau der ersten Rechenmaschinen durch Pascal, Schickard und Leibniz (Abschn. 4.3) zu nennen. Hand in Hand mit der Berechnung der Logarithmen (Abschn. 4.4) durch Bürgi, Napier und Briggs geht die technische Realisierung in Form der Rechenstäbe bzw. -schieber (Abschn. 4.3); hier werden die Produkte von Napier und Gunter vorgestellt.

Kap. 5 legt die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar. Während in der Antike der Zufall als das Wirken einer höheren Macht angesehen wird, beginnt man in der Renaissance Häufigkeiten beim Würfeln mit kombinatorischen Mitteln zu erfassen (Abschn. 5.1). Der Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann auf den Tag datiert werden, an dem Fermat diesbezüglich den ersten Brief an Pascal schrieb. Das genaue Datum ist nicht bekannt, Pascal antwortete am 24. August 1654. Pascals Briefe wurden angeregt durch die Fragen eines professionellen Spielers de Méré (Abschn. 5.2). Mit Begeisterung nehmen Jakob und später Daniel Bernoulli die neuen Ideen auf und entwerfen eigene Theorien (Abschn. 5.3). Weiterführende Aufgaben von Huygens und Euler finden sich in den Abschn. 5.4 bzw. 5.5.

Kap. 6 erzählt das Leben und Werk von Pierre de Fermat. Seine ersten Ansätze zur Infinitesimalrechnung bleiben in der Literatur oft unerwähnt. Bedeutsam sind seine Methoden zur Bestimmung von Extremwerten (Abschn. 6.2) und Tangenten (Abschn. 6.4), da durch sie die weitere Entwicklung gefördert wird. Neuartig war auch seine Integration durch nicht äquidistante Intervalleinteilungen (Abschn. 6.3). Bekannt geworden ist Fermat vor allem als Begründer der Zahlentheorie (Abschn. 6.5); seine Beschäftigung mit der Zahlentheorie wurde angeregt durch die Lektüre der Diophantos-Übersetzung von B. de Frénicle (de Bessy). Fermat sprach zahllose Vermutungen aus, von denen viele erst Euler beweisen konnte. Seine berühmteste Vermutung, *Großer Satz von Fermat* genannt, wurde erst 358 Jahre später von A. Wiles gelöst.

Kap. 7 informiert über das bewegte Leben des René Descartes. Der berühmte Philosoph („cogito, ergo sum") verfasste zu seinem Werk *Discours de la Méthode* einen mathematischen Anhang *Géométrie*, der die analytische Geometrie begründete (Abschn. 7.1 und 7.3). Abschn. 7.2 erklärt seine Methode zum Auffinden von Tangenten. Bedeutend war die Weiterentwicklung der Descartes'schen Methoden durch die Niederländer Johann Hudde und Jan de Witt nach Vorarbeiten von Frans van Schooten (Abschn. 7.4).

Kap. 8 referiert das Leben des Philosophen und Theologen Blaise Pascal. Er hatte drei Phasen seines Lebens, in denen er sich mathematisch betätigte. In der ersten Phase in jungen Jahren beschäftigte er sich mit Kegelschnitten, in seiner Pariser Zeit mit Kombinatorik (u. a. mit dem Pascalschen Dreieck) (Abschn. 8.1 bis 8.3). Später nahm er Anteil an der Diskussion über höhere Kurven, wobei er (unter einem Pseudonym) einen Wettbewerb über die Zykloide ausschrieb.

Kap. 9 sammelt die mathematischen Beiträge der wichtigsten Mathematiker, die bei der Entwicklung der Infinitesimalrechnung mitgewirkt haben. Nach Kepler (Abschn. 9.1) ging das Konzept der Indivisibeln auf die italienische Schule über, hier sind zu nennen: Calvalieri (Abschn. 9.2), Torricelli (Abschn. 9.3) und Mengoli (Abschn. 9.7). Über Mersenne wurden Kontakte zu Frankreich geknüpft: Roberval (Abschn. 9.4) und de Moivre (Abschn. 9.10); Letzterer ist mehr für seine Beiträge zur Wahrscheinlichkeit bekannt geworden. Gregory (Abschn. 9.9), der längere Zeit in Italien gelebt hat, bildet mit Wallis (Abschn. 9.5) und Neile (Abschn. 9.8) die englische Schule. Mercator (Abschn. 9.6) lebte lange Zeit in den Niederlanden und starb in Paris. Am Ende der Reihe steht hier L'Hôpital (Abschn. 9.11), der ein Student bei Johann Bernoulli war.

