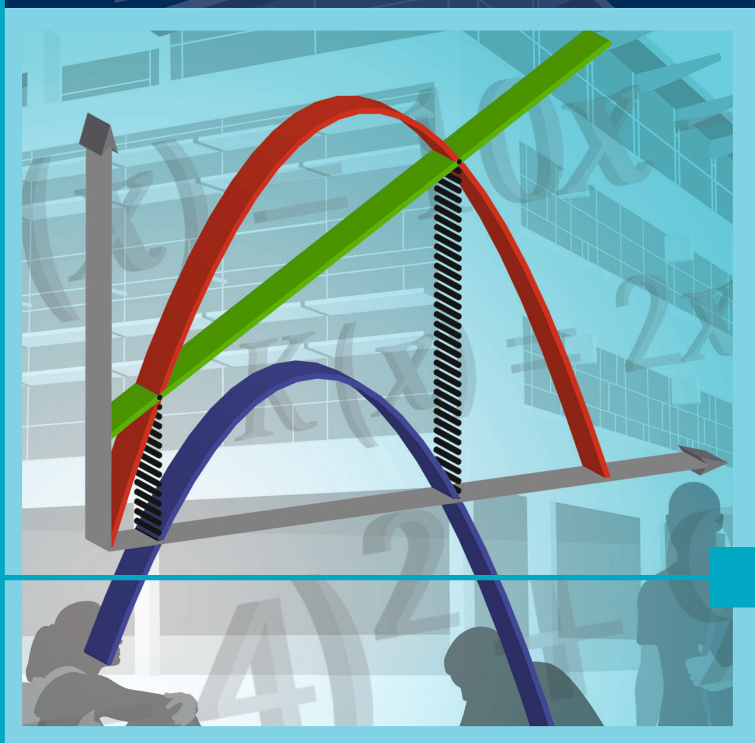
Helge Röpcke
Markus Wessler

Wirtschafts-mathematik

Methoden – Beispiele – Anwendungen



2., überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Röpcke / Wessler

Wirtschaftsmathematik

Weiterführende Titel aus der Reihe **Quantitative Methoden**

hrsg. von
Prof. Dr. rer. pol. Robert Galata
Prof. Dr. rer. nat. Markus Wessler

Robert Galata/Sandro Scheid,
Deskriptive und Induktive Statistik für Studierende der BWL

Robert Galata/Sandro Scheid,
Statistische Methoden in der Finanzwirtschaft

Robert Galata/Markus Wessler/Sandro Scheid/Rita Augustin,
Empirische Wirtschaftsforschung

Helge Röpcke

Markus Wessler

Wirtschaftsmathematik

Methoden - Beispiele - Anwendungen

2., überarbeitete und erweiterte Auflage

Mit 100 Bildern, 113 Beispielen und 156 Aufgaben mit Lösungen

HANSER

Autoren:

Dipl.-Math. techn. Helge Röpcke
Hochschule für angewandte Wissenschaften München
Fakultät für Betriebswirtschaft
helge.roepcke@hm.edu

Prof. Dr. rer. nat. Markus Wessler
Hochschule für angewandte Wissenschaften München
Fakultät für Betriebswirtschaft
markus.wessler@hm.edu

FSC
www.fsc.org
MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C016439

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg
Herstellung: Anne Kurth
Covergestaltung: Max Kostopoulos
Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München
Satz: Helge Röpcke, Markus Wessler
Druck und Bindung: Hubert & Co. GmbH & Co. KG BuchPartner, Göttingen
Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-45499-6
E-Book-ISBN 978-3-446-44167-5

Vorwort

Die vorliegende zweite Auflage des Buchs „Wirtschaftsmathematik“ beinhaltet eine völlig neu gestaltete Aufgabensammlung inklusive Lösungen. Des Weiteren wurden einige Fehler korrigiert; wir danken an dieser Stelle allen aufmerksamen Studierenden sowie Kolleginnen und Kollegen für die wertvollen Hinweise. An der wesentlichen Struktur des Buchs wurde nichts verändert – wir sind weiterhin der Meinung, dass die relevanten Inhalte einer mathematischen Grundlagenveranstaltung an einer betriebswirtschaftlichen Fakultät in diesem Buch abgehandelt werden. Auch an dem im Vorwort zur ersten Auflage beschriebenen Verständnis von Mathematik weniger als Formelwerk sondern vielmehr als Einladung, Muster zu erkennen und ggf. auch zu durchbrechen, halten wir selbstverständlich fest.

