



Dietmar Herrmann

# Mathematik der Neuzeit

Geschichte der Mathematik in Europa  
von Vieta bis Euler

 Springer Spektrum

---

# Mathematik der Neuzeit

---

Dietmar Herrmann

# Mathematik der Neuzeit

Geschichte der Mathematik in Europa  
von Vieta bis Euler

 **Springer** Spektrum

Dietmar Herrmann  
FH München  
Anzing, Bayern, Deutschland

ISBN 978-3-662-65416-3      ISBN 978-3-662-65417-0 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-65417-0>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert an Springer-Verlag GmbH, DE, ein Teil von Springer Nature 2022

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Nikoo Azarm

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

*Gewidmet meiner lieben Gattin Eva,  
mit Dank für ihre Geduld in Zeiten, zu denen ich  
wieder zu lange am Computer saß.*

---

## Vorwort

Nach einer ungebrochenen, viele Jahrhunderte überdauernden Tradition wird die Mathematik in unserem Zeitalter der Massenbildung nicht mehr als integraler Teil unserer Kultur angesehen. Die Isolation der forschenden Gelehrten, der bedauernde Mangel an inspirierenden Lehrern, die Anzahl der langwierigen und anspruchsvollen kommerziellen Lehrbücher und der generelle Erziehungstrend – weg von dieser anspruchsvollen Disziplin – haben viel zu einer gegen die Mathematik gerichteten Mode im Bildungswesen beigetragen. Es ist ein großes Verdienst der Öffentlichkeit, dass das Interesse an der Mathematik dennoch ungebrochen ist.

(Richard Courant im Vorwort zum Buch *Mathematics in Western Culture* von M. Kline, 1953).

Dieses Buch ist der vierte Teil einer Buchreihe zur Geschichte der Mathematik. Thema ist die Mathematik der Neuzeit in Europa, also einer Epoche der Glaubenskriege, Gegenreformation und Aufklärung.

Der Band ist zunächst ein Lesebuch, das nach einer Kurzbiografie des jeweiligen Mathematikers wichtige und bemerkenswerte Ergebnisse aus dessen Lebenswerk referiert. Für alle Leserinnen und Leser, die sich für die geschichtliche Entwicklung interessieren, wird das soziale und kulturelle Umfeld der Gelehrten durch Bilder und zahlreiche Zitate ausführlich geschildert. An vielen Stellen wird auch auf literarische Bezüge eingegangen.

Die Auswahl aus den mathematischen Werken beansprucht nicht, *repräsentativ* zu sein, dennoch vermitteln auch exemplarische Beispiele Einblicke in die mathematische Gedankenwelt des 16. und 17. Jahrhunderts. Bei der Besprechung der Anfänge der Algebra erfolgt ein Rückblick in die Zeit der Renaissance, ebenso bei der Erfindung der Perspektive. Der im Buch erfasste Zeitraum geht bis zum Tod Eulers (1783). Es enthält zahlreiche Hinweise und Vorgehensweisen, die zur Eigenbeschäftigung anregen.

Aber das Buch ist mehr: Es bietet eine Bestandsaufnahme der erreichten Resultate in Geometrie, Algebra, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zahlentheorie und Rechenteknik bis Eulers Tod. Dies erleichtert die Suche nach geeigneten Themen für Unterricht, Vorlesung und Seminare.

Vieles, was hier zur Darstellung kommt, ist mathematisches Allgemeingut. Dennoch werden hier einige Zusammenhänge offengelegt, die bisher wenig oder gar nicht beachtet wurden, und so vielleicht neue Einsichten erzeugt und Erinnerungen an frühere Vorlesungen geweckt. Der Text ist weitgehend elementar gehalten und durch zahlreiche Beispiele erläutert; bei der Behandlung von Ableitungen und Integralen sind Grundkenntnisse aus einführenden Vorlesungen in Höherer Mathematik nützlich.

Das Buch ist ein mathematisch orientiertes Geschichtsbuch; es kann *nicht* bei der Vielzahl der angesprochenen Themen, wie ein modernes Lehrbuch, umfassende Definitionen oder Regeln aufstellen. Die Darstellung ist *historisch*, so wird das Rechnen mit Reihen ohne die heute obligatorischen Konvergenzbetrachtungen und Restgliedabschätzungen vorgeführt.

Um das Lesen der Texte zu erleichtern, wird die moderne mathematische Schreibweise gewählt; an einigen Stellen wird auch auf die historischen Schreibweisen eingegangen. Die Kapitel des Buchs über Einzelpersonen sind chronologisch nach dem Geburtsjahr angeordnet. Die anderen Sachthemen wie die „Erfindung der Perspektive“, „Rechenhilfsmittel“ usw. sind problemgeschichtlich dargestellt, dabei wird ein Mittelweg eingeschlagen zwischen bloßer Faktenvermittlung und akribischer Darstellung aller Einzelheiten.

Der Autor wünscht allen Leserinnen und Lesern eine anregende Lektüre!

München

Dietmar Herrmann

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	1
1.1	Wozu dient die Geschichte der Mathematik?.....	1
1.2	Zum Inhalt des Buchs.....	2
1.3	Das 17. Jahrhundert, die Wiege der Neuzeit.....	5
<b>2</b>	<b>Weiterentwicklung der Algebra</b> .....	9
2.1	Geschichte des komplexen Rechnens.....	9
2.2	Komplexe Zahlen bei Bombelli (1526–1572).....	21
2.3	François Viète (1540–1603), genannt Vieta.....	25
2.4	Thomas Harriot (1560–1621).....	45
	Literatur.....	52
<b>3</b>	<b>Neue Themen in der Geometrie</b> .....	55
3.1	Die Erfindung der Perspektive.....	55
3.2	Leon Battista Alberti (1404–1472).....	60
3.3	Piero della Francesca (ca. 1420–1492).....	63
3.4	Albrecht Dürer (1471–1528).....	65
3.5	Hans Vredeman de Vries (1527–1604).....	68
3.6	Girard Desargues (1593–1662).....	70
	Literatur (weiterführend).....	80
<b>4</b>	<b>Die Entwicklung der Rechenhilfsmittel</b> .....	83
4.1	Frühe Hilfsmittel.....	83
4.2	Die Rechenschieber und Rechenscheiben.....	87
4.3	Die Rechenmaschinen.....	88
4.4	Die Entwicklung der Logarithmen.....	91
	Literatur.....	111
<b>5</b>	<b>Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> .....	113
5.1	Erste Fragestellungen.....	113
5.2	Problem der gerechten Teilung.....	117
5.3	Bernoulli-Wahrscheinlichkeiten.....	118

5.4	Die Aufgaben von Huygens . . . . .	123
5.5	Eine Aufgabe von Euler . . . . .	128
	Literatur . . . . .	129
<b>6</b>	<b>Pierre de Fermat (1601?-1665)</b> . . . . .	131
6.1	Geometrie bei Fermat . . . . .	136
6.2	Extremwertbestimmung bei Fermat . . . . .	138
6.3	Tangentenbestimmung bei Fermat . . . . .	142
6.4	Fermats Integralsummen . . . . .	144
6.5	Zahlentheorie bei Fermat . . . . .	145
	Literatur . . . . .	160
<b>7</b>	<b>René Descartes (1596–1650)</b> . . . . .	163
7.1	Beiträge zur Geometrie . . . . .	174
7.2	Tangentenmethode bei Descartes . . . . .	180
7.3	Herleitung der Hyperbelgleichung . . . . .	181
7.4	Aus der Gleichungslehre . . . . .	182
	Literatur . . . . .	191
<b>8</b>	<b>Blaise Pascal (1623-1662)</b> . . . . .	193
8.1	Beiträge zur Geometrie . . . . .	201
8.2	Das Pascal'sche Dreieck . . . . .	203
8.3	Die Potenzsummen bei Pascal . . . . .	207
	Literatur (weiterführend) . . . . .	209
<b>9</b>	<b>Erste Schritte zur Infinitesimalrechnung</b> . . . . .	211
9.1	Johannes Kepler (1571–1630) . . . . .	212
9.2	Bonaventura Cavalieri (1598–1647) . . . . .	231
9.3	Evangelista Torricelli (1608–1647) . . . . .	235
9.4	Gilles Personne de Roberval (1602–1675) . . . . .	240
9.5	John Wallis (1616–1703) . . . . .	244
9.6	Nikolaus Mercator (1620–1687) . . . . .	252
9.7	Pietro Mengoli (1626–1686) . . . . .	255
9.8	William Neile (1637–1670) . . . . .	261
9.9	James Gregory (1638–1675) . . . . .	262
9.10	Abraham de Moivre (1667–1754) . . . . .	266
9.11	Guillaume de L'Hôpital (1661–1704) . . . . .	270
	Literatur . . . . .	273
<b>10</b>	<b>Die Bernoulli-Familie</b> . . . . .	275
10.1	Jakob I Bernoulli (1654–1705) . . . . .	276
10.2	Johann I Bernoulli (1667–1748) . . . . .	280
10.3	Daniel Bernoulli (1700–1782) . . . . .	285
10.4	Die Bernoulli-Ungleichung . . . . .	287

