

Heinz Klaus Strick

Mathematik — einfach genial!

Bemerkenswerte
Ideen und
Geschichten von
Pythagoras bis Cantor

SACHBUCH



Springer

Mathematik – einfach genial!

Heinz Klaus Strick

Mathematik – einfach genial!

Bemerkenswerte Ideen und Geschichten
von Pythagoras bis Cantor

Mit Porträtzeichnungen von Andreas Strick

Heinz Klaus Strick
Leverkusen, Deutschland

ISBN 978-3-662-60448-9 ISBN 978-3-662-60449-6 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-60449-6>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag GmbH Deutschland, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Zeichnungen: Heinz Klaus Strick, Leverkusen; einige Abb. von Stephan Meyer, Dresden
Einbandabbildung: nach Heinz Klaus Strick, Leverkusen

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann

Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Wer sich mit der Geschichte der Mathematik beschäftigt, mit den vielen Ideen, die im Laufe der Jahrhunderte entwickelt wurden, der kommt aus dem Staunen nicht heraus – da kann man nur feststellen: „Einfach genial!“.

Und es gibt auch eine Reihe von genialen Ansätzen, die von der Nachwelt regelrecht vergessen wurden – die Universalgelehrten aus dem islamischen Kulturkreis etwa sind in Europa kaum noch bekannt, obwohl sie wesentliche Beiträge zur Entwicklung der Mathematik geleistet haben.

In dem vorliegenden Buch werden einige dieser bemerkenswerten genialen Ideen dargestellt. Ausgewählt habe ich 18 Themen, die mithilfe zahlreicher farbiger Abbildungen anschaulich entwickelt und durch möglichst einfache Beispiele verdeutlicht werden. Manche der Ideen haben eine Vorgeschichte, auf die ich zunächst eingehe – so wird noch klarer, welcher Fortschritt durch diese Idee erreicht wurde.

Die Menschen hinter diesen Ideen haben in ihrer jeweiligen Zeit gelebt, und oft wurden ihre Schicksale von dramatischen historischen Veränderungen beeinflusst. Daher war es naheliegend, auch die Lebensgeschichten dieser Personen zu erzählen – so wie ich es seit 2006 jeden Monat im *Mathematischen Monatskalender* versuche (Überblick auf www.spektrum.de/mathematik/monatskalender/index/).

Die meisten dieser Mathematiker hatten nicht nur eine einzige geniale Idee. So finden Sie im jeweiligen Kapitel einen dritten Abschnitt, in dem beschrieben wird, mit welchen Themen sich diese Gelehrten auch noch beschäftigt haben. In einigen Fällen (Archimedes, Fermat, Euler, Lagrange) ist dies umfangreich und kann – insbesondere bei Leonhard Euler – nur andeuten, wie außergewöhnlich diese Mathematiker waren.

Die Literaturhinweise in jedem Kapitel und am Ende des Buches geben Anregungen für eine weitere Beschäftigung mit den angesprochenen Themen. Erfreulicherweise hat die Qualität der deutschen Wikipedia-Beiträge (und der darin enthaltenen Literaturhinweise) in den letzten Jahren deutlich zugenommen. Manchmal werden sie in der englisch- bzw. französischsprachigen Version noch übertroffen; daher sind auch diese Quellen genannt. An etlichen Stellen ergaben sich Querverweise zu meinen ebenfalls im Springer-Verlag erschienenen Büchern *Mathematik ist schön*, *Mathematik ist wunderbar* und *Mathematik ist wunderwunderschön*. Außerdem enthalten die Literaturhinweise

auch jeweils konkrete Angaben über die Spektrum-Kalenderblätter sowie ggf. auch über Beiträge im *MNU Journal*, wo ich einige der genialen Ideen (in Kurzfassung) beschrieben hatte.

Der gewählte Aufbau – und natürlich der vorgegebene Gesamtumfang des Buches – haben dazu geführt, dass es *nur* 18 geniale Ideen sind, die hier vorgestellt werden können. Mir war es sehr wichtig, über mehr zu berichten als nur über die einzelnen Ideen. Ich hoffe, es wird deutlich, wie spannend es sein kann, sich mit den Schicksalen der ausgewählten Personen zu beschäftigen, die oft durch besondere historische Ereignisse mit geprägt wurden.

Die Auswahl der genialen Ideen mag willkürlich erscheinen. Keinesfalls erhebe ich den Anspruch, dass alle Epochen und alle Länder (Kulturen) *repräsentativ* vertreten sind. Die Resonanz auf dieses Buch wird zeigen, ob es eine weitere Gelegenheit geben wird, beispielsweise auch über geniale Ideen von Mathematikerinnen oder über indische und chinesische Mathematiker zu berichten. Weitere geniale Ideen wie beispielsweise der euklidische Algorithmus, diophantische Gleichungen, Faulhaber'sche Formeln usw. bieten sich für eine Fortsetzung ebenfalls an.

Die Kapitel dieses Buches sind weitgehend unabhängig voneinander lesbar – wo es sinnvoll ist, werden Bezüge zu anderen Kapiteln aufgezeigt.

Die Themen sind durchweg mit schulischem Vorwissen aus der Mittel- oder Oberstufe nachvollziehbar; in diesem Buch werden also keine mathematischen Theorien entwickelt, die deutlich über das an der Schule erreichbare Niveau hinausgehen. Daher empfiehlt sich das Buch für alle, die sich gern mit Mathematik beschäftigen, und ist beispielsweise auch für Arbeitsgemeinschaften an Schulen und als Anregung für Facharbeiten geeignet.

Herzlich bedanke ich mich bei allen, die mich bei der Vorbereitung und Umsetzung des Buchprojekts unterstützt haben,

- bei meiner Frau, die es geduldig ertrug, dass ich mich auch diesmal wieder in die schöne Welt der Mathematik vertiefte,
- bei meinem Sohn Andreas, der die Porträts der ausgewählten Mathematiker im Stile des urban sketching zeichnete (www.kunst-a-s.de),
- bei Wilfried Herget, dessen hilfreiche Formulierungsvorschläge wesentlich zur besseren Lesbarkeit meiner Texte beigetragen haben, sowie
- bei Robert Kragler, der alle Kapitel sorgfältig überprüft hat,

und nicht zuletzt bei Andreas Rüdinger, Iris Ruhmann und Carola Lerch vom Springer Verlag, die dieses Buch ermöglichten.

Heinz Klaus Strick

Inhaltsverzeichnis

1	Pythagoras von Samos – Sektenführer und Philosoph	1
1.1	Einfach genial: Pythagoreische Zahlenmuster	3
1.1.1	Dreieckszahlen	4
1.1.2	Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen	10
1.1.3	Winkelhaken	12
1.1.4	Pythagoreische Zahlentripel	14
1.2	Wer war Pythagoras? Wer waren die Pythagoreer?	17
1.3	Weitere pythagoreische Zahlenmuster	20
1.4	Literaturhinweise	21
2	Archimedes von Syrakus – Mathematiker, Physiker und Ingenieur	23
2.1	Einfach genial: Archimedes bestimmt den Flächeninhalt eines Parabelsegments	24
2.2	Wer war Archimedes?	29
2.3	Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Archimedes außerdem?	35
2.3.1	Über die Methode	36
2.3.2	Über das Gleichgewicht ebener Flächen	36
2.3.3	Kreismessung	38
2.3.4	Über Spiralen	41
2.3.5	Über Kugel und Zylinder	43
2.3.6	Archimedisches Axiom	47
2.3.7	Stomachion	47
2.3.8	Sandrechner	48
2.3.9	Das Buch der Lemmata	48
2.3.10	Über regelmäßige Körper	53
2.4	Literaturhinweise	55