München, im Juni 2019

Helge Röpcke

Markus Wessler

Mathematik polarisiert. Das hat sie immer getan, und das tut sie auch heute noch. Vielleicht kennen Sie Aussagen wie

- Mathematik, das sind doch nur Zahlen und Tabellen,
- Mathematik habe ich in der Schule schon gehasst,
- Mathematik spricht mich nicht an,
- Mathematik brauche ich doch später nicht mehr.

Man hört diese Sätze als Mathematik-Dozent an einer betriebswirtschaftlichen Fakultät recht häufig. Zunächst einmal muss gesagt werden, dass diese Sätze allesamt große Irrtümer sind, allen voran der letzte: Der Glaube, ein Wirtschaftsstudium könne eigentlich ohne Mathematik betrieben werden, ist weit verbreitet, aber in der Tat komplett falsch.

Die oben genannten Meinungen lassen ein Bild der Mathematik erahnen, das nur zeigt, wie unverstanden sie eigentlich ist. Und es ist ein Bild, das leider kein gutes Licht auf die deutsche Bildungslandschaft wirft. Studierende kommen an die Hochschulen, ohne einen Funken moderner Mathematik zu kennen. Bei keinem anderen Schulfach endet die Vermittlung des Stoffs beim Wissensstand des 17. Jahrhunderts, so wie das bei der Mathematik der Fall ist. Dass die Mathematik ein lebendiges und anwendungsorientiertes Forschungsfeld ist, wird selten oder gar nicht vermittelt. So wird sie häufig bestenfalls als ein Formelwerk betrachtet, das für jedes Problem die passende Schablone bereitstellt. Die Anwendung einer Formel aber ist keine Mathematik. Es wird Carl Friedrich Gauß zugeschrieben, diesen Gedanken folgendermaßen auf den Punkt gebracht zu haben:

> *Der Mangel an mathematischer Bildung gibt sich durch nichts so auffallend zu erkennen wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.*

Ein Buch über Wirtschaftsmathematik bedeutet eine Gratwanderung. Es sollen Methoden bereitgestellt werden, mit denen „praktische Problemstellungen“ modelliert werden können; andererseits verlangt die Mathematik auch einen exakten Zugang. Eine wahre Verschmelzung dieser beiden Aspekte ist schwierig: Häufig sind Mathematiker, die durchaus Lösungen für wirtschaftswissenschaftliche Problemstellungen bieten wollen, zu weit von der Praxis entfernt, und die Ökonomen, die die Methoden anwenden wollen, sind ihrerseits wenig bereit, sich auf Herleitungen und Hintergründe einzulassen.

An dieser brisanten Schnittstelle ist auch dieses Buch angesiedelt, und es stellt sich die Frage, wie das angegangen werden soll. Es geht nicht um Rechnen in der Mathematik, es geht um Muster. Viele Studierende bringen von der Schule die Fähigkeit mit, Muster zu *erkennen*. Das ist ein erster, wichtiger, sinnvoller Schritt, doch wahre mathematische, oder besser: strukturelle Fähigkeiten bildet der Mensch erst dann aus, wenn er Muster zu *durchbrechen* lernt. Ein Beispiel: Fast alle Studierenden sind in der Wirtschaftsmathematik-Vorlesung im ersten Semester dazu in der Lage, ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen in zwei Variablen zu lösen. Dafür wurden Muster erarbeitet, die jederzeit abgerufen werden können. Fast alle Studierenden aber scheitern interessanterweise daran, zu einer gegebenen Lösung ein mögliches Gleichungssystem anzugeben. Anerlernte und anerzogene Muster des „Nach-Vorne-Denkens" zu durchbrechen, das ist eine völlig neue und verunsichernde Sichtweise auf die Dinge. Im Idealfall sollten aber solche Perspektivenwechsel in jedem Studium und eigentlich in jeder Form von (Weiter-)Bildung erlernt werden. Denn nur dadurch kann ein wirklich tiefes Verständnis für Zusammenhänge entstehen. Das vorliegende Buch möchte hierzu an einigen Stellen Impulse geben; wir laden Sie ein, diese Stellen selbst zu finden.