10.5	Divergenz der harmonische Reihe . . . . .	288
10.6	Anfänge der Differenzialgeometrie . . . . .	289
10.7	Das Basler Problem . . . . .	293
10.8	Die Entdeckung der Zahl „e“ . . . . .	294
10.9	Die Bernoulli-Zahlen . . . . .	295
10.10	Eine Kurvendiskussion von Johann Bernoulli . . . . .	300
10.11	Integrationsmethoden der Bernoullis . . . . .	302
10.12	Das Brachistochronen-Problem . . . . .	304
10.13	Gewöhnliche Differenzialgleichungen . . . . .	307
10.14	Eine erste partielle Differenzialgleichung . . . . .	312
	Literatur . . . . .	314
<b>11</b>	<b>Christian Huygens (1629–1695)</b> . . . . .	<b>315</b>
11.1	Sterbetafeln bei Huygens und Bernoulli . . . . .	321
11.2	Kubische Gleichung bei Huygens . . . . .	324
11.3	Krümmung und Evolute einer Kurve . . . . .	325
	Literatur (weiterführend): . . . . .	328
<b>12</b>	<b>Isaac Newton (1643–1727)</b> . . . . .	<b>331</b>
12.1	Das Umfeld von Newton . . . . .	331
12.2	Das Leben Newtons . . . . .	339
12.3	Der Prioritätsstreit . . . . .	347
12.4	Aus der Geometrie . . . . .	353
12.5	Die Entwicklung der binomischen Reihe . . . . .	354
12.6	Arbeiten zur Reihenlehre . . . . .	357
12.7	Newtons Näherung für . . . . .	362
12.8	Die Newton'schen Identitäten . . . . .	364
12.9	Numerik bei Newton . . . . .	368
12.10	Der Calculus von Newton . . . . .	378
12.11	Das Nachleben Newtons . . . . .	383
	Literatur . . . . .	387
<b>13</b>	<b>Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)</b> . . . . .	<b>389</b>
13.1	Wie Deutschland seine Gelehrten ehrt . . . . .	398
13.2	Arbeiten zur Reihenlehre . . . . .	399
13.3	Das harmonische Dreieck von Leibniz . . . . .	405
13.4	Leibniz und die Determinante . . . . .	407
13.5	Die Erfindung des Dualsystems . . . . .	411
13.6	Die Entdeckung des charakteristischen Dreiecks . . . . .	418
13.7	Integration von rationalen Funktionen . . . . .	421
13.8	Zur Zerlegbarkeit von Polynomen . . . . .	424
13.9	Die Sektorenformel von Leibniz . . . . .	426
13.10	Differenziation eines Integrals nach einem Parameter . . . . .	427

13.11	Methode der unbestimmten Koeffizienten . . . . .	428
13.12	Die Kettenlinie bei Leibniz . . . . .	429
13.13	Die Schleppkurve bei Leibniz . . . . .	431
13.14	Hüllkurven bei Leibniz. . . . .	433
13.15	Der Calculus von Leibniz. . . . .	435
	Literatur. . . . .	439
<b>14</b>	<b>Leonhard Euler (1707–1783)</b> . . . . .	<b>441</b>
14.1	Komplexe Zahlen bei Euler . . . . .	454
14.2	Die Euler-Konstante . . . . .	461
14.3	Eulers Beiträge zur Geometrie . . . . .	464
14.4	Vollständige Anleitung zur Algebra . . . . .	470
14.5	Kombinatorik bei Euler . . . . .	482
14.6	Zahlentheorie bei Euler . . . . .	494
14.7	Anfänge der Graphentheorie . . . . .	505
14.8	Beiträge zur Reihenlehre . . . . .	508
14.9	Die Euler-Maclaurin-Formel . . . . .	515
14.10	Die Zetafunktion. . . . .	518
14.11	Die Gammafunktion. . . . .	521
14.12	Differenzialgleichungen und Variationsrechnung . . . . .	526
14.13	Euler und die Fourier-Reihen. . . . .	529
14.14	Numerik bei Euler . . . . .	531
	Literatur. . . . .	536
	<b>Literatur</b> . . . . .	<b>539</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b> . . . . .	<b>549</b>

---

# Abbildungsverzeichnis

Abb.1.1	Die Errungenschaften des 17. Jahrhunderts. (Modifiziert vom Autor; nach Erwin Stein: Gottfried Wilhelm Leibniz seiner Zeit weit voraus als Philosoph, Mathematiker, Physiker, Techniker, 2005, S. 142). . . . .	5
Abb. 2.1	Komplexen Zahlen in kartesischen und Polarkoordinaten . . . . .	12
Abb. 2.2	Die komplexe Folge $(0.8 + i \cdot 0.45)^k$ . . . . .	13
Abb. 2.3	Irische Briefmarke zu Ehren W. R. Hamiltons (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miller/stamps) . . . . .	16
Abb. 2.4	Gemälde von C. F. Gauß (Wikimedia Commons, gemeinfrei), deutsche Briefmarke mit Darstellung der Gauß'schen Zahlenebene . . . . .	18
Abb. 2.5	Bild von François Viète, genannt Vieta (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	26
Abb. 2.6	Sehnenviereck mit ganzzahligen Seiten und Diagonalen . . . . .	34
Abb. 2.7	Abbildung zu Theorem VI . . . . .	34
Abb. 2.8	Beweisfigur zum Additionstheorem . . . . .	35
Abb. 2.9	Rechtwinkliges Kugeldreieck . . . . .	36
Abb. 2.10	Zur grafischen Lösung einer quadratischen Gleichung . . . . .	40
Abb. 2.11	Titelblatt von Vietas <i>Opera Mathematica</i> (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	45
Abb. 2.12	Vermutliches Porträt von Thomas Harriot. (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	46
Abb. 2.13	Aus dem Buch <i>True Report of the New Found Land of Virginia</i> (1585) . . . . .	47
Abb. 2.14	Gemälde des Syon House im Zustand vor 1760. (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	48
Abb. 3.1	Gemälde von Perugino „Jesus übergibt die Schlüssel an Petrus“ (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	56
Abb. 3.2	Fresko von Masaccio „Kreuzigungsszene“ (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	56

Abb. 3.3	Zur Theorie der perspektivische Abbildung . . . . .	58
Abb. 3.4	Perspektivische Abbildung zweier Parallelen . . . . .	59
Abb. 3.5	Zentralprojektion eines Zimmers . . . . .	60
Abb. 3.6	Erste Konstruktion von Alberti . . . . .	62
Abb. 3.7	Zweite Konstruktion von Alberti . . . . .	62
Abb. 3.8	Resultierende Abbildung aus beiden Konstruktionen . . . . .	62
Abb. 3.9	Perspektivische Konstruktion eines regulären Fünfecks und Würfels (Piero della Francesca 1474) . . . . .	65
Abb. 3.10	Kupferstich von A. Dürer <i>Der heilige Hieronymus im Gehäuse</i> (Zeno.org, gemeinfrei) mit perspektivischen Strahlen . . . . .	67
Abb. 3.11	Kupferstich von A. Dürer <i>Der Zeichner der Laute</i> (Zeno.org, gemeinfrei) . . . . .	68
Abb. 3.12	Perspektivische Konstruktion eines Tonnengewölbes von Vredeman de Vries (aus dem Werk <i>Perspektive</i> , The Hague, Henrik Hondius, 1604, Folio 8) . . . . .	69
Abb. 3.13	Perspektivische Konstruktion einer Straße von Vredeman de Vries (aus dem Werk <i>Perspective</i> , The Hague, Henrik Hondius, 1604, Altera Pars Folio 15) . . . . .	70
Abb. 3.14	Desargues erklärt Richelieu die Bauarbeiten zur Belagerung von La Rochelle (AKGimages 5463756) . . . . .	71
Abb. 3.15	Wandgemälde von Th. Chartran in der Sorbonne: Begegnung von Desargues, Mersenne, Pascal und Descartes (Foto Alain Juhel, www.mathouriste.eu) . . . . .	72
Abb. 3.16	Satz von Desargues in der Ebene und im Raum . . . . .	76
Abb. 3.17	Porismus von Euklid . . . . .	76
Abb. 3.18	Erhaltung des Doppelverhältnisses . . . . .	77
Abb. 3.19	Das vollständige Vierseit . . . . .	77
Abb. 3.20	Konstruktion harmonischer Punkte . . . . .	78
Abb. 3.21	Näherungskonstruktionen für Ellipsen . . . . .	79
Abb. 3.22	Perspektivische Darstellungen von Desargues/Bosse (Bosse, <i>Manière universelle de Mr Desargues</i> 1648, S. 84, 318) . . . . .	79
Abb. 3.23	Architektonische Darstellungen von Desargues/Bosse <i>(Des Herren des Argues von Lion: Kunstrichtige und probmäßige Zeichnung zum Stein = Hauen und in der Bau = Kunst,</i> Helmerts Nürnberg 1699, S. 88, 90) . . . . .	80
Abb. 4.1	Schematische Darstellung der Neper'schen Rechenstäbe . . . . .	85
Abb. 4.2	Gunter-Rechenstab (Otto van Poeljie, Gunter Rules Rules in Navigation, Journal of the Oughtred-Society, Vol. 13, No. 1, 2004, S. 12), koloriert vom Autor . . . . .	86
Abb. 4.3	Moderne Rechenscheibe (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	87
Abb. 4.4	Moderner Rechenschieber (Foto Autor) . . . . .	88