3	Muhammed al-Khwarizmi – Vater der Algebra	57
3.1	Einfach genial: al-Khwarizmis Methode zur Lösung quadratischer Gleichungen.	58
3.1.1	Lösung des Aufgabentyps „Quadrate und Wurzeln sind gleich Zahlen“	59
3.1.2	Lösung des Aufgabentyps „Quadrate und Zahlen sind gleich Wurzeln“	61
3.1.3	Lösung des Aufgabentyps „Quadrate sind gleich Wurzeln und Zahlen“	66
3.2	Wer war al-Khwarizmi?	69
3.3	Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich al-Khwarizmi außerdem?	70
3.4	Literaturhinweise	71
4	Ali al-Hasan Ibn al-Haitham – Vater der Optik	73
4.1	Einfach genial: Ibn al-Haitham leitet eine Summenformel für Quadratzahlen her.	74
4.2	Wer war Ibn al-Haitham?	76
4.3	Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich al-Haitham außerdem?	78
4.4	Literaturhinweise	82
5	Abu Arrayhan al-Biruni – Universalgelehrter aus Afghanistan	85
5.1	Einfach genial: Abu Arrayhan al-Biruni bestimmt den Erdradius	86
5.1.1	Bestimmung des Erdradius durch Eratosthenes.	86
5.1.2	Messungen und Rechnungen zur Bestimmung einer Berghöhe	88
5.1.3	Messungen und Rechnungen zur Bestimmung des Erdradius	89
5.1.4	Ergebnis der Messungen und Berechnungen al-Birunis	90
5.2	Wer war al-Biruni?	91
5.3	Mit welchen Themen beschäftigte sich al-Biruni außerdem?	93
5.4	Literaturhinweise	96
6	Omar Khayyam – Mathematiker, Philosoph und Dichter	97
6.1	Einfach genial: Omar Khayyams geometrische Methode zur Lösung kubischer Gleichungen	98
6.1.1	Die 25 möglichen Typen von Gleichungen maximal 3. Grades	99
6.1.2	Lösungen der verschiedenen Gleichungstypen	101
6.2	Wer war Omar Khayyam?	108
6.3	Vierzeiler von Omar Khayyam	110
6.4	Literaturhinweise	113

7	Jamshid al-Kashi – letzter bedeutender Mathematiker des islamischen Mittelalters	115
7.1	Einfach genial: Jamshid al-Kashi bestimmt $\sin(1^\circ)$ auf 18 Stellen genau	117
7.2	Wer war al-Kashi?	120
7.3	Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich al-Kashi außerdem?	121
7.4	Literaturhinweise	126
8	Niccolò Tartaglia und Girolamo Cardano – wem gebührt die Ehre?	127
8.1	Einfach genial: Niccolò Tartaglia entwickelt ein Lösungsverfahren für eine kubische Gleichung	129
8.1.1	Lösung der speziellen Gleichung $x^3 + 6x = 20$	130
8.1.2	Lösung der allgemeinen Gleichung $x^3 + bx = c$	131
8.1.3	Lösung der anderen Gleichungstypen	132
8.2	Wer waren Girolamo Cardano und Niccolò Tartaglia?	134
8.2.1	Cardanos erste Lebensjahre	134
8.2.2	Tartaglias erste Lebensjahre	135
8.2.3	Cardano nimmt Kontakt zu Tartaglia auf	136
8.2.4	Das Ende der dramatischen Geschichte	137
8.3	Literaturhinweise	139
9	John Napier – Meister des Rechnens	141
9.1	Einfach genial: John Napier erfindet seine Logarithmen	142
9.1.1	Vordenker Michael Stifel	142
9.1.2	Napiers Logarithmen	144
9.1.3	Rechnen mit Napiers Logarithmen	146
9.1.4	Die dekadischen Logarithmen des Henry Briggs	148
9.1.5	Anwendung der Logarithmengesetze	151
9.2	Wer war John Napier?	153
9.3	Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Napier außerdem?	154
9.3.1	Die Napier'schen Rechenstäbe	155
9.3.2	Der Napier'sche Schachbrett-Rechner	158
9.3.3	Die Napier'schen Regeln	159
9.4	Entwicklung besonderer Rechenmethoden um das Jahr 1600	160
9.4.1	Die Methode der Prosthaphaeresis	160
9.4.2	Jost Bürgis <i>Progress Tabulen</i>	162
9.4.3	Verbreitung der Logarithmenrechnung	163
9.5	Literaturhinweise	166

10 René Descartes – Begründer der Analytischen Geometrie	169
10.1 Einfach genial: René Descartes entdeckt eine Vorzeichenregel für Polynome	170
10.2 Wer war René Descartes?	174
10.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Descartes außerdem?	177
10.3.1 Das kartesische Blatt	177
10.3.2 Der Descartes'sche Vier-Kreise-Satz	178
10.3.3 Descartes' Lösung des Tangentenproblems	181
10.3.4 Descartes' geometrische Lösung einer quadratischen Gleichung vom Typ $x^2 + ax = b^2$	185
10.4 Zum Beweis der Vorzeichenregel von Descartes	185
10.5 Literaturhinweise	189
11 Pierre de Fermat – verkanntes Mathematikgenie aus der Provinz	191
11.1 Einfach genial: Pierre de Fermats Methode der Flächenbestimmung bei Potenzfunktionen	192
11.2 Wer war Pierre de Fermat?	195
11.3 Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Fermat außerdem?	203
11.3.1 Formeln für Potenzsummen	203
11.3.2 Fermat'sche Spirale	204
11.3.3 Fermat-Punkt	205
11.3.4 Anwendung der Methode des unendlichen Abstiegs	206
11.3.5 Darstellung von Primzahlen als Summe von Quadratzahlen	207
11.3.6 Lösung der sog. Pell'schen Gleichung	210
11.3.7 Mersenne- und Fermat-Primzahlen	212
11.3.8 Kleiner Fermat'scher Satz	213
11.3.9 Fermat'scher Primzahltest	216
11.3.10 Faktorisierung großer Zahlen	217
11.3.11 Ein Beitrag Fermats zur Physik	219
11.4 Literaturhinweise	220
12 Blaise Pascal – tief sinniger Theologe und Mathematiker	223
12.1 Einfach genial: Pascals Lösung des <i>Problème des partis</i>	224
12.1.1 Fermats kombinatorische Lösung	224
12.1.2 Pascals rekursive Methode	226
12.1.3 Pascals geniale Lösung mithilfe des <i>triangle arithmétique</i>	228
12.1.4 Die Lösungsversuche von Pacioli, Tartaglia und Cardano	233