Kap. 10 bringt dem Lesenden die Geschichte der Familie Bernoulli nahe. Nach den Kurzbiografien von Johann, Jakob und Daniel Bernoulli (Abschn. 10.1 bis 10.3) werden ihre mathematischen Beiträge zur Reihenlehre (Abschn. 10.4, 10.5, 10.7, 10.9) diskutiert. Wesentliche Impulse gingen von ihnen für die Diskussion von höheren Kurven aus (Abschn. 10.6, 10.10); sie begründeten damit die Differenzialgeometrie. Zusammen mit Leibniz schufen sie die Grundlagen der Integrationstheorie; hieraus entwickelten sie wichtige Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen (Abschn. 10.11 bis Abschn. 10.14).

Kap. 11 behandelt das Lebenswerk von Christian Huygens. Aus seiner Biografie (Abschn. 11.1) wird ersichtlich, dass Huygens mehr ein „angewandter" Mathematiker und Physiker war. Aus seinen Studien zur Zykloide und ihren Evoluten (Abschn. 11.4) entsprang seine Idee zum Bau einer idealen Pendeluhr. Bemerkenswert sind auch seine Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, die er unabhängig von Fermat und Pascal verfasste; auch hier war er an Anwendungen interessiert (Abschn. 11.3). Im Kontakt mit niederländischen Mathematikern entstanden Arbeiten zur Analysis (Abschn. 11.2). Sein „bedeutendster" Beitrag zur Mathematik war wohl der Unterricht, den er dem gelernten Juristen Leibniz in Paris gab.

Kap. 12 ist dem Wirken von Isaac Newton gewidmet. Ausführlich wird sein Leben (Abschn. 12.2) und sein wissenschaftliches Umfeld (Abschn. 12.1) geschildert; aus diesem Umfeld entstand die *Royal Society*, die „Hausmacht" Newtons. Auch Newton beschäftigte sich nur abschnittsweise mit Mathematik, hauptsächlich aber mit Alchemie und Theologie. Sein erster großer Wurf war die Verallgemeinerung der binomischen Reihe auf gebrochene und negative Exponenten (Abschn. 12.5). Der Erfolg regte weitere Studien zur Reihenlehre an (Abschn. 12.6 und 12.7). Mithilfe der Vorarbeiten von Barrow und Wallis entwickelte er seine Theorie der „Fluxionen" (Abschn. 12.10), die aber erst nach dem Kontakt mit Leibniz publiziert wurden. Dies führte zu dem berühmten Prioritätsstreit (Abschn. 12.3). Bekannt sind auch die Newton'schen Interpolationsformeln, die auf Vorarbeiten von Gregory und Collins beruhen. Auch die sog. Newton-Iteration stammt in der heute angewandten Form nicht von ihm (Abschn. 12.9). Weitere Einsichten in die Algebra vermittelt der Abschn. 12.8. Seine Popularität in England zeigte sich in seinem Nachleben, das in Abschn. 12.11 geschildert wird. Aus Umfangsgründen wird auf die Kontroverse mit Bischof Berkeley über die Grundlagen der „Fluxionen"-Rechnung nicht eingegangen.

Kap. 13 macht mit dem Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz bekannt. Auch er war stolz auf seinen Anfangserfolg, der Herleitung der nach ihm benannten Reihe (13.1). Weitere Entdeckungen führen ihn zum Konzept der Determinante (Abschn. 13.2) und zum Dualsystem (Abschn. 13.3). Das in der Literatur mehrfach vorkommende sog. „charakteristische" Dreieck lieferte ihm die Idee der Differenziale (Abschn. 13.5), aus der sich das Konzept des Leibniz' schen Kalküls entwickelte. Ihre Anwendungen sind zahlreich und werden in den Abschn. 13.6 bis 13.15 beschrieben.