Abb. 4.5	Skizze von Schickards Rechenmaschine (Wikimedia Common, gemeinfrei), Rekonstruktion auf einer deutschen Briefmarke . . . . .	89
Abb. 4.6	Briefmarke von S. Tomé e Príncipe mit Bild von Pascals Rechenmaschine (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miller/stamps) . . . .	89
Abb. 4.7	Die Rechenmaschine von Leibniz (Leibniz-Ausstellung, Referat für Kommunikation und Marketing, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover) . . . . .	90
Abb. 4.8	Bild von Jost Bürgi (Wikimedia Commons) und eine Globusuhr (Briefmarke der DDR) . . . . .	92
Abb. 4.9	Titelblatt von Bürgis Logarithmentafel (Universität Graz, public domain) . . . . .	95
Abb. 4.10	Gemälde von John Napier (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	96
Abb. 4.11	Zum kinematischen Modell Nepers . . . . .	100
Abb. 4.12	Graph von Nepers Logarithmus-Funktion . . . . .	101
Abb. 4.13	Zwei Details aus dem Frontispiz der der <i>Tabulae Rudolphinae</i> (Ausschnitt aus Abb. 9.9) . . . . .	102
Abb. 4.14	Ausschnitt aus einer dekadischen Logarithmen-Tafel (gemeinfrei) . . . . .	106
Abb. 4.15	Ausschnitt aus Briggs <i>Logarithmica</i> (Briggs, <i>Arithmetica Logarithmica</i> 1624, S. 10) . . . . .	107
Abb. 5.1	Spielsalon des 17. Jahrhunderts (Monmort, <i>Essai d'analyse</i> <i>sur les jeux de hazard</i> , 1708, Premier Partie S. 1) . . . . .	116
Abb. 5.2	Ereignisbaum einer Bernoulli-Kette . . . . .	121
Abb. 5.3	Histogramm zum 12-fachen Würfelwurf . . . . .	122
Abb. 5.4	Galton-Brett (Wikimedia Commons, public domain, Urheber: Chrischi) . . . . .	122
Abb. 5.5	Bewegung in einem zweidimensionalen Gitter . . . . .	123
Abb. 6.1	Gemälde von Pierre de Fermat (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	132
Abb. 6.2	Titelblatt von Fermats Schriften und ein darin enthaltenes Porträt (Fermat, <i>Varia opera mathematica</i> , Toulouse 1679, Frontispiz) . . . . .	134
Abb. 6.3	Fermat-Punkt eines Dreiecks . . . . .	137
Abb. 6.4	Spiralen von Fermat und Archimedes . . . . .	137
Abb. 6.5	Zum Extremwert 1) von Fermat . . . . .	139
Abb. 6.6	Zum Extremwert 3) von Fermat . . . . .	140
Abb. 6.7	Darstellung des Brechungsgesetzes . . . . .	142
Abb. 6.8	Tangentenbestimmung bei Fermat . . . . .	143
Abb. 6.9	Integralbestimmung bei abnehmender Intervallbreite . . . . .	144

Abb. 6.10	Liechtensteiner Briefmarke zu einer Mersenne-Primzahl und Porträt von M. Mersenne (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . .	149
Abb. 6.11	Briefmarken aus Tschechien und Frankreich zum Beweis von Wiles (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miller/stamps). . . . .	158
Abb. 7.1	Gemälde von René Descartes, Kopie nach Frans Hals (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	164
Abb. 7.2	Französische Briefmarke mit Darstellung des früheren Jesuiten-Kollegs La Flèche (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miller/stamps) . . . . .	164
Abb. 7.3	Briefmarke von Monaco mit einem Bild von Descartes und einer Darstellung des Sehapparats (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miller/stamps) . . . . .	165
Abb. 7.4	Schloss Neuburg a. d. Donau, Kupferstich um 1720 (GetArchive LLC) . . . . .	166
Abb. 7.5	Kasteel Endegeest bei Oegstgeest (Wikimedia Commons, Public domain) . . . . .	169
Abb. 7.6	Titelblatt von <i>Discours de la méthode</i> (Wikimedia Commons, Public domain) . . . . .	170
Abb. 7.7	Karikatur von Varignon über Descartes(rechts) und Mersenne(links) (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	171
Abb. 7.8	Ausschnitt aus einem Gemälde des Hofstaates mit Descartes und Königin Christina von Schweden (Wikimedia Commons, Public domain) . . . . .	172
Abb. 7.9	Zum Vier-Kreise-Satz . . . . .	174
Abb. 7.10	Ganzzahlige Lösung des Vier-Kreise-Satzes . . . . .	175
Abb. 7.11	Kartesisches Blatt . . . . .	175
Abb. 7.12	Kartesisches Oval . . . . .	176
Abb. 7.13	Rechnen mit Strecken (nach Descartes) . . . . .	177
Abb. 7.14	Zum Problem von Pappos (Descartes, <i>Discours de la méthode</i> 1637), koloriert . . . . .	178
Abb. 7.15	Spezieller Fall des Vier-Geraden-Problems . . . . .	179
Abb. 7.16	Zur Tangentenmethode . . . . .	180
Abb. 7.17	Zur Herleitung der Hyperbelgleichung . . . . .	182
Abb. 7.18	Geometrische Lösung einer quadratischen Gleichung . . . . .	183
Abb. 7.19	Geometrische Lösung einer quartischen Gleichung . . . . .	184
Abb. 8.1	Gemälde von Blaise Pascal (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	194
Abb. 8.2	Die Luftdruckversuche von Pascals Schwiegersohn auf dem Berg <i>Puy de Dôme</i> (Kupferstich aus <i>Les merveilles de la sciences</i> , Tome 1 1867, koloriert) . . . . .	197
Abb. 8.3	Kloster Port Royal vor der Zerstörung (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	199
Abb. 8.4	Rötelzeichnung Pascals von Jean-Domat Senior (GetArchive LLC) . . . . .	200

Abb. 8.5	Pascals Beweis über eine Ellipseeigenschaft . . . . .	201
Abb. 8.6	Sechseck von Pascal, einbeschrieben in drei Kegelschnitten . . . . .	202
Abb. 8.7	Die Pascal'sche Schnecke . . . . .	202
Abb. 8.8	Das Pascal'sche Dreieck bei Yang Hui, Pascal (beide Wikimedia Commons, gemeinfrei), Apian (Titelbild: Eyn neue vnnd wolgegründte vnderweysung, Fr. Chr. Egenolphus Ingolstadt 1527) und Stifel (Deutsche Arithmetica, Petreius Nürnberg 1545, S. 153) . . . . .	203
Abb. 9.1	Integral nach Archimedes . . . . .	212
Abb. 9.2	Rychnower Porträt Keplers (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	213
Abb. 9.3	Darstellung aus <i>Mysterium Cosmographicum 1596</i> (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	213
Abb. 9.4	Schloss Uraniborg mit Sternwarte (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	214
Abb. 9.5	Grafikblatt aus <i>Harmonices Mundi</i> (Kepler 1619) . . . . .	215
Abb. 9.6	Grafik zum dritten Kepler'schen Gesetz in doppelt- logarithmischer Darstellung . . . . .	216
Abb. 9.7	Ansicht von Prag und Schloss 1607 (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	217
Abb. 9.8	Wohnhaus Keplers in Prag. (Foto vom Autor) . . . . .	218
Abb. 9.9	Titelblatt der <i>Tabulae Rudolphinae</i> (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	219
Abb. 9.10	Sterbehaus Keplers und Museum in Regensburg (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	221
Abb. 9.11	Zur Kepler-Vermutung . . . . .	221
Abb. 9.12	Volumenbestimmung eines Fasses (Adam-Ries-Bund) . . . . .	222
Abb. 9.13	Zur Kepler'schen Fassregel . . . . .	223
Abb. 9.14	Volumenbestimmung bei parabolischer Randkurve . . . . .	224
Abb. 9.15	Zur Volumenberechnung mittels Zylinder . . . . .	225
Abb. 9.16	Rotationskörper bei Kepler . . . . .	227
Abb. 9.17	Zur Apfelfigur Keplers . . . . .	228
Abb. 9.18	Zur Kepler'schen Formel . . . . .	230
Abb. 9.19	Bild von Bonaventura F. Cavalieri (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	232
Abb. 9.20	Zum Prinzip von Cavalieri . . . . .	233
Abb. 9.21	Zum Integral nach Cavalieri . . . . .	234
Abb. 9.22	Bild von E. Torricelli (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	236
Abb. 9.23	Einhüllende beim schiefen Wurf. Höhe der Abwurfstelle 5 m. . . . .	237
Abb. 9.24	Trompete des Torricelli (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	239
Abb. 9.25	Bild von G. P. de Roberval (Ausschnitt aus Abb. 11.2) . . . . .	241