12.2	Wer war Blaise Pascal?	234
12.3	Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Pascal außerdem?	237
12.3.1	Weiterer Beitrag zur Wahrscheinlichkeitsrechnung	237
12.3.2	Summenformel für Potenzen natürlicher Zahlen und Ansätze zur Integralrechnung	239
12.3.3	Pascals Beiträge zur Physik	240
12.3.4	Pascals <i>Traité général de la Roulette</i>	241
12.4	Literaturhinweise	242
13	Abraham de Moivre – ein genialer Franzose im englischen Exil	243
13.1	Einfach genial: Abraham de Moivre entdeckt den Zusammenhang zwischen den Mehrfachwinkelsätzen und den komplexen Zahlen	245
13.1.1	Die Moivre'sche Formel.	245
13.1.2	Anwendung der Moivre'schen Formel beim Ziehen einer n -ten Wurzel	247
13.1.3	Lösung einer kubischen Gleichung mithilfe eines Dreifachwinkelsatzes	247
13.1.4	Die Euler'sche Gleichung	249
13.1.5	Darstellung von n -ten Wurzeln in der Gauß'schen Zahlenebene	251
13.2	Wer war Abraham de Moivre?	253
13.3	Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich de Moivre außerdem?	255
13.4	Literaturhinweise	260
14	Leonhard Euler – „unser aller Meister“	261
14.1	Einfach genial: Leonhard Euler löst das Basler Problem.	262
14.2	Wer war Leonhard Euler?	271
14.3	Mit welchen Themen beschäftigte sich Leonhard Euler außerdem?	274
14.3.1	Zusammenhang zwischen der harmonischen Reihe und der Logarithmusfunktion	275
14.3.2	Die Euler'sche Gammafunktion.	276
14.3.3	Beiträge Eulers zur Zahlentheorie	277
14.3.4	Eulers Lösung des Rencontre-Problems	282
14.3.5	Eulers Beiträge zur Kombinatorik	285
14.3.6	Der Euler'sche Polyedersatz	291
14.3.7	Euler begründet die Graphentheorie	292
14.4	Literaturhinweise	294

15	Joseph-Louis Lagrange – vielseitiger Mathematiker und Physiker	297
15.1	Einfach genial: Joseph-Louis Lagrange charakterisiert periodische Kettenbrüche	299
15.1.1	Endliche Kettenbrüche	299
15.1.2	Unendliche Kettenbrüche	305
15.2	Wer war Joseph-Louis Lagrange?	313
15.3	Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Lagrange außerdem?	316
15.4	Ergänzung: Kettenbrüche bei Huygens, Brounker und Wallis	320
15.5	Literaturhinweise	321
16	Jean Baptiste Joseph Fourier – von der Französischen Revolution zur Revolution der Wärmelehre	323
16.1	Einfach genial: Joseph Fourier approximiert periodische Funktionen mithilfe trigonometrischer Funktionen	325
16.1.1	Eigenschaften von Produkten trigonometrischer Funktionen	325
16.1.2	Der Fourier'sche Ansatz für eine Reihenentwicklung	328
16.1.3	Beispiele von Fourier-Reihen	329
16.2	Wer war Jean Baptiste Joseph Fourier?	333
16.3	Literaturhinweise	336
17	William Rowan Hamilton – ein unglückliches Genie aus Irland	337
17.1	Einfach genial: William Rowan Hamilton entdeckt die Quaternionen	340
17.1.1	Hamilton findet eine angemessene algebraische Struktur für die komplexen Zahlen	341
17.1.2	Hamilton entdeckt die Quaternionen	343
17.2	Wer war William Rowan Hamilton?	346
17.3	Mit welchen (mathematischen) Themen beschäftigte sich Hamilton außerdem?	348
17.4	Literaturhinweise	349
18	Georg Cantor – Erforscher des Unendlichen	351
18.1	Einfach genial: Georg Cantor unterscheidet Abzählbarkeit und Überabzählbarkeit von unendlichen Mengen	352
18.1.1	Gleichmächtige unendliche Zahlenmengen	352
18.1.2	Mächtigkeit der Menge der rationalen Zahlen	355
18.1.3	Mächtigkeit der Menge der algebraischen Zahlen	359
18.1.4	Die Überabzählbarkeit der Menge der transzendenten Zahlen	361
18.1.5	Die Cantor-Menge	363

18.2	Wer war Georg Cantor?	364
18.3	Eine Alternative zum ersten Cantor'schen Diagonalverfahren: Der Stern-Brocot-Baum	368
18.4	Literaturhinweise	373
	Allgemeine Literaturhinweise	375
	Stichwortverzeichnis	377

Pythagoras von Samos – Sektenführer und Philosoph

1

Die Zahl ist das Wesen aller Dinge. Das Universum ist auf der Macht der Zahlen aufgebaut.



Beim Stichwort *Pythagoras* fällt den meisten natürlich die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ ein und vermutlich auch der Zusammenhang mit einem rechtwinkligen Dreieck.

Nach Meinung der Postverwaltung Nicaraguas zählt diese Gleichung zu den *zehn Formeln, die das Antlitz der Erde veränderten*.



Die Aussage des *Satzes des Pythagoras* enthält aber etwas mehr als nur die bekannte Gleichung mit den Quadraten über den drei Seiten eines Dreiecks ...

Satz

Satz des Pythagoras

- Wenn in einem Dreieck der Winkel γ ein rechter Winkel ist, dann gilt zwischen den Längen der Katheten a , b und der Hypotenuse c die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$, d. h., die Quadrate über den beiden Katheten sind zusammen genauso groß wie das Quadrat über der Hypotenuse.

Es gilt aber auch die

Umkehrung des Satzes

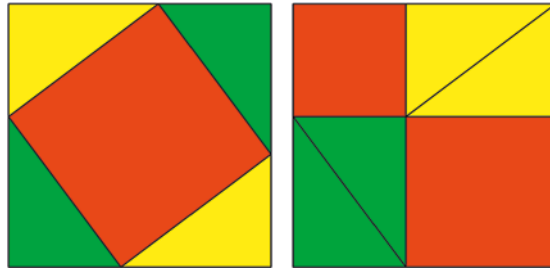
- Wenn für die Seitenlängen von a , b , c eines Dreiecks die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, dann ist der Winkel γ , welcher der Seite c gegenüberliegt, ein rechter Winkel.

Dies sind wirklich bemerkenswerte Aussagen:

- Wenn die drei Streckenlängen die Gleichung erfüllen, dann ist eine Aussage über einen der Winkel in dem Dreieck möglich.
- Wenn in einem Dreieck ein rechter Winkel vorliegt, dann ist eine Aussage über die Streckenlängen möglich.

Der Satz wurde in Ägypten und Babylonien bereits viele Jahrhunderte *vor* Pythagoras angewandt. Und daher fragt man sich mit Recht, warum der Satz nach dem berühmten Griechen benannt ist, von dem einige Forscher sogar sagen, dass er gar kein Mathematiker war.

Zweifel sind daher auch angebracht, dass es tatsächlich Pythagoras selbst war, der den Satz (genauer: den ersten Teil des Satzes) anhand der folgenden beiden Abbildungen bewies. Das jedenfalls behauptete der griechische Mathematiker **Proclus** (412–485 n. Chr.), der viele Jahrhunderte nach Pythagoras lebte.



Ein solcher *Beweis ohne Worte* passt aber wunderbar zu den *genialen Ideen*, die in diesem Kapitel angesprochen werden.

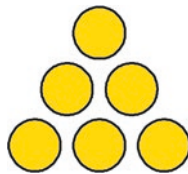
Und diese beiden zum Beweis gehörenden Abbildungen belegen auch:

- Mathematische Einsichten lassen sich auch ohne Rechnung gewinnen!