Wirtschaftsmathematik gehört zu den üblichen Grundvorlesungen, die die Studierenden der Wirtschaftswissenschaften durchlaufen, und in der Tat ist sowohl historisch als auch sehr aktuell die Ökonomie eng mit der Mathematik verknüpft. Mathematische Fertigkeit, insbesondere strukturelles Denken und manchmal auch Programmiererfahrung, wird verstärkt von den Arbeitgebern verlangt. In den meisten der klassischen Schwerpunkte der Betriebs- oder Volkswirtschaft kommt man ohne Mathematik nur schwer zurecht. Das Buch richtet sich daher zunächst an Studierende der Wirtschaftswissenschaften in den ersten Semestern. Besonders zugeschnitten ist es auf den üblichen Bedarf an Hochschulen für angewandte Wissenschaften, die stets einen Praxisbezug in den Mittelpunkt ihrer Ausbildung stellen. Es eignet sich aber zusätzlich als Nachschlagewerk für Studierende höherer Semester und auch zum Selbststudium. Die sieben Kapitel des Buchs umfassen die meisten der unserer Ansicht nach „klassischen" Themen einer Wirtschaftsmathematik-Vorlesung:

- Zu Beginn wird an einige der wesentlichen Grundlagen erinnert, die zu einem großen Teil aus der Schule bekannt sein sollten, so etwa an die wichtigsten Funktionstypen, mit denen man in der Regel im ökonomischen Umfeld zu tun hat.
- Danach geht es unmittelbar in die Differenzialrechnung mit ihren Anwendungen auf wirtschaftliche Fragestellungen. Der Begriff der Ableitung wird noch einmal kurz hergeleitet, weil er für das grundsätzliche Verständnis der Deutung als Änderungsrate förderlich ist. Die Erkenntnis, dass es in der Differenzialrechnung nämlich tatsächlich um *Differenzen*, also um Veränderungen geht, wird offenbar in den Schulen nicht stark genug betont.
- An die Differenzialrechnung schließt die Integralrechnung an, die sich historisch eigentlich sogar früher entwickelt hat. Wir bleiben hier bei der heute üblichen Reihenfolge und setzen für das Integrieren das Verständnis für das Differenzieren voraus. Dennoch wird nicht auf die Methodik der Ober- und Untersummen verzichtet, also auf den anschaulichen Bezug zu Flächenberechnungen. Gerade in der Volkswirtschaft werden Flächen unter Funktionsgraphen sehr häufig als ökonomische Größen gedeutet, und wir gehen hier beispielhaft etwas

näher auf die Konsumenten- und Produzentenrente ein. Auch die Integrale als Hilfsmittel in der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden kurz erwähnt.

- Im Kapitel über Lineare Algebra stehen am Beginn die linearen Gleichungssysteme, ein durchaus gebräuchliches Vorgehen, das auch gleich den Fokus auf die Anwendungen setzt. Danach erst werden formal die Matrizen eingeführt und einige Facetten ihrer enormen Bedeutung für wirtschaftliche Prozesse beleuchtet. Hier einen umfassenden Überblick zu geben, der dem Thema gerecht würde, hätte ein eigenes Buch erfordert. So wird eine Auswahl getroffen, in den Übungen aber werden ansatzweise Ideen für andere Aspekte vermittelt.
- Es schließt sich die Lineare Optimierung an, bei der Matrizen und der Gauß-Algorithmus (als Teil des Simplex-Algorithmus), also wiederum Probleme linearer Natur eine Rolle spielen. Das Verständnis für lineare Modelle, für Vereinfachung und Strukturierung, ist gerade in den Wirtschaftswissenschaften ungemein wichtig. Der Simplex-Algorithmus wird durch die graphische Lösungsmethode des Zwei-Variablen-Falls motiviert und zunächst als Maximierungsproblem gestellt. Die Minimierung wird mit der Zwei-Phasen-Methode und dem einfachen dualen Modell behandelt.
- Nachdem in der Linearen Algebra und der Linearen Optimierung Probleme in mehreren Variablen behandelt wurden, folgt die Ausdehnung auf diesen Fall nun auch für die Differenzialrechnung. Damit kommt eine große Palette neuer und realistischer Problemstellungen hinzu. In der Praxis sind nämlich die ökonomischen Funktionen in der Regel nicht nur von einer Größe abhängig. Ausführlich werden Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen behandelt.
- Das Buch schließt mit einem umfangreichen Kapitel über finanzmathematische Grundlagen, und zwar zu einem Grad, der aus unserer Sicht für ein Studium der Wirtschaftswissenschaften, auch ohne Finanzschwerpunkt, minimal ist. Das Prinzip der Zahlungsreihe ist hierbei zentral und soll verdeutlichen, dass letzten Endes die üblichen Felder der Finanzmathematik, also etwa Rentenrechnung, Tilgungsrechnung und Investitionsrechnung, nur verschiedene Sichtweisen auf ein einziges Modell sind.