Abb. 9.26	Darstellung der Zykloide als Rollkurve . . . . .	241
Abb. 9.27	Flächenbestimmung der Zykloide nach Roberval . . . . .	242
Abb. 9.28	Waage von Roberval . . . . .	243
Abb. 9.29	Zur Integration der Parabel nach Roberval . . . . .	243
Abb. 9.30	Gemälde von John Wallis (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	244
Abb. 9.31	Kap. 67 aus Wallis' Algebra (John Wallis: A treatise of algebra, 1676) . . . . .	247
Abb. 9.32	Mittlere Proportionalen bei Wallis . . . . .	248
Abb. 9.33	Zur Indivisibelnmethode bei Wallis . . . . .	249
Abb. 9.34	Zum Wallis-Integral . . . . .	250
Abb. 9.35	Gemälde von Pietro Mengoli (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	255
Abb. 9.36	<i>Neile'sche</i> Parabel . . . . .	256
Abb. 9.37	Gemälde von James Gregory (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	263
Abb. 9.38	Gemälde von Abraham de Moivre (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	266
Abb. 9.39	Histogramm zum 30-fachen Münzwurf . . . . .	269
Abb. 9.40	Bild von G. F. A. de L'Hôpital (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	271
Abb. 10.1	Ausschnitt aus dem Stammbaum der Familie Bernoulli . . . . .	276
Abb. 10.2	Stich der Stadt Basel 1761, „Topographie der Eidgenossenschaft, Blatt 255“, (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	277
Abb. 10.3	Gemälde von Jakob Bernoulli (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	277
Abb. 10.4	Gemälde von Johann Bernoulli (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	279
Abb. 10.5	Schweizer Briefmarke von Jakob Bernoulli mit Darstellung seines Gesetzes der großen Zahlen (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miler/stamps) . . . . .	281
Abb. 10.6	Streitgespräch zwischen den Bernoulli-Brüdern (SciencePhoto 11555027) . . . . .	283
Abb. 10.7	Daniel Bernoulli (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	285
Abb. 10.8	Logarithmische Spirale . . . . .	290
Abb. 10.9	Lemniskate . . . . .	291
Abb. 10.10	Die Funktion von Johann Bernoulli . . . . .	300
Abb. 10.11	Zum Brachistochronen-Problem . . . . .	304
Abb. 11.1	Gemälde von Christian Huygens (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	315
Abb. 11.2	Ölgemälde „Colbert präsentiert Ludwig XIV. die Mitglieder der königlichen Akademie“ (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	317

Abb. 11.3	Vater Huygens präsentiert Ludwig XIV. die Uhr seines Sohnes (PictureAlliance 9930029) . . . . .	318
Abb. 11.4	Briefmarken der Niederlande und Comoren zur Huygens-Uhr und Raumsonde „Huygens“ (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miller/stamps) . . . . .	319
Abb. 11.5	Aufbau der von Huygens entwickelten Pendeluhr (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	321
Abb. 11.6	Scheitelkreis einer Standardparabel . . . . .	325
Abb. 11.7	Verschiedene Kurven und ihre Evoluten . . . . .	328
Abb. 12.1	Gemälde des Großbrands von London 1666. (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	336
Abb. 12.2	Gemälde von Isaac Newton. (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	339
Abb. 12.3	Geburts- und Wohnhaus Newtons in Woolsthorpe. (GetArchive LLC) . . . . .	340
Abb. 12.4	Trinity College um 1700. (David Loggan, Cantabrigia Illustrata, Cambridge 1690, Plate XXIX) . . . . .	341
Abb. 12.5	Englische Briefmarke zur 350-Jahr-Feier der Royal Society (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miller/stamps) . . . . .	344
Abb. 12.6	Sitzung der Royal Society unter dem Vorsitz von Newton. (Wellcome Collection) . . . . .	345
Abb. 12.7	Gresham-College London (Sitz der Royal Society von 1660–1710). (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	345
Abb. 12.8	Titelblatt von Newtons Schrift <i>De Analysisi</i> . (Newton 1669) . . . . .	350
Abb. 12.9	Englische Briefmarkenserie zu Ehren Newtons (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miller/stamps) . . . . .	352
Abb. 12.10	Die Newton'sche Gerade . . . . .	353
Abb. 12.11	Zur Sinusreihe . . . . .	358
Abb. 12.12	Zur Pi-Berechnung . . . . .	362
Abb. 12.13	Zum Newton-Verfahren . . . . .	370
Abb. 12.14	Resultat der Polynominterpolation . . . . .	376
Abb. 12.15	Zum Rechenbeispiel 8) . . . . .	382
Abb. 12.16	Grabmal Newtons in der Westminster-Abbey London. (Wikimedia Commons, public domain, Urheber: Klaus-Dieter Keller) . . . . .	384
Abb. 12.17	Frontispiz der <i>Éléments de la philosophie</i> . (Voltaire 1738) . . . . .	386
Abb. 12.18	<b>a</b> Aquarell von William Blake (Wikimedia Commons, public domain, The William Blake Archive) <b>b</b> : Aquarell von William Blake (Wikimedia Commons, public Domain, //www.britishmuseum.org/collection/object/P_1859-0625-72) . . . . .	386
Abb. 13.1	Gemälde von G. W. Leibniz. (Wikimedia Commons, public domain, Christoph Bernhard Francke – Herzog Anton Ulrich-Museum) . . . . .	390

Abb. 13.2	Erste publizierte Schrift zur Infinitesimalrechnung: „Nova Methodus pro Maximis et Minimis“, <i>Acta Eruditorum</i> , Oktober 1684 von G. W. Leibniz. (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	392
Abb. 13.3	Leibniz-Haus in Hannover. (Wikimedia Commons, gemeinfrei, Urheber: Axel Hindemith) . . . . .	393
Abb. 13.4	Leibniz hält einen Vortrag bei Königin Sophie-Charlotte. (PictureAlliance 91.217.709) . . . . .	394
Abb. 13.5	Königlich Preußische Akademie der Wissenschaften 1748. (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	394
Abb. 13.6	Deutsche Briefmarke zum 350. Geburtstag von Leibniz (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miller/stamps) . . . . .	396
Abb. 13.7	Leibniz-Rundtempel in Hannover (Wikimedia Commons, gemeinfrei, Urheber: Axel Hindemith), Ausschnitt . . . . .	398
Abb. 13.8	Zur Leibniz-Reihe . . . . .	399
Abb. 13.9	Das Pascal'sche Dreieck . . . . .	403
Abb. 13.10	Zur Sinusreihe . . . . .	404
Abb. 13.11	Das harmonische Dreieck . . . . .	406
Abb. 13.12	Grafische Darstellung einer Permutation . . . . .	409
Abb. 13.13	Gedenkmünze zur Erfindung des dualen Zahlensystems (Titelblatt J. C. Schulenburg: Vorschlag zur Vereinigung der Westzeit, Endters seel. Erben, Frankfurt 1724) . . . . .	412
Abb. 13.14	Tabelle des I Ging mit Ergänzungen Leibniz'. (Wikimedia Commons, public domain) . . . . .	413
Abb. 13.15	Darstellung der ersten acht Dualziffern . . . . .	413
Abb. 13.16	Die Grundrechenarten im Dualsystem . . . . .	413
Abb. 13.17	Umwandlung Dual- und Dezimalsystem . . . . .	414
Abb. 13.18	<i>Machina Arithmetica Dyadica</i> . (Leibniz-Ausstellung, Referat für Kommunikation und Marketing, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover) . . . . .	414
Abb. 13.19	<i>Machina Deciphtratoria</i> . (Leibniz-Ausstellung, Referat für Kommunikation und Marketing, Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover) . . . . .	415
Abb. 13.20	Algorithmen, die auf dem Dualsystem beruhen . . . . .	417
Abb. 13.21	Der Halbaddierer . . . . .	418
Abb. 13.22	Charakteristisches Dreieck bei Pascal . . . . .	419
Abb. 13.23	Charakteristisches Dreieck bei Leibniz . . . . .	420
Abb. 13.24	Kräftegleichgewicht bei der Kettenkurve . . . . .	430
Abb. 13.25	Die Schleppkurve . . . . .	432
Abb. 13.26	Einhüllende (Envelope) einer Kurvenschar . . . . .	434
Abb. 14.1	L. Euler, Gemälde von: Jakob Emanuel Handmann. (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	442