Das letzte **Kap.** 14 stellt einen zentralen Punkt des Buches dar, das Schaffen Leonhard Eulers. Genialisch erweitert er das Konzept der komplexen Zahlen auf trigonometrische Funktionen, was zur berühmten Euler'schen Identität führt (Abschn. 14.1 und 14.2). Virtuos handhabt er das Rechnen mit Reihen (Abschn. 14.8–14.9), wobei einige kuriose Ergebnisse entstehen; strenge Regeln zur Konvergenzbestimmung sind noch einzuführen. In seiner Algebra und Zahlentheorie benützt er höhere Methoden (Abschn. 14.4 und 14.6). Diese sind das Verwenden von Kettenbrüchen und das Rechnen in Zahlbereichen, wie $(a + b\sqrt{-2})$. Völlig neue Fachgebiete entstehen durch Eulers Ideen zur Kombinatorik und Graphentheorie (Abschn. 14.5 und 14.7). Seine Erkennt-

Abb.1.1 Die Errungenschaften des 17. Jahrhunderts. (Modifiziert vom Autor; nach Erwin Stein: Gottfried Wilhelm Leibniz seiner Zeit weit voraus als Philosoph, Mathematiker, Physiker, Techniker, 2005, S. 142)

nisse zur Zeta- und Gamma-Funktion (Abschn. 14.10–14.11) beschäftigen noch die nächste Generation von Mathematikern, insbesondere seine Theorie der Elliptischen Funktionen. Auch seine Variationsrechnung und die Beiträge zu gewöhnlichen und partiellen Differenzialgleichungen eröffneten völlig neue mathematische Gebiete. Differenzialgleichungen löste Euler auch numerisch mit dem Euler'schen Polygonzugverfahren (Abschn. 14.14). Euler stieß auch auf Fourier-Reihen, deren Schranken im Definitionsbereich er aber nicht erkannte (Abschn. 14.13).

1.3 Das 17. Jahrhundert, die Wiege der Neuzeit

1.3.1 Die allgemeine politische Lage

Die vom Autor modifizierte Grafik (Abb. 1.1) nach einem Entwurf von Prof. Erwin Stein[1] zeigt die wichtigsten Umbrüche in den Wissenschaften des 17. Jahrhunderts; manche Autoren sprechen hier von einer wissenschaftlichen Revolution, im Rang etwa der „kopernikanischen Wende".

[1] Stein E., Heinekamp A. (Hrsg.): G.W. Leibniz – Das Wirken des großen Philosophen und Universalgelehrten als Mathematiker, Physiker, Techniker. G.-W.-Leibniz-Gesellschaft, Hannover 1990

Die *Accademia del Cimento* in Florenz, 1657 gegründet, wurde aber bald auf Betreiben der katholischen Kirche aufgelöst. Wie man an diesem Beispiel sieht, wurde die Deutungshoheit des wissenschaftlichen Weltbilds (wie schon im Mittelalter) von der Kirche beansprucht. Giordano Bruno wurde 1600 auf dem Scheiterhaufen verbrannt, da er behauptete „es gebe unzählig viele Welten wie die Erde". Als Galilei 1632 entgegen kirchlicher Anweisung den „Dialog über die zwei wichtigsten Weltsysteme" veröffentlichte, schlug die Kirche zurück. Alle Schriften Galileis wurden verboten, in einem Prozess zwang ihn die Inquisition 1633 in Rom zum Widerruf. Er starb 1642 im Gewahrsam der Inquisition. Die Verweigerung des kirchlichen *Imprimatur* (lat. es werde gedruckt) machte vielen Wissenschaftlern Probleme bei Veröffentlichungen. Ohne die kirchliche Bewilligung (*nihil obstat*) musste der Erstdruck von Kopernikus *De Revolutionibus Orbium Coelestium* 1543 in Nürnberg erfolgen. Nur in einer freien Reichsstadt war ein solches Projekt möglich.

Im Jahr 1618 lösten eskalierende Meinungsverschiedenheiten zwischen den evangelischen böhmischen Ständen und dem katholischen Kaiser in Prag einen Bürgerkrieg aus, der sich im Folgenden zum Dreißigjährigen Krieg auf das gesamte Reich ausweitete. Dabei ging es nicht nur um den religiösen Gegensatz von evangelischer Union und katholischer Liga, sondern auch um die Ausweitung kaiserlicher Macht über die Reichsstände. Im Laufe des Krieges mischten sich zunehmend reichsfremde Mächte, vor allem Schweden, Frankreich und Spanien in den Konflikt ein. Der Westfälische Friede setzte dem grausamen Krieg im Jahr 1648 ein Ende. Damit wurde zum einen ein Grundkonsens im Hl. Römischen Reich bis zu seinem Ende 1806 geschaffen, zum anderen ein Religionsfrieden geschaffen; d. h., auf Reichsebene wurden allen Religionen gleiche Rechte zugestanden.