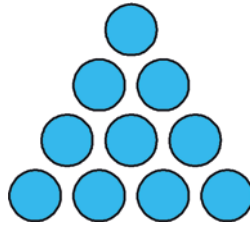
1.1 Einfach genial: Pythagoreische Zahlenmuster

Bei Pythagoras und seinen Schülern, den Pythagoreern, hatte jede Zahl ihre eigene, mystische Persönlichkeit:

- Die Eins ist keine eigentliche Zahl, aber sie ist Ausgangspunkt aller Zahlen.
- Gerade Zahlen sind weiblich, ungerade sind männlich.
- Die Zahl 5 ist als Summe der beiden kleinsten echten Zahlen, nämlich der kleinsten geraden und der kleinsten ungeraden Zahl, Symbol für die Ehe.
- Die Zahl 6 ist gleich der Summe ihrer echten Teiler: $6 = 1 + 2 + 3$; die Pythagoreer bezeichneten sie als *vollkommene* Zahl (vgl. hierzu auch Kap. 11).



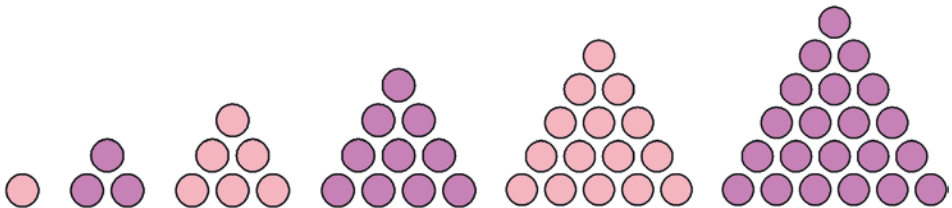
- Die Zahl 10 gilt als heilige Zahl; sie ist Summe der ersten vier Zahlen und Basis unseres Zahlensystems. Außerdem lässt sie sich in Form eines wunderbar symmetrischen gleichseitigen Dreiecks darstellen (**Tetraktys** = Vierheit).



- Die Tetraktys steht auch für die *Elemente* Feuer, Luft, Wasser und Erde sowie für die *Dimensionen* (1=ein Punkt; 2=Linie aus zwei Punkten; 3=Fläche, definiert durch die drei Punkte eines gleichseitigen Dreiecks; 4=Raum, definiert durch die vier Punkte eines regelmäßigen Tetraeders).
- Zehn ist auch die Anzahl der Objekte im Kosmos der Pythagoreer: Erde und Gegen-erde (Antichthon), Sonne, Mond, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn und die Fixsternsphäre.
- Die Zahlen 1, 2, 3 und 4 der Tetraktys spielen in der musikalischen Harmonik eine entscheidende Rolle: Wenn man die Länge einer Saite von ihrer ursprünglichen Länge auf die Hälfte verkürzt, also im Verhältnis 2:1 verändert, dann liegt der neue Ton um eine Oktave höher, bei Verkürzung im Verhältnis 3:2 bzw. 4:3 um eine Quinte bzw. Quarte.
- Die Zahl 17 gilt als Unglückszahl, die zu meiden ist; denn sie liegt zwischen den Zahlen 16 und 18. Diese beiden Zahlen sind besondere Zahlen; es sind nämlich die einzigen natürlichen Zahlen, die sowohl für den Flächeninhalt als auch für den Umfang einer Figur stehen können:
 $16 = 4 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4$ für ein Quadrat der Seitenlänge 4 und
 $18 = 3 \times 6 = 3 + 6 + 3 + 6$ für ein Rechteck mit den Seitenlängen 3 und 6.

1.1.1 Dreieckszahlen

Nicht nur die beiden Zahlen 6 und 10 lassen sich mithilfe von bunten Steinen in Form eines gleichseitigen Dreiecks darstellen, vgl. folgende Abb.



Diese so darstellbaren natürlichen Zahlen werden als **Dreieckszahlen** bezeichnet. Es handelt sich um eine Zahlenfolge mit den Elementen 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...

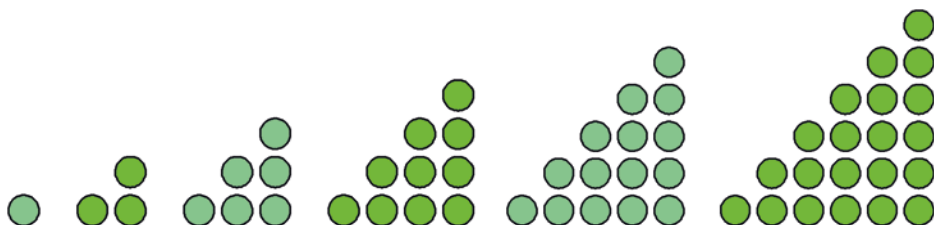
Im Verzeichnis der Folgen mit ganzzahligen Elementen (OEIS = Online Encyclopedia of Integer Sequences) trägt diese Folge der *Triangular Numbers* die Nummer A000217.

Die n -te Dreieckszahl $\Delta(n)$ ist definiert als die Summe der ersten n natürlichen Zahlen:

$$\Delta(1) = 1; \Delta(2) = 1 + 2 = 3; \Delta(3) = 1 + 2 + 3 = 6; \Delta(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10;$$

$$\Delta(5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = \sum_{k=1}^5 k = 15; \quad \Delta(6) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \sum_{k=1}^6 k = 21; \dots$$

Die Dreieckszahlen können auch in der Form eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks veranschaulicht werden:

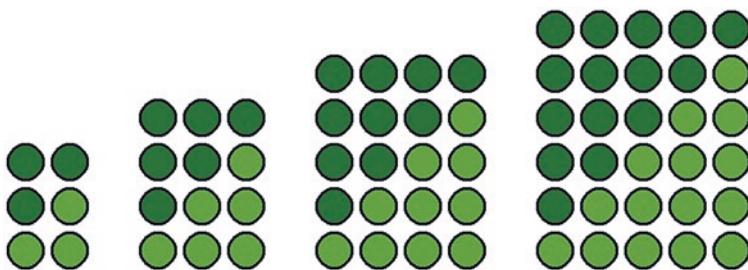


Wählt man diese Form der Darstellung, dann werden unmittelbar zwei Gesetzmäßigkeiten deutlich:

- Durch Verdopplung des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks erhält man ein Rechteck mit der gleichen Breite wie das Dreieck und mit einer Höhe, die um 1 größer ist als die Breite:

$$2 \cdot \Delta(2) = 2 \cdot 3; 2 \cdot \Delta(3) = 3 \cdot 4; 2 \cdot \Delta(4) = 4 \cdot 5; 2 \cdot \Delta(5) = 5 \cdot 6$$

Es gilt also allgemein: $2 \cdot \Delta(n) = n \cdot (n + 1)$

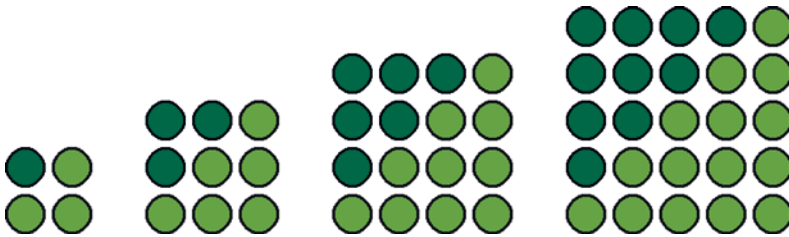


Formel**Summe der ersten n natürlichen Zahlen**

Für die n -te Dreieckszahl $\Delta(n)$, also für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, gilt:

$$\Delta(n) = \sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$$

Eine alternative Möglichkeit, diese Formel herzuleiten, ergibt sich aus der folgenden Abbildungssequenz, bei der jeweils zwei aufeinanderfolgende Dreieckszahlen-Muster sich zu einem Quadrat ergänzen:



$$\Delta(1) + \Delta(2) = 2^2; \Delta(2) + \Delta(3) = 3^2; \Delta(3) + \Delta(4) = 4^2; \Delta(4) + \Delta(5) = 5^2.$$

Es gilt also allgemein für $n \geq 2$: $\Delta(n-1) + \Delta(n) = n^2$, in Worten:

- Die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen ergibt eine Quadratzahl.