Abb. 14.2	Kolorierter Druck von K. Makhayev: Panorama des Flusses Newa zwischen Winterpalast und Akademie der Wissenschaften, 1753. (Wikimedia Commons, gemeinfrei) . . . . .	443
Abb. 14.3	Russische Briefmarke zum 250. Geburtstag von Euler (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miller/stamps) . . . . .	444
Abb. 14.4	Finnländische und französische Briefmarke zur Expedition von Maupertuis (mathshistory.st-andrews.ac.uk/miller/stamps) . . . . .	445
Abb. 14.5	Gemälde von A. von Menzel: Tafelrunde im Schloss Sanssouci, 1861 (Wikimedia Commons, gemeinfrei), 1945 in Berlin zerstört . . .	445
Abb. 14.6	Titelblatt von <i>Diatrise du Docteur Akakia</i> (Voltaire 1753) . . . . .	448
Abb. 14.7	Gemälde von Baptist d’Alembert und J. L. Lagrange. (Beide Wikimedia Commons, gemeinfrei). . . . .	450
Abb. 14.8	Euler-Haus in St. Petersburg. (Foto Rudolf Mumenthaler) . . . . .	452
Abb. 14.9	Konvergenz einer komplexen Reihe . . . . .	458
Abb. 14.10	Grafische Darstellung einer komplexen fünften Wurzel. . . . .	460
Abb. 14.11	Das Euler-Dreieck . . . . .	464
Abb. 14.12	Die Euler-Gerade . . . . .	465
Abb. 14.13	Eine weitere Euler-Gerade . . . . .	466
Abb. 14.14	Zum Beweis von Euler . . . . .	468
Abb. 14.15	Zum Vierecksatz von Euler. . . . .	469
Abb. 14.16	Briefmarken der DDR und Schweiz mit Darstellung der Euler’schen Polyederformel . . . . .	469
Abb. 14.17	Zwei Beispiele zur Polyederformel . . . . .	470
Abb. 14.18	Titelblatt zu Eulers Algebra (Euler, Vollständige Anleitung zur Algebra 1770). . . . .	471
Abb. 14.19	Triangulierungen des Sechsecks. . . . .	485
Abb. 14.20	Rösselsprung nach Euler (Euler, Mémoires de l’Académie de Berlin, Band XV, 1759) . . . . .	487
Abb. 14.21	Fast magisches Quadrat von Euler (Euler, <i>De quadratis magicis</i> 1776) . . . . .	487
Abb. 14.22	Histogramm zum 4-fachen Würfelwurf . . . . .	494
Abb. 14.23	Zum Königsberger Problem (Euler, <i>Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis</i> 1736, koloriert) . . . . .	506
Abb. 14.24	Multigraph des Königsberger Problems. . . . .	507
Abb. 14.25	Multigraph des Haus des Nikolaus’ . . . . .	507
Abb. 14.26	Die Gammafunktion . . . . .	522
Abb. 14.27	Fourier-Entwicklung der Sägezahnfunktion. . . . .	530
Abb. 14.28	Zum Euler’schen Polygonzugverfahren . . . . .	533
Abb. 14.29	Richtungsfeld und Isoklinen einer Differenzialgleichung . . . . .	534



We all know that the triumph for a historian of science is to prove that nobody ever discovered anything (Jacquard Hadamard, Newton Tercentenary Celebration Royal Society, Juli 1946).

Wenn mich ein neues Buch erreicht, dann suche ich, was ich daraus lernen kann, und nicht, was ich daran kritisieren kann (G. W. Leibniz).

Pro captu lectoris habent sua fata libelli (Terentianus Maurus, um 200 n. Chr.).

Igitur eme, lege, fruere (Also kaufe, lies und erfreue dich!) (Kopernikus, Vorwort De Revolutionibus 1543).

Es gibt Leute, die wollen, dass ein Schriftsteller nie von Dingen rede, über die schon andere gesprochen haben; sonst klagt man ihn an, nichts Neues zu sagen. Auch wenn auch die Gegenstände, die er behandelt, nicht neu sind, so ist doch die Anordnung neu. Wenn man Ball spielt, so ist es derselbe Ball, mit welchem der eine wie der andere spielt, aber der eine schlägt ihn besser als der andre (Pascal, Pensées 696).

---

## 1.1 Wozu dient die Geschichte der Mathematik?

Die Geschichte der Mathematik kann unter mehrfachen Gesichtspunkten betrachtet werden:

Man möchte die Entstehungsgeschichte unserer heutigen Mathematik kennenlernen und erfahren, zu welcher Zeit und auf welche Weise gewisse mathematische Teildisziplinen entstanden sind. Besonders interessant ist zu wissen, wie, wann und durch wen berühmte mathematische Sätze geprägt bzw. bewiesen wurden.

Neben der chronologischen Geschichte von mathematischen Sachverhalten will man sich über die Entwicklung, Zusammenhänge, Entfaltung und Wechselwirkung der zugrunde liegenden Ideen informieren, wobei wichtige, sich ausbreitende Ideen sach- und problemgeschichtlich dargestellt werden sollen.

Wissenswert ist es auch, etwas über die soziokulturellen Hintergründe der Wissenschaftler zu erfahren, wie ihr Leben und Wirken durch Zeitumstände, Reisen, Kontakte, kriegerische Auseinandersetzungen und religiöse Normen beeinflusst wurden.

Anzumerken ist, dass die Beschäftigung mit der Geschichte der Mathematik keinesfalls reiner Selbstzweck ist, denn oft erlangt man das Verständnis von einzelnen Sachverhalten am besten dadurch, dass man die historische Entwicklung studiert. *Last not least* dürfte gerade die Mathematikgeschichte dazu geeignet sein, die – immer stärker zu zerfallen drohende – Einheit der Mathematik aufzuzeigen.

---

## 1.2 Zum Inhalt des Buchs

**Kap. 2** berichtet über die Weiterentwicklung der Algebra, die im Band *Mathematik des Mittelalters* bis zur Entdeckung der Formeln von Cardano geschildert wurde. Sehr ausführlich wird die Geschichte des komplexen Rechnens bis Gauß dargestellt. Spezielle Probleme bei Bombelli und Vieta finden sich in den Abschn. 2.2 und 2.3. Auf die großartigen Entdeckungen Eulers im Komplexen wird separat im Abschn. 14.1 eingegangen. Abschn. 2.4 zeigt den Stand der Algebra bei Thomas Harriot, dessen Werk später von John Wallis fortgesetzt wird.

**Kap. 3** schildert die Erfindung der Perspektive und geht damit auf die Zeit der frühen Renaissance zurück. Aus Umfangsgründen können nur einige wichtige italienische Künstler besprochen werden, wie Leon Battista Alberti (Abschn. 3.2) und Piero de della Francesca (Abschn. 3.3). Die Künstler nördlich der Alpen werden durch Albrecht Dürer (Abschn. 3.4) und Jan Vredemann de Vries (Abschn. 3.5) vertreten. Ganz neu ist das Erscheinen einer neuen Art der Geometrie bei Girard Desargues (Abschn. 3.6), die zum Vorläufer der projektiven Geometrie wird. Sie überwindet die Geometrie nach Euklid, benötigt keine metrischen Maße wie Länge, Fläche usw. und findet alle Eigenschaften von Kegelschnitten durch Projektionen des Kreises.