In Europa herrschte jedoch kein Religionsfrieden.

England: Mit ihrem absoluten Machtanspruch geriet das katholische Haus Stuart in Konflikt mit dem englischen *Parliament*, das die Herrscher zur Bewilligung ihrer Finanzen benötigten. Das Ansinnen spaltete das Parlament in zwei Fraktionen. Die Auseinandersetzung eskalierte zum Bürgerkrieg, den die Königsgegner gewannen, mit dem Ergebnis, dass König Charles I. im Jahr 1649 hingerichtet wurde. Der Streit im anglikanisch-puritanischen Lager führte zur Gewaltherrschaft des Lordprotektors Oliver Cromwell. Nach dessen Tod (1660) wurden die Stuarts wieder auf den englischen Thron geholt. Um 1680 kam es erneut zum Streit mit dem Parlament, da das Königshaus den katholischen Klerus als Verbündeten betrachtete. Nach dem Einmarsch seines niederländischen Schwiegersohnes Wilhelm von Oranien in England (1688) musste sich der zunächst geflohene Jakob II. Wilhelm seine Inthronisation mit weitreichenden Zugeständnissen sichern. Die *Glorious Revolution* gewährte dem *Unterhaus* einen großen Teil der Regierungsgewalt – entgegen dem europäischen Trend.

Frankreich: Im Dauerkonflikt mit den Habsburgern versuchte die französische Krone zunächst, die Vormachtstellung in Europa durch Diplomatie und Unterstützung fremder Kriegsparteien zu erlangen. Ab den 30er-Jahren stellte Frankreich unter Ludwig XIII.

eigene Armeen auf, um in Konfliktfällen Teile des Hl. Römischen Reiches zu annektieren. Mit dem Antritt des Sonnenkönigs (1643) wurde die Staatsmacht gestärkt, die katholischen Kardinäle (insbesondere Richelieu) beschnitten zunehmend die Rechte der Bürger. 1614 wurde ihre Versammlung, die Generalstände, zum letzten Mal einberufen und die Adelsopposition, wie die Hugenotten und die Anführer der Fronde, wurde politisch entmachtet oder getötet. Die Eroberung von La Rochelle 1628 beendete das Leben der Hugenotten in Frankreich. Ähnlich erging es den Anhängern des Jansenismus. Die französische Expansion wurde erst 1697 mit dem Frieden von Rijswijk (nach dem Ende des Pfälzischen Erbfolgekriegs) gestoppt. Die Ruinen des Heidelberger Schlosses erinnern noch an die Zerstörung Heidelbergs 1689 durch die Truppen Ludwig XIV.

Niederlande: Ende des 16. Jahrhunderts kam es zum Aufstand gegen die Habsburger. Ein gemeinsames Vorgehen aller Provinzen gegen die Spanier gelang nicht. Die südlichen Provinzen vereinigten sich 1579 und schlossen Frieden mit dem habsburgischen König Philipp II, wurden aber 1585 von spanischen Truppen besetzt. Die nördlichen Provinzen schlossen sich im Unionsvertrag von Utrecht zusammen und kämpften unter Führung eines Statthalters aus dem Hause Oranien-Nassau gegen Spanien. Die rigorose Verfolgung Andersgläubiger durch die Spanier führte zur Auswanderung der Hugenotten. Erst der Westfälische Frieden von 1648 brachte die völkerkundliche Anerkennung der Nordprovinzen. Der wirtschaftliche Erfolg der Niederländer führte zu mehreren Kriegen um die Vorherrschaft im Welthandel mit England. Der Frieden von Breda (1667), der federführend von Johan de Witt ausgehandelt wurde, beendete die Auseinandersetzung mit England, man einigte sich auf eine Abgrenzung ihrer Kolonial- und Handelsinteressen.