Da sich die beiden aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen $\Delta(n-1)$ und $\Delta(n)$ nur um die natürliche Zahl n unterscheiden, nämlich $\Delta(n) = \Delta(n-1) + n$, ergibt sich hieraus

$$\Delta(n-1) + \Delta(n) = [\Delta(n) - n] + \Delta(n) = n^2, \text{ also}$$

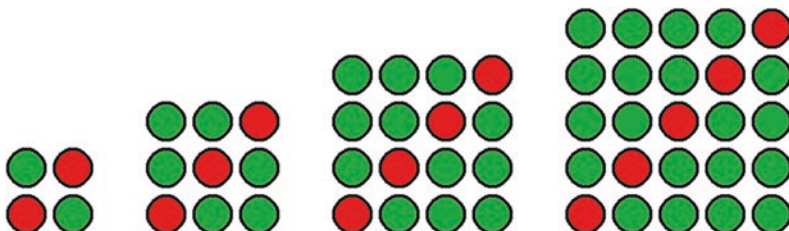
$$2 \cdot \Delta(n) = n^2 + n \text{ und somit ebenfalls } \Delta(n) = \frac{1}{2} \cdot (n^2 + n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1).$$

Aus der folgenden Sequenz ergibt sich

$$2 \cdot \Delta(1) + 2 = 2^2; 2 \cdot \Delta(2) + 3 = 3^2; 2 \cdot \Delta(3) + 4 = 4^2; 2 \cdot \Delta(4) + 5 = 5^2,$$

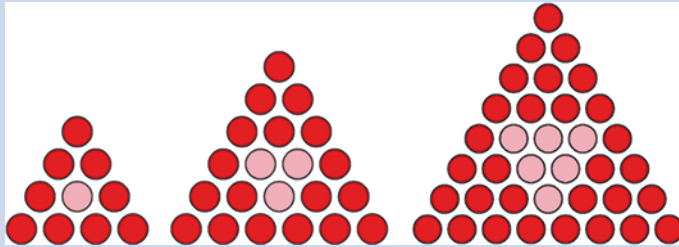
also allgemein $2 \cdot \Delta(n) + (n+1) = (n+1)^2$.

Hieraus folgt: $2 \cdot \Delta(n) = (n+1)^2 - (n+1)$ und weiter $2 \cdot \Delta(n) = n^2 + n$, vgl. Abb.



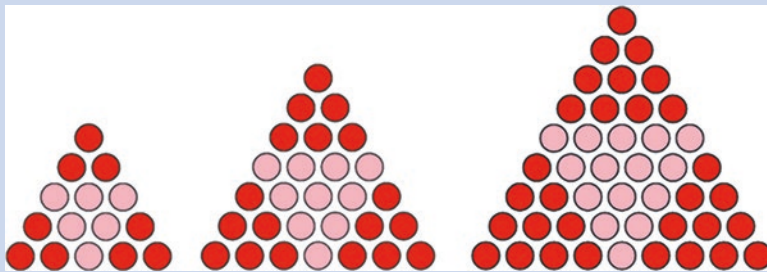
Durch unterschiedliche Färbungen von Teilfiguren lassen sich mithilfe der beiden Darstellungsformen weitere Gesetzmäßigkeiten für Dreieckszahlen entdecken, vgl. die folgenden Beispiele. Ob die Pythagoreer diese Zusammenhänge auch entdeckt haben, ist nicht bekannt, es erscheint aber durchaus möglich ...

Beispiel 1



$$\Delta(4) = 3 \cdot \Delta(2) + \Delta(1); \Delta(6) = 3 \cdot \Delta(3) + \Delta(2); \Delta(8) = 3 \cdot \Delta(4) + \Delta(3).$$

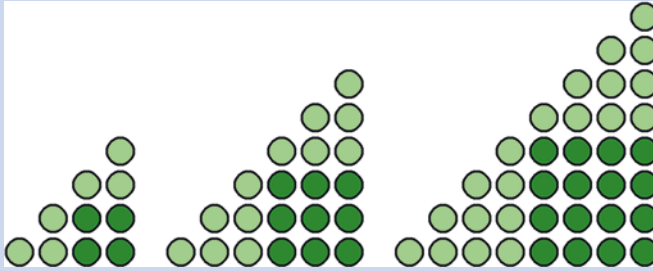
- Für gerade Zahlen $2n$ gilt also allgemein: $\Delta(2n) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n-1)$.



$$\Delta(5) = 3 \cdot \Delta(2) + \Delta(3); \Delta(7) = 3 \cdot \Delta(3) + \Delta(4); \Delta(9) = 3 \cdot \Delta(4) + \Delta(5).$$

Die Beziehung gilt auch für $n = 3$: $\Delta(3) = 6 = 3 \cdot \Delta(1) + \Delta(2)$.

- Für ungerade Zahlen $2n + 1$ gilt also allgemein:
 $\Delta(2n + 1) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n + 1)$.

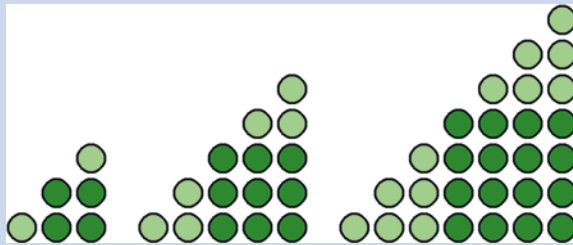
Beispiel 2

$$\Delta(4) = 2 \cdot \Delta(2) + 2^2; \Delta(6) = 2 \cdot \Delta(3) + 3^2; \Delta(8) = 2 \cdot \Delta(4) + 4^2.$$

- Für gerade Zahlen $2n$ gilt also allgemein: $\Delta(2n) = 2 \cdot \Delta(n) + n^2$

Wegen $\Delta(n-1) + \Delta(n) = n^2$ folgt hieraus:

$$\Delta(2n) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n-1), \text{ vgl. Beispiel 1.}$$



$$\Delta(3) = 2 \cdot \Delta(1) + 2^2; \Delta(5) = 2 \cdot \Delta(2) + 3^2; \Delta(7) = 2 \cdot \Delta(3) + 4^2.$$

- Für ungerade Zahlen $2n+1$ gilt also allgemein: $\Delta(2n+1) = 2 \cdot \Delta(n) + (n+1)^2$

Wegen $\Delta(n) + \Delta(n+1) = (n+1)^2$ folgt hieraus:

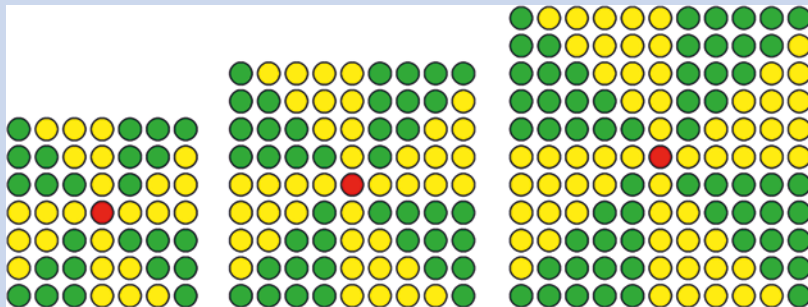
$$\Delta(2n+1) = 3 \cdot \Delta(n) + \Delta(n+1), \text{ vgl. Beispiel 1.}$$

Beispiel 3

$$\Delta(7) = 9 \cdot \Delta(2) + 1; \Delta(10) = 9 \cdot \Delta(3) + 1; \Delta(13) = 9 \cdot \Delta(4) + 1.$$

- Für natürliche Zahlen vom Typ $3n + 1$, also für Zahlen, die bei der Division durch 3 den Rest 1 lassen, gilt allgemein: $\Delta(3n + 1) = 9 \cdot \Delta(n) + 1$

Die Beziehung gilt auch für $n = 1$: $\Delta(4) = 10 = 9 \cdot \Delta(1) + 1$.