**Kap. 4** zeigt die Entwicklung der Rechenhilfsmittel. Neben der frühen Form der *Prosthaphaeresis* (Rechnen mittels trigonometrischen Umformungen) in Abschn. 4.2 ist hier insbesondere der Bau der ersten Rechenmaschinen durch Pascal, Schickard und Leibniz (Abschn. 4.3) zu nennen. Hand in Hand mit der Berechnung der Logarithmen (Abschn. 4.4) durch Bürgi, Napier und Briggs geht die technische Realisierung in Form der Rechenstäbe bzw. -schieber (Abschn. 4.3); hier werden die Produkte von Napier und Gunter vorgestellt.

**Kap. 5** legt die Anfänge der Wahrscheinlichkeitsrechnung dar. Während in der Antike der Zufall als das Wirken einer höheren Macht angesehen wird, beginnt man in der Renaissance Häufigkeiten beim Würfeln mit kombinatorischen Mitteln zu erfassen (Abschn. 5.1). Der Beginn der Wahrscheinlichkeitsrechnung kann auf den Tag datiert werden, an dem Fermat diesbezüglich den ersten Brief an Pascal schrieb. Das genaue Datum ist nicht bekannt, Pascal antwortete am 24. August 1654. Pascals Briefe wurden

angeregt durch die Fragen eines professionellen Spielers de Méré (Abschn. 5.2). Mit Begeisterung nehmen Jakob und später Daniel Bernoulli die neuen Ideen auf und entwerfen eigene Theorien (Abschn. 5.3). Weiterführende Aufgaben von Huygens und Euler finden sich in den Abschn. 5.4 bzw. 5.5.

**Kap. 6** erzählt das Leben und Werk von Pierre de Fermat. Seine ersten Ansätze zur Infinitesimalrechnung bleiben in der Literatur oft unerwähnt. Bedeutsam sind seine Methoden zur Bestimmung von Extremwerten (Abschn. 6.2) und Tangenten (Abschn. 6.4), da durch sie die weitere Entwicklung gefördert wird. Neuartig war auch seine Integration durch nicht äquidistante Intervalleinteilungen (Abschn. 6.3). Bekannt geworden ist Fermat vor allem als Begründer der Zahlentheorie (Abschn. 6.5); seine Beschäftigung mit der Zahlentheorie wurde angeregt durch die Lektüre der Diophantos-Übersetzung von B. de Frénicle (de Bessy). Fermat sprach zahllose Vermutungen aus, von denen viele erst Euler beweisen konnte. Seine berühmteste Vermutung, *Großer Satz von Fermat* genannt, wurde erst 358 Jahre später von A. Wiles gelöst.

**Kap. 7** informiert über das bewegte Leben des René Descartes. Der berühmte Philosoph („cogito, ergo sum“) verfasste zu seinem Werk *Discours de la Méthode* einen mathematischen Anhang *Géométrie*, der die analytische Geometrie begründete (Abschn. 7.1 und 7.3). Abschn. 7.2 erklärt seine Methode zum Auffinden von Tangenten. Bedeutend war die Weiterentwicklung der Descartes'schen Methoden durch die Niederländer Johann Hudde und Jan de Witt nach Vorarbeiten von Frans van Schooten (Abschn. 7.4).

**Kap. 8** referiert das Leben des Philosophen und Theologen Blaise Pascal. Er hatte drei Phasen seines Lebens, in denen er sich mathematisch betätigte. In der ersten Phase in jungen Jahren beschäftigte er sich mit Kegelschnitten, in seiner Pariser Zeit mit Kombinatorik (u. a. mit dem Pascalschen Dreieck) (Abschn. 8.1 bis 8.3). Später nahm er Anteil an der Diskussion über höhere Kurven, wobei er (unter einem Pseudonym) einen Wettbewerb über die Zykloide ausschrieb.

**Kap. 9** sammelt die mathematischen Beiträge der wichtigsten Mathematiker, die bei der Entwicklung der Infinitesimalrechnung mitgewirkt haben. Nach Kepler (Abschn. 9.1) ging das Konzept der Indivisibeln auf die italienische Schule über, hier sind zu nennen: Cavalieri (Abschn. 9.2), Torricelli (Abschn. 9.3) und Mengoli (Abschn. 9.7). Über Mersenne wurden Kontakte zu Frankreich geknüpft: Roberval (Abschn. 9.4) und de Moivre (Abschn. 9.10); Letzterer ist mehr für seine Beiträge zur Wahrscheinlichkeit bekannt geworden. Gregory (Abschn. 9.9), der längere Zeit in Italien gelebt hat, bildet mit Wallis (Abschn. 9.5) und Neile (Abschn. 9.8) die englische Schule. Mercator (Abschn. 9.6) lebte lange Zeit in den Niederlanden und starb in Paris. Am Ende der Reihe steht hier L'Hôpital (Abschn. 9.11), der ein Student bei Johann Bernoulli war.

**Kap. 10** bringt dem Lesenden die Geschichte der Familie Bernoulli nahe. Nach den Kurzbiografien von Johann, Jakob und Daniel Bernoulli (Abschn. 10.1 bis 10.3) werden ihre mathematischen Beiträge zur Reihenlehre (Abschn. 10.4, 10.5, 10.7, 10.9) diskutiert. Wesentliche Impulse gingen von ihnen für die Diskussion von höheren Kurven aus (Abschn. 10.6, 10.10); sie begründeten damit die Differenzialgeometrie. Zusammen

mit Leibniz schufen sie die Grundlagen der Integrationstheorie; hieraus entwickelten sie wichtige Methoden zur Lösung gewöhnlicher Differenzialgleichungen (Abschn. 10.11 bis Abschn. 10.14).

**Kap. 11** behandelt das Lebenswerk von Christian Huygens. Aus seiner Biografie (Abschn. 11.1) wird ersichtlich, dass Huygens mehr ein „angewandter“ Mathematiker und Physiker war. Aus seinen Studien zur Zykloide und ihren Evoluten (Abschn. 11.4) entsprang seine Idee zum Bau einer idealen Pendeluhr. Bemerkenswert sind auch seine Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, die er unabhängig von Fermat und Pascal verfasste; auch hier war er an Anwendungen interessiert (Abschn. 11.3). Im Kontakt mit niederländischen Mathematikern entstanden Arbeiten zur Analysis (Abschn. 11.2). Sein „bedeutendster“ Beitrag zur Mathematik war wohl der Unterricht, den er dem gelehrten Juristen Leibniz in Paris gab.

**Kap. 12** ist dem Wirken von Isaac Newton gewidmet. Ausführlich wird sein Leben (Abschn. 12.2) und sein wissenschaftliches Umfeld (Abschn. 12.1) geschildert; aus diesem Umfeld entstand die *Royal Society*, die „Hausmacht“ Newtons. Auch Newton beschäftigte sich nur abschnittsweise mit Mathematik, hauptsächlich aber mit Alchemie und Theologie. Sein erster großer Wurf war die Verallgemeinerung der binomischen Reihe auf gebrochene und negative Exponenten (Abschn. 12.5). Der Erfolg regte weitere Studien zur Reihenlehre an (Abschn. 12.6 und 12.7). Mithilfe der Vorarbeiten von Barrow und Wallis entwickelte er seine Theorie der „Fluxionen“ (Abschn. 12.10), die aber erst nach dem Kontakt mit Leibniz publiziert wurden. Dies führte zu dem berühmten Prioritätsstreit (Abschn. 12.3). Bekannt sind auch die Newton'schen Interpolationsformeln, die auf Vorarbeiten von Gregory und Collins beruhen. Auch die sog. Newton-Iteration stammt in der heute angewandten Form nicht von ihm (Abschn. 12.9). Weitere Einsichten in die Algebra vermittelt der Abschn. 12.8. Seine Popularität in England zeigte sich in seinem Nachleben, das in Abschn. 12.11 geschildert wird. Aus Umfangsgründen wird auf die Kontroverse mit Bischof Berkeley über die Grundlagen der „Fluxionen“-Rechnung nicht eingegangen.

**Kap. 13** macht mit dem Philosophen und Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz bekannt. Auch er war stolz auf seinen Anfangserfolg, der Herleitung der nach ihm benannten Reihe (13.1). Weitere Entdeckungen führen ihn zum Konzept der Determinante (Abschn. 13.2) und zum Dualsystem (Abschn. 13.3). Das in der Literatur mehrfach vorkommende sog. „charakteristische“ Dreieck lieferte ihm die Idee der Differenziale (Abschn. 13.5), aus der sich das Konzept des Leibniz'schen Kalküls entwickelte. Ihre Anwendungen sind zahlreich und werden in den Abschn. 13.6 bis 13.15 beschrieben.