Die einzelnen Kapitel bauen aufeinander auf und sind auch durch Querverweise miteinander verbunden. Dennoch können sie zu einem großen Teil auch für sich alleinstehend studiert werden. In den Übungen am Kapitelende soll der erlernte Stoff wie üblich vertieft, aber auch darüber hinaus gedacht werden. Hier wird an einigen Stellen ein „Musterdurchbruch“ versucht. Lösungen zu den Aufgaben finden sich auf der Website des Buchs (*www.hanser-fachbuch.de/*).

Es wird weitgehend eine klare und verständliche Sprache benutzt, die an den meisten Stellen ohne Fachtermini auskommt. Vieles, was in der üblichen Literatur überladen wirken mag, wird hier reduziert und knapp dargestellt. Es wird aber großer Wert auf Anschaulichkeit gelegt, wie die zahlreichen Graphiken verdeutlichen. Ein Bild sagt immer noch mehr als tausend Worte, und manchmal tritt ein komplexer Zusammenhang erst deutlich vor Augen, wenn man ihn visualisiert. Strenge mathematische Herleitungen sind eher selten, werden aber nicht gänzlich ausgespart. Vor allem an Stellen, an denen sie für ein Grundverständnis wichtig sind, wurden sie mit aufgenommen, wie etwa bei der erwähnten Flächenberechnung im Kapitel über Integralrechnung mithilfe von Ober- und Untersummen.

Das Buch stellt in gewisser Weise die richtigen Fragen; ob diese sämtlich beantwortet werden, ist sicher Ansichtssache. Für den einen mag es zu viel, für die andere zu wenig Mathematik sein – in jedem Fall wird das Denken angeregt und soll die Freude daran geweckt werden, sich tatsächlich auch einmal mit theoretischen Inhalten zu beschäftigen. Das nämlich kommt in einem Studium der Wirtschaftswissenschaften erfahrungsgemäß zu kurz. In diesem Sinn wünschen wir allen Leserinnen und Lesern viel Freude dabei, mit diesem Buch die Mathematik für sich neu oder wieder zu entdecken.

Den Menschen, die bei der Entstehung dieses Buches mitgeholfen haben, gilt an dieser Stelle unser besonderer Dank. Allen voran sind hier die Studierenden der Fakultät für Betriebswirtschaft der Hochschule München zu nennen. In unseren Vorlesungen und Seminaren hatten wir die Gelegenheit, mit ihnen zu diskutieren und uns auszutauschen. Daraus nahmen wir wertvolle Ideen, hilfreiche Anmerkungen und anregende Fragen mit. Herrn Michael Haslinger danken wir für die Durchsicht des Manuskripts und dem Hanser Verlag für die ständige Begleitung und die gute Zusammenarbeit.

München, im September 2012

Helge Röpcke

Markus Wessler

Inhalt

1 Mathematische Grundlagen

In diesem Kapitel sind die für die Praxisanwendungen wichtigen mathematischen Prinzipien zusammengestellt. Zu einem großen Teil sollten sie aus der Schule bekannt sein.

1.1 Folgen, Summen und Reihen

1.1.1 Grundlagen

Folgen, Summen und Reihen bilden die Grundlagen der gesamten sogenannten Infinitesimalrechnung, also dem Rechnen mit „beliebig kleinen Größen". Der Begriff des Grenzwerts, damit verbunden die wesentlichen Begriffe der Konvergenz von Funktionen und auch der Differenzierbarkeit, haben alle ihren Ursprung im Folgenbegriff. Neben diesem theoretischen Wert besitzen sie aber auch eine hohe Praxisrelevanz. So begegnen uns Folgen in zahlreichen Anwendungen, wie etwa bei Wachstums- oder Zerfallsprozessen. Besonders in der Finanzmathematik werden wir darauf ausführlich zurückkommen.