Beispiel 4

$$8 \cdot \Delta(3) + 1 = 7^2; 8 \cdot \Delta(4) + 1 = 9^2; 8 \cdot \Delta(5) + 1 = 11^2.$$

- Allgemein gilt: $8 \cdot \Delta(n) + 1 = (2n + 1)^2$.

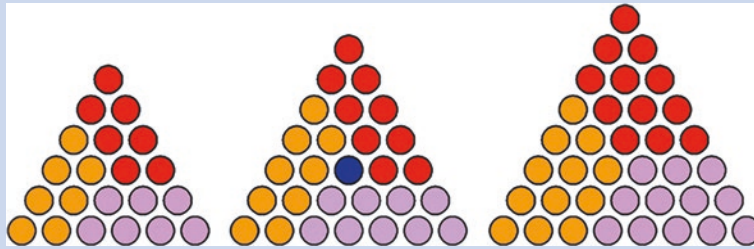
Die Beziehung gilt auch für $n = 1$: $8 \cdot \Delta(1) + 1 = 3^2$ sowie für $n = 2$: $8 \cdot \Delta(2) + 1 = 5^2$.

Auf diese Formel machte der griechische Mathematiker **Diophant** (ca. 250 n. Chr.) aufmerksam; vielleicht wurde sie aber bereits vorher entdeckt.

Beispiel 5

Die *Differenz* von Dreieckszahlen kann man durch symmetrische Trapeze veranschaulichen. Die drei abgebildeten Figuren zeigen die Beziehungen

$$3 \cdot [\Delta(4) - \Delta(2)] = \Delta(6); \quad 3 \cdot [\Delta(5) - \Delta(3)] + 1 = \Delta(7); \quad 3 \cdot [\Delta(5) - \Delta(2)] = \Delta(8)$$



Allgemein gilt:

$$3 \cdot [\Delta(2n) - \Delta(n)] = \Delta(3n), \quad 3 \cdot [\Delta(2n+1) - \Delta(n+1)] + 1 = \Delta(3n+1) \text{ und} \\ 3 \cdot [\Delta(2n+1) - \Delta(n)] = \Delta(3n+2).$$

1.1.2 Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen

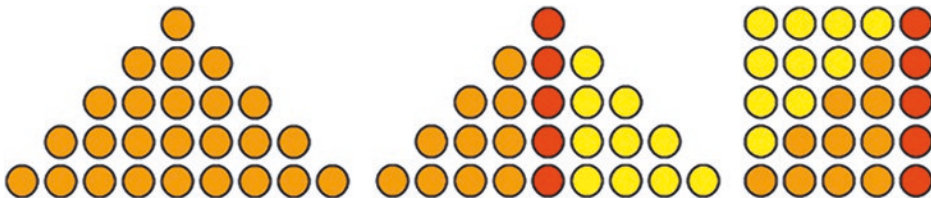
Bildet man fortlaufend die Summe der ersten ungeraden natürlichen Zahlen, so erhält man die Zahlenfolge

$$1 = 1^2; \quad 1 + 3 = 2^2; \quad 1 + 3 + 5 = 3^2; \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2; \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2 \dots$$

also die Folge der Quadratzahlen.

Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen kann man durch *symmetrische* Dreiecke veranschaulichen, vgl. die folgende Abb. links.

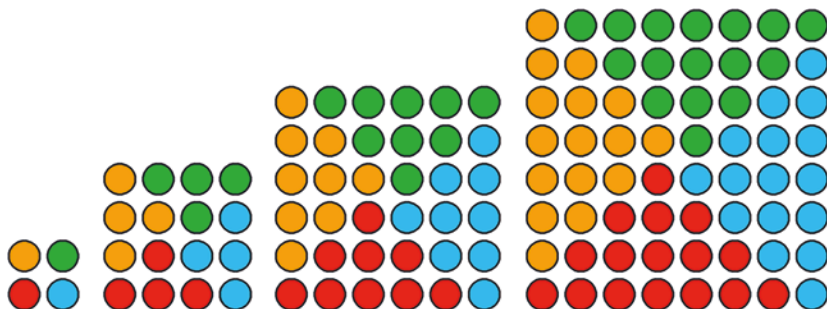
Durch Umlegen der Steine kann man leicht zeigen, dass sich als Summe der ersten n ungeraden Zahlen tatsächlich stets eine Quadratzahl ergibt, vgl. die Abbildungen in der Mitte und rechts.



Eine alternative Möglichkeit, um nachzuweisen, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen eine Quadratzahl ergibt, kann man den folgenden Abbildungen entnehmen.

Hier ist:

$$4 \cdot 1 = 2^2; 4 \cdot (1 + 3) = 4^2; 4 \cdot (1 + 3 + 5) = 6^2; 4 \cdot (1 + 3 + 5 + 7) = 8^2.$$



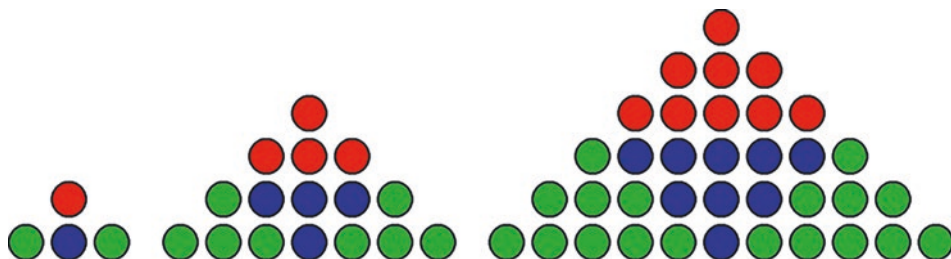
Allgemein gilt also $4 \cdot [1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)] = (2n)^2 = 4n^2$ und daher $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

Wenn die Anzahl der waagerechten Reihen in dieser symmetrischen Figur *gerade* ist, kann man ein besonderes Muster bilden:

Die symmetrische Figur kann in vier zueinander kongruente Teilfiguren unterteilt werden.

- Die erste 2-zeilige Figur links setzt sich aus vier einzelnen Steinen zusammen, also $1 + 3 = 4 \cdot 1$;
- die zweite 4-zeilige Figur enthält viermal die erste (2-zeilige) Figur, also $(1 + 3) + (5 + 7) = 4 \cdot (1 + 3)$;
- die dritte 6-zeilige Figur enthält viermal die 3-zeilige Figur, also $(1 + 3 + 5) + (7 + 9 + 11) = 4 \cdot (1 + 3 + 5)$;

usw.