Das letzte **Kap. 14** stellt einen zentralen Punkt des Buches dar, das Schaffen Leonhard Eulers. Genialisch erweitert er das Konzept der komplexen Zahlen auf trigonometrische Funktionen, was zur berühmten Euler'schen Identität führt (Abschn. 14.1 und 14.2). Virtuos handhabt er das Rechnen mit Reihen (Abschn. 14.8–14.9), wobei einige kuriose Ergebnisse entstehen; strenge Regeln zur Konvergenzbestimmung sind noch einzuführen. In seiner Algebra und Zahlentheorie benützt er höhere Methoden (Abschn. 14.4 und 14.6). Diese sind das Verwenden von Kettenbrüchen und das Rechnen in Zahlbereichen, wie  $(a + b\sqrt{-2})$ . Völlig neue Fachgebiete entstehen durch Eulers Ideen zur Kombinatorik und Graphentheorie (Abschn. 14.5 und 14.7). Seine Erkennt-



**Abb.1.1** Die Errungenschaften des 17. Jahrhunderts. (Modifiziert vom Autor; nach Erwin Stein: Gottfried Wilhelm Leibniz seiner Zeit weit voraus als Philosoph, Mathematiker, Physiker, Techniker, 2005, S. 142)

nisse zur Zeta- und Gamma-Funktion (Abschn. 14.10–14.11) beschäftigen noch die nächste Generation von Mathematikern, insbesondere seine Theorie der Elliptischen Funktionen. Auch seine Variationsrechnung und die Beiträge zu gewöhnlichen und partiellen Differenzialgleichungen eröffneten völlig neue mathematische Gebiete. Differenzialgleichungen löste Euler auch numerisch mit dem Euler'schen Polygonzugverfahren (Abschn. 14.14). Euler stieß auch auf Fourier-Reihen, deren Schranken im Definitionsbereich er aber nicht erkannte (Abschn. 14.13).

## 1.3 Das 17. Jahrhundert, die Wiege der Neuzeit

### 1.3.1 Die allgemeine politische Lage

Die vom Autor modifizierte Grafik (Abb. 1.1) nach einem Entwurf von Prof. Erwin Stein<sup>1</sup> zeigt die wichtigsten Umbrüche in den Wissenschaften des 17. Jahrhunderts; manche Autoren sprechen hier von einer wissenschaftlichen Revolution, im Rang etwa der „kopernikanischen Wende“.

<sup>1</sup> Stein E., Heinekamp A. (Hrsg.): G.W. Leibniz – Das Wirken des großen Philosophen und Universalgelehrten als Mathematiker, Physiker, Techniker. G.-W.-Leibniz-Gesellschaft, Hannover 1990

Die *Accademia del Cimento* in Florenz, 1657 gegründet, wurde aber bald auf Betreiben der katholischen Kirche aufgelöst. Wie man an diesem Beispiel sieht, wurde die Deutungshoheit des wissenschaftlichen Weltbilds (wie schon im Mittelalter) von der Kirche beansprucht. Giordano Bruno wurde 1600 auf dem Scheiterhaufen verbrannt, da er behauptete „es gebe unzählig viele Welten wie die Erde“. Als Galilei 1632 entgegen kirchlicher Anweisung den „Dialog über die zwei wichtigsten Weltsysteme“ veröffentlichte, schlug die Kirche zurück. Alle Schriften Galileis wurden verboten, in einem Prozess zwang ihn die Inquisition 1633 in Rom zum Widerruf. Er starb 1642 im Gewahrsam der Inquisition. Die Verweigerung des kirchlichen *Imprimatur* (lat. es werde gedruckt) machte vielen Wissenschaftlern Probleme bei Veröffentlichungen. Ohne die kirchliche Bewilligung (*nihil obstat*) musste der Erstdruck von Kopernikus *De Revolutionibus Orbium Coelestium* 1543 in Nürnberg erfolgen. Nur in einer freien Reichsstadt war ein solches Projekt möglich.

Im Jahr 1618 lösten eskalierende Meinungsverschiedenheiten zwischen den evangelischen böhmischen Ständen und dem katholischen Kaiser in Prag einen Bürgerkrieg aus, der sich im Folgenden zum Dreißigjährigen Krieg auf das gesamte Reich ausweitete. Dabei ging es nicht nur um den religiösen Gegensatz von evangelischer Union und katholischer Liga, sondern auch um die Ausweitung kaiserlicher Macht über die Reichsstände. Im Laufe des Krieges mischten sich zunehmend reichsfremde Mächte, vor allem Schweden, Frankreich und Spanien in den Konflikt ein. Der Westfälische Friede setzte dem grausamen Krieg im Jahr 1648 ein Ende. Damit wurde zum einen ein Grundkonsens im Hl. Römischen Reich bis zu seinem Ende 1806 geschaffen, zum anderen ein Religionsfrieden geschaffen; d. h., auf Reichsebene wurden allen Religionen gleiche Rechte zugestanden.

In Europa herrschte jedoch kein Religionsfrieden.

**England:** Mit ihrem absoluten Machtanspruch geriet das katholische Haus Stuart in Konflikt mit dem englischen *Parliament*, das die Herrscher zur Bewilligung ihrer Finanzen benötigten. Das Ansinnen spaltete das Parlament in zwei Fraktionen. Die Auseinandersetzung eskalierte zum Bürgerkrieg, den die Königsgegner gewannen, mit dem Ergebnis, dass König Charles I. im Jahr 1649 hingerichtet wurde. Der Streit im anglikanisch-puritanischen Lager führte zur Gewaltherrschaft des Lordprotektors Oliver Cromwell. Nach dessen Tod (1660) wurden die Stuarts wieder auf den englischen Thron geholt. Um 1680 kam es erneut zum Streit mit dem Parlament, da das Königshaus den katholischen Klerus als Verbündeten betrachtete. Nach dem Einmarsch seines niederländischen Schwiegersohnes Wilhelm von Oranien in England (1688) musste sich der zunächst geflohene Jakob II. Wilhelm seine Inthronisation mit weitreichenden Zugeständnissen sichern. Die *Glorious Revolution* gewährte dem *Unterhaus* einen großen Teil der Regierungsgewalt – entgegen dem europäischen Trend.

**Frankreich:** Im Dauerkonflikt mit den Habsburgern versuchte die französische Krone zunächst, die Vormachtstellung in Europa durch Diplomatie und Unterstützung fremder Kriegsparteien zu erlangen. Ab den 30er-Jahren stellte Frankreich unter Ludwig XIII.

eigene Armeen auf, um in Konfliktfällen Teile des Hl. Römischen Reiches zu annektieren. Mit dem Antritt des Sonnenkönigs (1643) wurde die Staatsmacht gestärkt, die katholischen Kardinäle (insbesondere Richelieu) beschnitten zunehmend die Rechte der Bürger. 1614 wurde ihre Versammlung, die Generalstände, zum letzten Mal einberufen und die Adelsopposition, wie die Hugenotten und die Anführer der Fronde, wurde politisch entmachtet oder getötet. Die Eroberung von La Rochelle 1628 beendete das Leben der Hugenotten in Frankreich. Ähnlich erging es den Anhängern des Jansenismus. Die französische Expansion wurde erst 1697 mit dem Frieden von Rijswijk (nach dem Ende des Pfälzischen Erbfolgekriegs) gestoppt. Die Ruinen des Heidelberger Schlosses erinnern noch an die Zerstörung Heidelbergs 1689 durch die Truppen Ludwig XIV.

**Niederlande:** Ende des 16. Jahrhunderts kam es zum Aufstand gegen die Habsburger. Ein gemeinsames Vorgehen aller Provinzen gegen die Spanier gelang nicht. Die südlichen Provinzen vereinigten sich 1579 und schlossen Frieden mit dem habsburgischen König Philipp II, wurden aber 1585 von spanischen Truppen besetzt. Die nördlichen Provinzen schlossen sich im Unionsvertrag von Utrecht zusammen und kämpften unter Führung eines Statthalters aus dem Hause Oranien-Nassau gegen Spanien. Die rigorose Verfolgung Andersgläubiger durch die Spanier führte zur Auswanderung der Hugenotten. Erst der Westfälische Frieden von 1648 brachte die völkerkundliche Anerkennung der Nordprovinzen. Der wirtschaftliche Erfolg der Niederländer führte zu mehreren Kriegen um die Vorherrschaft im Welthandel mit England. Der Frieden von Breda (1667), der federführend von Johan de Witt ausgehandelt wurde, beendete die Auseinandersetzung mit England, man einigte sich auf eine Abgrenzung ihrer Kolonial- und Handelsinteressen.