Sektiererische Abspaltungen von den großen Hauptkirchen entstanden überall. In Europa blieb das Verhältnis von Lutheranern und Reformierten gespannt, man denke nur an die Vielfalt der protestantischen Kirchen. Allenthalben wurde der gegenreformatorische Geist des Katholizismus offensiv; die Beschlüsse des Konzils von Trient (1545–1563) waren noch immer Gegenstand aktueller Polemik. Die religiöse Diskussion hielt den ganzen Kontinent in Bann und drohte die Spaltung weiter zu vertiefen. Erst die Aufklärung in England (durch Hobbes und Locke) bzw. Frankreich (durch Spinoza und Voltaire) und später die Säkularisation schränkte die Macht der Kirchen ein. Die letzten Todesurteile der Inquisition wurden noch 1761 und 1782 in Rom bzw. Sevilla vollstreckt. Der Index der verbotenen Bücher (*Index librorum prohibitorum*) wurde sogar bis 1962 fortgeführt; erst das zweite Vatikanische Konzil 1965 beendete diese Zensur.

1.3.2 Zur Lage der Wissenschaften

Die Wissenschaft des 17. Jahrhunderts befand sich in einer Umbruchszeit; die wissenschaftlichen Methoden unterlagen einem grundlegenden Wandel. In der Zeit zuvor hatten Wissenschaftler die Welt oft durch deduktive Reduktion aus den Aussagen der Bibel und antiker Philosophen erklärt. *Natura abhorret vacuum,* der auf Aristoteles zurückgehende Spruch, wurde noch von Galilei bekräftigt, erwies sich aber als falsch bei den Quecksilberversuchen von Torricelli (1643) und Pascal (1647). Das ebenfalls von Aristoteles stammende Postulat, dass alle Planeten notwendig sich auf Kreisen bewegen, wurde von Kepler 1609 widerlegt.

Insbesondere durch die physikalischen Versuche Galileis zur Physik wurde die traditionelle Wissenschaft angeregt, empirische Ergebnisse zu erlangen. Zunehmend setzten sich die Erkenntnis durch, dass naturwissenschaftliche Hypothesen durch Experimente überprüft werden müssen. Die Wissenschaft wurde so durch zahlreiche neue Erkenntnisse erweitert und korrigiert. Die Neuerungen entwickelten jedoch meist unabhängige Forscher, die von Mäzenen oder gelehrten Kreisen gefördert wurden.

Aus diesen Kreisen gründeten sich schließlich die Akademien und ihre Vorläufer, die den wissenschaftlichen Austausch unter den Gelehrten ermöglicht und gefördert haben. Die *Royal Society* entstand 1662 aus einer privaten Gesellschaft, ebenso die *Académie française* 1666. Die Vervielfältigung wissenschaftlicher Schriften durch den Buchdruck sorgte für einen schnellen Informationsaustausch in Europa. Die weitverbreitete Gelehrtensprache Latein erleichterte den innereuropäischen Austausch von Informationen unter einer kleinen gelehrten Elite.

1.3.3 Die Mathematik des 17. Jahrhunderts

Betrachten wir nun die Entwicklung der Mathematik, wie sie im Buch dargestellt wird. Die Anstöße zu neuen Themen sind:

- Analytische Geometrie: Fermat (1629), Descartes (1637)
- Infinitesimalrechnung: Newton (1666, publ. 1684), Leibniz (1673)
- Wahrscheinlichkeitsrechnung: Fermat – Pascal (1654), Huygens (1657)
- Höhere Arithmetik, algebraische Zahlentheorie: Fermat (1624)
- Projektive Geometrie: Pascal (1639), Desargues (ab 1665)
- Bau von Rechenmaschinen: Schickard (1623), Pascal (1642), Leibniz (1673)
- Entwickeln neuer Kalküle wie Logarithmen: Napier (1614), Briggs (1617), Bürgi (publ. 1620)

Alle diese Schriften entstanden zwischen 1624 (Fermat) und 1684 (Principia Newtons)!
Wir stellen fest: *Die Mathematik der Neuzeit entstand im 17. Jahrhundert.*

Und sie liefert große Erfolge! Diese zeigen sich besonders bei Leonhard Euler, dessen Werk Impulse gibt zu neuen mathematischen Disziplinen wie Funktionentheorie, Variationsrechnung, Graphentheorie u. a.