Man kann dies auch so beschreiben: Oberhalb einer gedachten horizontalen Mittellinie liegt ein Viertel aller Steine der Figur, unterhalb liegen drei Viertel.

$$\frac{1}{3} = \frac{1 + 3}{5 + 7} = \frac{1 + 3 + 5}{7 + 9 + 11} = \frac{1 + 3 + 5 + 7}{9 + 11 + 13 + 15} \dots$$

Allgemein gilt also:

Regel

Eigenschaft der Summe der ersten $2n$ ungeraden natürlichen Zahlen

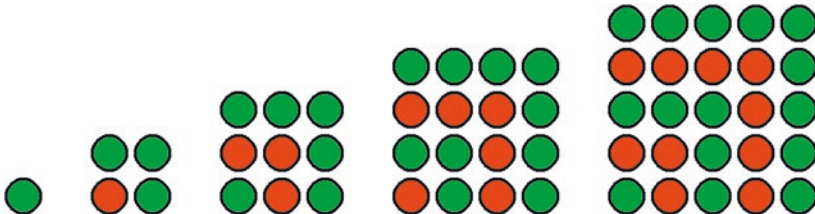
Betrachtet man die Summe der ersten $2n$ ungeraden natürlichen Zahlen, dann ist der Anteil der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ein-Drittel-mal so groß wie die Summe der nächsten n ungeraden natürlichen Zahlen.

Diese Eigenschaft der Summe der ungeraden natürlichen Zahlen wurde von Galileo Galilei (1564–1642) dokumentiert; sie hätte aber durchaus bereits von den Pythagoreern entdeckt werden können.

1.1.3 Winkelhaken

Wie in Abschn. 1.1.1 zu sehen war, lassen sich Quadrate auf unterschiedliche Weise durch Dreiecksformen aus bunten Steinen auslegen.

Ein weiteres Muster entsteht durch das Legen von sog. **Gnomonen**, auch Winkelhaken genannt: Oberhalb und rechts von einem vorhandenen Quadrat wird noch eine zusätzliche Reihe von bunten Steinen hinzugefügt.



Die Anzahl der hinzukommenden Steine ist jeweils *ungerade*.

In den Beispielen der Abbildung gilt:

$$1 = 1^2; 1 + 3 = 2^2; 1 + 3 + 5 = 3^2; 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2; 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2.$$

Hieraus ergibt sich die folgende Regel:

Formel

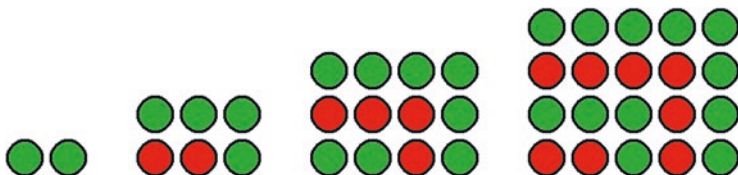
Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen

Die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen ist eine Quadratzahl und es gilt:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$$

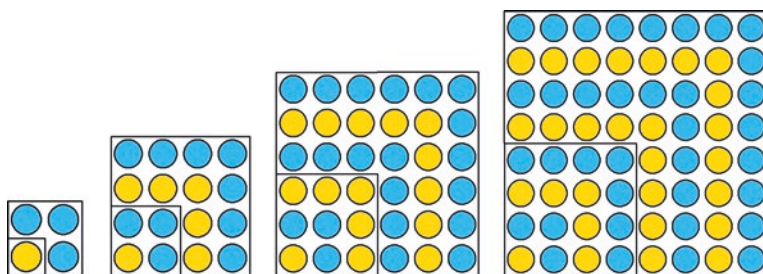
Analog könnte man auch *verlängerte* Winkelhaken betrachten, um eine Formel für die Summe der ersten n *geraden* natürlichen Zahlen aufzustellen:

$$2 = 1 \cdot 2; \quad 2 + 4 = 2 \cdot 3; \quad 2 + 4 + 6 = 3 \cdot 4; \quad 2 + 4 + 6 + 8 = 4 \cdot 5,$$



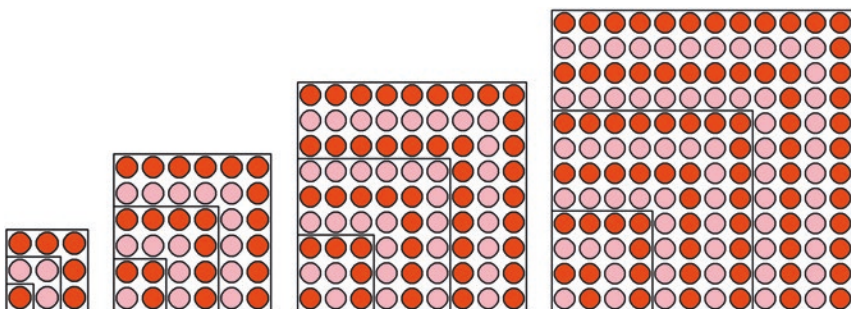
allgemein: $2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = \sum_{k=1}^n (2k) = n \cdot (n + 1)$; diese Formel folgt natürlich unmittelbar aus der Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen.

An der Winkelhakenfigur lässt sich auch die in Abschn. 1.1.2 beschriebene Eigenschaft des 1-zu-3-Verhältnisses der Summe ungerader Zahlen ablesen.

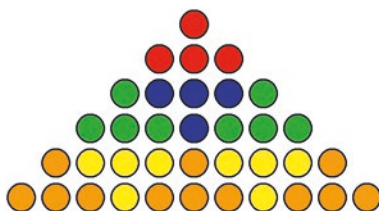


An der Darstellungsform mit Winkelhaken kann man außerdem entdecken, wie sich die o. a. Regel verallgemeinern lässt:

$$\begin{aligned} 1 : 3 : 5 &= (1 + 3) : (5 + 7) : (9 + 11) = (1 + 3 + 5) : (7 + 9 + 11) : (13 + 15 + 17) \\ &= (1 + 3 + 5 + 7) : (9 + 11 + 13 + 15) : (17 + 19 + 21 + 23) \end{aligned}$$



Hinweis Diese Verallgemeinerung lässt sich auch an den in Abschn. 1.1.2 betrachteten symmetrischen Dreiecken veranschaulichen, vgl. die folgende Abbildung.



1.1.4 Pythagoreische Zahlentripel

Zahlentripel $(a; b; c)$ aus natürlichen Zahlen a, b, c werden als **pythagoreische Zahlentripel** bezeichnet, wenn sie die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Bereits den Babyloniern war bekannt, dass man *alle* diese Zahlentripel $(a; b; c)$ mithilfe des Ansatzes $a = u^2 - v^2$, $b = 2 \cdot u \cdot v$ und $c = u^2 + v^2$ finden kann (wobei $u, v \in \mathbb{N}$ mit $u > v$).

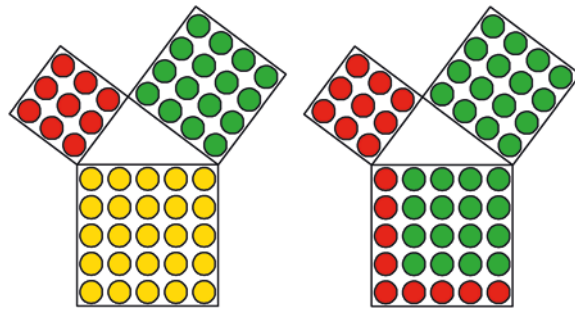
Zum Beweis vgl. beispielsweise *Mathematik ist schön*, Abschn. 2.7.4.