Sektiererische Abspaltungen von den großen Hauptkirchen entstanden überall. In Europa blieb das Verhältnis von Lutheranern und Reformierten gespannt, man denke nur an die Vielfalt der protestantischen Kirchen. Allenthalben wurde der gegenreformatorische Geist des Katholizismus offensiv; die Beschlüsse des Konzils von Trient (1545–1563) waren noch immer Gegenstand aktueller Polemik. Die religiöse Diskussion hielt den ganzen Kontinent in Bann und drohte die Spaltung weiter zu vertiefen. Erst die Aufklärung in England (durch Hobbes und Locke) bzw. Frankreich (durch Spinoza und Voltaire) und später die Säkularisation schränkte die Macht der Kirchen ein. Die letzten Todesurteile der Inquisition wurden noch 1761 und 1782 in Rom bzw. Sevilla vollstreckt. Der Index der verbotenen Bücher (*Index librorum prohibitorum*) wurde sogar bis 1962 fortgeführt; erst das zweite Vatikanische Konzil 1965 beendete diese Zensur.

### 1.3.2 Zur Lage der Wissenschaften

Die Wissenschaft des 17. Jahrhunderts befand sich in einer Umbruchszeit; die wissenschaftlichen Methoden unterlagen einem grundlegenden Wandel. In der Zeit zuvor hatten Wissenschaftler die Welt oft durch deduktive Reduktion aus den Aussagen der Bibel und antiker Philosophen erklärt. *Natura abhorret vacuum*, der auf Aristoteles zurückgehende Spruch, wurde noch von Galilei bekräftigt, erwies sich aber als falsch bei den Quecksilberversuchen von Torricelli (1643) und Pascal (1647). Das ebenfalls von Aristoteles

stammende Postulat, dass alle Planeten notwendig sich auf Kreisen bewegen, wurde von Kepler 1609 widerlegt.

Insbesondere durch die physikalischen Versuche Galileis zur Physik wurde die traditionelle Wissenschaft angeregt, empirische Ergebnisse zu erlangen. Zunehmend setzten sich die Erkenntnis durch, dass naturwissenschaftliche Hypothesen durch Experimente überprüft werden müssen. Die Wissenschaft wurde so durch zahlreiche neue Erkenntnisse erweitert und korrigiert. Die Neuerungen entwickelten jedoch meist unabhängige Forscher, die von Mäzenen oder gelehrten Kreisen gefördert wurden.

Aus diesen Kreisen gründeten sich schließlich die Akademien und ihre Vorläufer, die den wissenschaftlichen Austausch unter den Gelehrten ermöglicht und gefördert haben. Die *Royal Society* entstand 1662 aus einer privaten Gesellschaft, ebenso die *Académie française* 1666. Die Vervielfältigung wissenschaftlicher Schriften durch den Buchdruck sorgte für einen schnellen Informationsaustausch in Europa. Die weitverbreitete Gelehrtensprache Latein erleichterte den innereuropäischen Austausch von Informationen unter einer kleinen gelehrten Elite.

### 1.3.3 Die Mathematik des 17. Jahrhunderts

Betrachten wir nun die Entwicklung der Mathematik, wie sie im Buch dargestellt wird. Die Anstöße zu neuen Themen sind:

- Analytische Geometrie: Fermat (1629), Descartes (1637)
- Infinitesimalrechnung: Newton (1666, publ. 1684), Leibniz (1673)
- Wahrscheinlichkeitsrechnung: Fermat – Pascal (1654), Huygens (1657)
- Höhere Arithmetik, algebraische Zahlentheorie: Fermat (1624)
- Projektive Geometrie: Pascal (1639), Desargues (ab 1665)
- Bau von Rechenmaschinen: Schickard (1623), Pascal (1642), Leibniz (1673)
- Entwickeln neuer Kalküle wie Logarithmen: Napier (1614), Briggs (1617), Bürgi (publ. 1620)

*Alle diese Schriften entstanden zwischen 1624 (Fermat) und 1684 (Principia Newtons)!*

Wir stellen fest: *Die Mathematik der Neuzeit entstand im 17. Jahrhundert.*

Und sie liefert große Erfolge! Diese zeigen sich besonders bei Leonhard Euler, dessen Werk *Impulse* gibt zu neuen mathematischen Disziplinen wie Funktionentheorie, Variationsrechnung, Graphentheorie u. a.



## 2.1 Geschichte des komplexen Rechnens

Die Einführung der komplexen Größen in die Mathematik hat ihren Ursprung und nächsten Zweck in der Theorie einfacher durch Größenoperationen ausgedrückter Abhängigkeitsgesetze zwischen veränderlichen Größen. Wendet man nämlich diese Abhängigkeitsgesetze in einem erweiterten Umfange an, indem man den veränderlichen Größen, auf welche sie sich beziehen, komplexe Werte gibt, so tritt eine sonst versteckt bleibende Harmonie und Regelmäßigkeit hervor (B. Riemann).

Der göttliche Geist hat eine feine und wundersame Zuflucht gefunden in jenem Wunder der Analysis, dem Monstrum der realen Welt, fast ein Zwitter zwischen Sein und Nicht-Sein, welches wir die imaginäre Einheit nennen (G. W. Leibniz).

Weil nun alle möglichen Zahlen, die man sich immer vorstellen kann, entweder größer oder kleiner als Null oder selbst Null sind, ist klar, dass die Quadratwurzeln von negativen Zahlen nicht einmal unter die möglichen Zahlen gerechnet werden können. Folglich müssen wir sagen, dass sie unmögliche Zahlen sind. Dieser Umstand leitet uns zum Begriff solcher Zahlen, die ihrer Natur nach unmöglich sind und gewöhnlich *imaginäre* Zahlen oder *eingebildete* Zahlen genannt werden, weil sie bloß allein in der Einbildung vorhanden sind (L. Euler<sup>1</sup>).

So wie man sich das ganze Reich aller reellen Größen durch die unendliche gerade Linie denken kann, so kann man sich das ganze Reich aller Größen, reeller und imaginärer Größen durch eine unendliche Ebene sinnlich machen, worin jeder Punkt durch Abszisse =  $a$ , Ordinate =  $b$  bestimmt, die Größe  $(a + bi)$  gleichsam repräsentiert (C. F. Gauß).

Vor einigen Jahren hatte ich die angenehme Aufgabe, eine Vorlesung über *komplexe Zahlen* zu halten. Wie immer machte mich die Beschäftigung mit der Thematik persönlich betroffen; am Ende überkam mich das Gefühl: *Gott erschuf die Welt mit Hilfe der komplexen Zahlen* (R. Hamming<sup>2</sup>).

<sup>1</sup>Euler L., Hofmann J. E. (Hrsg.): Vollständige Anleitung zur Algebra, Reclam Stuttgart 1959, Teil 2, § 143.

<sup>2</sup>Hamming R., The Unreasonable Effectiveness of Mathematics, The American Math. Monthly, Vol. 87 (2), 1980, p. 81–90.

Die Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  heißen Real- bzw. Imaginärteil der komplexen Zahl  $z = a + ib$ . Das konjugiert Komplexe der Zahl ist definiert durch  $\bar{z} = a - ib$  und umgekehrt; das Produkt ist reell:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$$

Der Betrag der komplexen Zahlen ist damit gegeben durch:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die komplexe Arithmetik verwendet die Rechenregeln:

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a + c) \pm i(b + d)$$

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Manchmal lassen sich Beweise vereinfachen, indem man ins Komplexe geht. Zu zeigen ist, das Produkt zweier Zahlen, die jeweils Summe zweier Quadrate sind, lässt sich auch als Summe von Quadraten darstellen:

$$\begin{aligned} (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) &= (a + ib)(a - ib)(x + iy)(x - iy) \\ &= [(a + ib)(x + iy)][(a - ib)(x - iy)] \\ &= [(ax + by) - i(ay - bx)][(ax + by) + i(ay - bx)] \\ &= (ax + by)^2 + (ay - bx)^2 \end{aligned}$$

Dazu passt das bekannte Zitat von Jaques Hadamard (1865–1963):

Der kürzeste Weg zwischen zwei Wahrheiten im Reellen führt über das Komplexe.

Der Weg ins Komplexe erklärt auch oft Sachverhalte im Reellen. So hat die Funktion  $\frac{1}{1+x^2}$  die Taylor-Reihe:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \pm \dots$$

Die Reihe ist konvergent für  $|x| < 1$ . An den Stellen  $|x| = 1$  zeigt die Funktion kein ungewöhnliches Verhalten; jedoch die Zerlegung im Komplexen zeigt hier Singularitäten  $z = \pm i$ :

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z - i} \frac{1}{z + i}$$

Geronimo Cardano (1501–1576) vermied in seiner *Ars Magna* alle Aufgaben, deren Lösung die imaginäre Einheit benötigt hätte, bis auf folgende Aufgabe: *Zerlege 10 so*