Weiterentwicklung der Algebra

2

2.1 Geschichte des komplexen Rechnens

Die Einführung der komplexen Größen in die Mathematik hat ihren Ursprung und nächsten Zweck in der Theorie einfacher durch Größenoperationen ausgedrückter Abhängigkeitsgesetze zwischen veränderlichen Größen. Wendet man nämlich diese Abhängigkeitsgesetze in einem erweiterten Umfange an, indem man den veränderlichen Größen, auf welche sie sich beziehen, komplexe Werte gibt, so tritt eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmäßigkeit hervor (B. Riemann).

Der göttliche Geist hat eine feine und wundersame Zuflucht gefunden in jenem Wunder der Analysis, dem Monstrum der realen Welt, fast ein Zwitter zwischen Sein und Nicht-Sein, welches wir die imaginäre Einheit nennen (G. W. Leibniz).

Weil nun alle möglichen Zahlen, die man sich immer vorstellen kann, entweder größer oder kleiner als Null oder selbst Null sind, ist klar, dass die Quadratwurzeln von negativen Zahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, dass sie unmögliche Zahlen sind. Dieser Umstand leitet uns zum Begriff solcher Zahlen, die ihrer Natur nach unmöglich sind und gewöhnlich *imaginäre* Zahlen oder *eingebildete* Zahlen genannt werden, weil sie bloß allein in der Einbildung vorhanden sind (L. Euler[1]).

So wie man sich das ganze Reich aller reellen Größen durch die unendliche gerade Linie denken kann, so kann man sich das ganze Reich aller Größen, reeller und imaginärer Größen durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt durch Abszisse $= a$, Ordinate $= b$ bestimmt, die Größe $(a + bi)$ gleichsam repräsentiert (C. F. Gauß).

Vor einigen Jahren hatte ich die angenehme Aufgabe, eine Vorlesung über *komplexe Zahlen* zu halten. Wie immer machte mich die Beschäftigung mit der Thematik persönlich betroffen; am Ende überkam mich das Gefühl: *Gott erschuf die Welt mit Hilfe der komplexen Zahlen* (R. Hamming[2]).

[1] Euler L., Hofmann J. E. (Hrsg.): Vollständige Anleitung zur Algebra, Reclam Stuttgart 1959, Teil 2, § 143.

[2] Hamming R., The Unreasonable Effectiveness of Mathematics, The American Math. Monthly, Vol. 87 (2), 1980, p. 81–90.

D. Herrmann, *Mathematik der Neuzeit,* https://doi.org/10.1007/978-3-662-65417-0_2

Die Zahlen $a, b \in$ heißen Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Zahl $z = a + ib$. Das konjugiert Komplexe der Zahl ist definiert durch $\bar{z} = a - ib$ und umgekehrt; das Produkt ist reell:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Der Betrag der komplexen Zahlen ist damit gegeben durch:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die komplexe Arithmetik verwendet die Rechenregeln:

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a + c) \pm i(b + d)$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Manchmal lassen sich Beweise vereinfachen, indem man ins Komplexe geht. Zu zeigen ist, das Produkt zweier Zahlen, die jeweils Summe zweier Quadrate sind, lässt sich auch als Summe von Quadraten darstellen:

$$\begin{aligned}\left(a^2 + b^2\right)\left(x^2 + y^2\right) &= (a + ib)(a - ib)(x + iy)(x - iy)\\ &= \left[(a + ib)(x + iy)\right]\left[(a - ib)(x - iy)\right]\\ &= \left[(ax + by) - i(ay - bx)\right]\left[(ax + by) + i(ay - bx)\right]\\ &= (ax + by)^2 + (ay - bx)^2\end{aligned}$$

Dazu passt das bekannte Zitat von Jaques Hadamard (1865–1963):

> Der kürzeste Weg zwischen zwei Wahrheiten im Reellen führt über das Komplexe.

Der Weg ins Komplexe erklärt auch oft Sachverhalte im Reellen. So hat die Funktion $\frac{1}{1+x^2}$ die Taylor-Reihe:

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \pm \cdots$$

Die Reihe ist konvergent für $|x| < 1$. An den Stellen $|x| = 1$ zeigt die Funktion kein ungewöhnliches Verhalten; jedoch die Zerlegung im Komplexen zeigt hier Singularitäten $z = \pm i$:

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z - i}\frac{1}{z + i}$$

Geronimo Cardano (1501–1576) vermied in seiner *Ars Magna* alle Aufgaben, deren Lösung die imaginäre Einheit benötigt hätte, bis auf folgende Aufgabe: *Zerlege 10 so*