Die Tripel mit $u \leq 5$ können der folgenden Tabelle entnommen werden.

u	v	$a = u^2 - v^2$	$b = 2 \cdot u \cdot v$	$c = u^2 + v^2$
2	1	3	4	5
3	1	8	6	10
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	2	12	16	20
4	3	7	24	25
5	1	24	10	26
5	2	21	20	29
5	3	16	30	34
5	4	9	40	41

Um solche Zahlentripel zu finden, kann man aber auch anschaulich vorgehen und geeignete Muster aus bunten Steinen verwenden. Die folgenden beiden Abbildungen verdeutlichen die zugrunde liegende Idee:

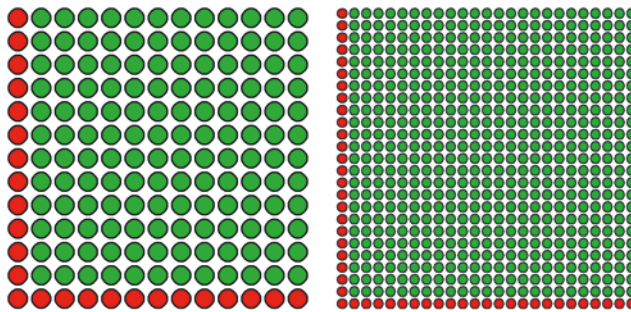
Damit die Bedingung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist, muss die Anzahl der rot gefärbten Steine sowohl eine Quadratzahl sein als auch durch einen Winkelhaken dargestellt werden können.



Und da die Winkelhaken aus einer ungeraden Anzahl von Steinen bestehen, kommen also nur die ungeraden Quadratzahlen infrage. Die kleinste ungerade Quadratzahl ist die Zahl 9; die Wurzel aus dieser Zahl bestimmt die Seitenlänge des kleineren Kathetenquadrats in der o. a. Pythagoras-Figur.

Die nächstgrößere ungerade Quadratzahl ist 25: Ein Winkelhaken aus 25 Steinen begrenzt ein Quadrat der Seitenlänge 12, d. h., die Zahlen 5, 12 und 13 bilden ein pythagoreisches Zahlentripel, vgl. Abb. links.

Dann folgt die ungerade Quadratzahl 49: Ein Winkelhaken aus 49 Steinen begrenzt ein Quadrat der Seitenlänge 24, d. h., die Zahlen 7, 24 und 25 bilden ein pythagoreisches Zahlentripel, vgl. Abb. rechts.



Auf diese Weise findet man *unendlich viele* pythagoreische Zahlentripel, die alle die Eigenschaft haben, dass sich die Länge der größeren Kathete von der Länge der Hypotenuse um 1 LE unterscheidet, da nur *ein* Winkelhaken um das größere Kathetenquadrat gelegt ist:

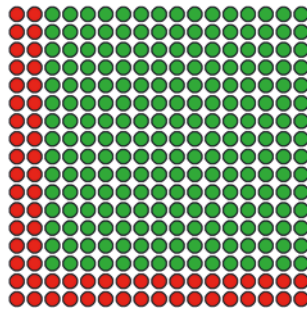
(3; 4; 5); (5; 12; 13); (7; 24; 25); (9; 40; 41); (11; 60; 61) usw.

- Allgemein ergibt sich: Die Zahlen $(2n + 1; 2n \cdot (n + 1); 2n \cdot (n + 1) + 1)$ bilden ein pythagoreisches Zahlentripel. Die längere Kathete und die Hypotenuse unterscheiden sich dabei um 1 LE.

Hinweis Die Terme für die Seitenlängen b und $c = b + 1$ ergeben sich aus folgender Rechnung: Aus $(2n + 1)^2 + b^2 = (b + 1)^2$ ergibt sich $(2n + 1)^2 = 2b + 1$, also $2b = 4n^2 + 4n$ und somit $b = 2n^2 + 2n = 2n \cdot (n + 1)$.

In der o. a. Tabelle mit Pythagoras-Tripeln kommen aber auch Zahlentripel vor, die nicht mithilfe nur *eines* Winkelhakens dargestellt werden können.

Beim Tripel (8; 15; 17) unterscheiden sich die Seitenlängen von b und c um 2. Daher werden für die Darstellung *zwei* Winkelhaken (aus $31 + 33 = 64 = 8^2$ Steinen) benötigt, vgl. die folgende Abbildung.



- Allgemein kann man zeigen: Die Zahlen $(2n; n^2 - 1; n^2 + 1)$ bilden ein pythagoreisches Zahlentripel. Die längere Kathete und die Hypotenuse unterscheiden sich dabei um 2 LE.

Im Prinzip kann man mithilfe angelegter Winkelhaken alle möglichen pythagoreischen Zahlentripel ermitteln. Bei dieser Vorgehensweise entdeckt man allerdings nicht bei jeder möglichen Figur ein neues Tripel.

Setzt man beispielsweise $n = 2$ in die allgemeine Form $(2n; n^2 - 1; n^2 + 1)$ ein, so ergibt sich das Tripel (4; 3; 5).

Beim Einsetzen von $n = 3$ erhält man (6; 8; 10) – das ist das Doppelte des bekannten Tripels (3; 4; 5).

Man kann beweisen, dass durch Hinzufügen von *drei* Winkelhaken kein einziges Tripel hinzukommt, das nicht bereits durch das Anhängen von einem oder zwei Winkelhaken entdeckt wurde.

Übrigens Das in der Tabelle oben enthaltene pythagoreische Tripel (20; 21; 29) kann mithilfe eines Quadrats der Seitenlänge 21 und *acht* Winkelhaken mit $43 + 45 + 47 + 49 + 51 + 53 + 55 + 57 = 400 = 20^2$ Steinen veranschaulicht werden.

1.2 Wer war Pythagoras? Wer waren die Pythagoreer?

Von Pythagoras kennt man weder die genauen Lebensdaten, noch sind Schriften von ihm überliefert. In der Literatur findet man bezüglich seiner Lebenszeit Angaben, die ungefähr den Zeitraum 570–495 v. Chr. umfassen. Quellen aus dieser Zeit fehlen und Berichte über sein Leben wurden erst Jahrzehnte nach seinem Tod verfasst – u. a. von Herodot (ca. 480–420 v. Chr.) und von Aristoteles (384–322 v. Chr.). Auch die meisten Legenden über Pythagoras entstanden erst Jahrhunderte später.

Man kann mit Sicherheit sagen, dass Pythagoras nicht so aussah wie vom berühmten Renaissance-Maler Raffael in seinem berühmten Fresco *La scuola di Atene* (Die Schule von Athen) dargestellt (auf den beiden Briefmarken jeweils links sitzend); denn Raffael porträtierte zeitgenössische Personen (beispielsweise wählte er Leonardo da Vinci als Modell für Plato). Auch andere Porträts entsprechen eher den Vorstellungen der Künstler als der Realität.



Ob Pythagoras der Sohn eines Gemmenschneiders war oder eines Kaufmanns, ist ebenso unklar wie der Zeitpunkt und die Dauer seiner Reisen, die ihn möglicherweise nach Phönizien, Ägypten und Mesopotamien führten. Lernete er Thales von Milet (ca. 624–547 v. Chr.) persönlich kennen, der in unmittelbarer Nachbarschaft lebte? War Anaximander (ca. 610–547 v. Chr.), einer der Schüler des Thales, vielleicht einer der Lehrer des Pythagoras?

Dass ein Satz der Mathematik nach einer Person benannt ist, die mit Sicherheit *nicht* der Entdecker des Satzes war, erscheint zunächst rätselhaft, lässt aber auf die Bedeutung der Person schließen und auf deren Wirkung auf ihre Nachwelt.