Das Prinzip einer Folge besteht darin, reelle Zahlen „durchzunummerieren", sie also in eine Reihenfolge zu bringen. Diese kann, muss aber nicht, systematisch sein. Formal verstehen wir unter einer reellwertigen Folge eine Funktion

$$a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Das bedeutet, dass jeder natürlichen Zahl n (inklusive 0) eine reelle Zahl zugeordnet wird, die wir mit $a(n)$ oder mit a_n bezeichnen. Diese Zahlen a_n nennt man dann die *Folgenglieder*. Es ist nicht notwendig, für uns aber durchaus Standard, dass diese Nummerierung bei 0 beginnt. Der Hauptgrund hierfür ist schon in der zukünftigen finanzmathematischen Anwendung zu finden. Dort nämlich ist 0 der Zeitpunkt „jetzt", von dem aus Zahlungsströme betrachtet werden.

Es können zwei Arten von Folgen unterschieden werden, die *aufzählenden* oder die *geschlossen darstellbaren*, die durch die Angabe eines sogenannten *allgemeinen Folgenglieds* a_n, manchmal auch *Bildungsgesetz der Folge* genannt, bestimmt sind. In folgender Tabelle sind einige Folgen auf zweierlei Weise dargestellt:

Aufzählung	Bildungsgesetz
$(a_n) = (0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$	$a_n = (n)$
$(b_n) = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$	$b_n = (n+1)$
$(K_n) = (1.000, 1.100, 1.200, 1.300, 1.400, 1.500, \ldots)$	$K_n = (1.000 + 100n)$
$(g_n) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$	$g_n = (2^n)$
$(c_n) = (1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$	$c_n = ((-1)^n)$

Wir kommen nun zu den für uns wichtigsten zwei Arten von Folgen, den *arithmetischen* und den *geometrischen*. Solche Folgen sind nach einer sehr klaren Systematik gebildet und wesentlich für viele Anwendungen.

Arithmetische Folge

Eine Folge (a_n) heißt *arithmetisch*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ das rekursive Bildungsgesetz

$$a_n = a_{n-1} + d \tag{1.2}$$

gilt. Dabei ist d eine beliebige reelle Zahl, die sogenannte *Differenz* der Folge. Die Folgenglieder entstehen also nacheinander durch Addition von d.

Ist das Anfangsglied a_0 einer solchen arithmetischen Folge gegeben, so erhält man das *Bildungsgesetz*, also einen Ausdruck für das allgemeine Folgenglied, indem man die rekursive Vorschrift (1.2) mehrfach wiederholt:

$$\begin{array}{lllllll} a_1 & = & a_0 + d & & & & \\ a_2 & = & a_1 + d & = & a_0 + d + d & = & a_0 + 2 \cdot d \\ a_3 & = & a_2 + d & = & a_0 + 2 \cdot d + d & = & a_0 + 3 \cdot d \\ \ldots & = & \ldots & & & & \end{array}$$

So kann dann bei einer arithmetischen Folge das n-te Folgenglied unmittelbar aus dem ersten bestimmt werden, nämlich durch

$$a_n = a_0 + n \cdot d. \tag{1.3}$$

Was das Addieren oder Subtrahieren bei arithmetischen Folgen ist, ist das Multiplizieren oder Dividieren bei einer anderen wichtigen Klasse von Folgen, den geometrischen.

Geometrische Folge

Eine Folge (a_n) heißt *geometrisch*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ das rekursive Bildungsgesetz

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \tag{1.4}$$

gilt. Für die reelle Zahl q, die auch der *Quotient* der Folge genannt wird, sollte $q \neq 0$ gelten. Die Folgenglieder entstehen hier durch Multiplikation mit q.

Analog zur arithmetischen Folge lässt sich auch bei der geometrischen Folge durch wiederholte Anwendung der rekursiven Vorschrift (1.4) ein Bildungsgesetz herleiten. Ist nämlich das Anfangsglied a_0 der Folge gegeben, dann erhalten wir

$$\begin{array}{lllllll}
a_1 & = & a_0 \cdot q & & & & \\
a_2 & = & a_1 \cdot q & = & a_0 \cdot q \cdot q & = & a_0 \cdot q^2 \\
a_3 & = & a_2 \cdot q & = & a_0 \cdot q^2 \cdot q & = & a_0 \cdot q^3 \\
\ldots & = & \ldots & & & &
\end{array}$$

und damit

$$a_n = a_0 \cdot q^n. \tag{1.5}$$

Arithmetische und geometrische Folgen kommen in der Praxis sehr häufig vor, so etwa bei Zinsprozessen, auf die wir im späteren Kapitel 7 über Finanzmathematik noch näher eingehen werden. Für den Moment geben wir nur zwei einfache Beispiele, die deutlich machen, dass die Folgen in diesem Bereich eine zentrale Rolle spielen:

Beispiel 1.1

Die Folge

$$(K_n) = (1.000, 1.100, 1.200, 1.300, 1.400, 1.500, \ldots) \tag{1.6}$$

ist eine arithmetische Folge mit $K_0 = 1.000$ und $d = 100$. Sie kann interpretiert werden als Folge der Kontostände bei *linearer Verzinsung* (auch: *einfacher Verzinsung*) mit einem Periodenzins $i = 10\ \%$ und dem Anfangsguthaben $K_0 = 1.000$ €. Sofern der Zinssatz konstant bleibt, kann dann mithilfe von (1.3) schnell das Guthaben beispielsweise nach 99 Perioden berechnet werden, nämlich

$$K_{99} = 1.000 + 99 \cdot 100 = 10.900\ €.$$

■

Beispiel 1.2

Bei der sogenannten *exponentiellen Verzinsung* (auch: *Verzinsung mit Zinseszins*) werden die angelaufenen Zinsen in der Folgeperiode mit verzinst. Die Kontostände entsprechen dann einer geometrischen Folge, deren Quotient durch den *Aufzinsungsfaktor* q gegeben ist. Bei einem Periodenzins von $i = 3\ \%$ gilt $q = 1{,}03$. Ein Anfangskapital von $K_0 = 1.000$ € wächst dabei nach n Jahren auf

$$K_n = K_0 \cdot 1{,}03^n \tag{1.7}$$

an. Nach drei Perioden gilt beispielsweise

$$K_3 = 1.000 \cdot 1{,}03^3 = 1.092{,}73\ €.$$

■

Es gibt auch verschiedene Abschreibungsmodelle, die mit Folgen beschrieben werden können. Die wichtigste und derzeit in der Praxis hauptsächlich angewendete Methode ist die *lineare Abschreibung*. Hierbei kann jedes Jahr ein konstanter Betrag des Anschaffungswertes abgeschrieben werden, sodass man mit den Formeln für die arithmetischen Folgen arbeiten kann. Beträgt etwa der Kaufpreis einer Maschine 249.000 € und soll diese innerhalb von fünf Jahren mit linearer Abschreibung bis auf einen Restwert von 100.000 € abgeschrieben werden, so bilden die Restwerte eine arithmetische Folge:

$$R_0 = 249.000, \qquad R_1 = 249.000 + d, \qquad \ldots, \qquad R_5 = 249.000 + 5d.$$

Soll der Wert für R_5 dann gleich 100.000 € sein, errechnet sich hieraus als Abschreibungsbetrag

$$d = -29.800 \text{ €}.$$

Eine weitere, allerdings kaum noch eingesetzte Methode der Abschreibung ist die sogenannte *geometrisch-degressive Abschreibung*. Hierbei sinkt der Wert einer Anschaffung ausgehend vom Anfangswert R_0 jedes Jahr *um einen konstanten Prozentsatz* p. Damit bilden die Restwerte R_n eine geometrische Folge mit dem Bildungsgesetz

$$R_n = R_0 \cdot (1-p)^n. \tag{1.8}$$

Es besteht, zumindest theoretisch, ein fundamentaler Unterschied zwischen geometrisch-degressiver und linearer Abschreibung. Das Bildungsgesetz (1.8) hat nämlich zur Folge, dass die Restwerte R_n niemals auf 0 sinken. Das hat aber natürlich keine Praxisrelevanz, da erstens die Restwerte aufgrund von Rundung irgendwann natürlich doch auf 0 sinken, aber andererseits diese Form der Abschreibung niemals in Reinform angewendet wurde. In der Praxis gab es stets Kombinationsmodelle aus geometrisch-degressiver und linearer Abschreibung: Zuerst wurde geometrisch abgeschrieben, was zu Beginn hohe Abschreibungsbeträge zur Folge hatte. Ab einem bestimmten Zeitpunkt wurde dann auf lineare Abschreibung umgestellt.

1.1.2 Summenformeln

Manchmal ist es wichtig, die Glieder einer gegebenen Folge aufzusummieren. Die Anwendungen hierfür sind wieder hauptsächlich in der Finanzmathematik zu finden. Durch den Prozess des Aufsummierens entsteht eine neue Folge, nämlich die *Folge der Partialsummen*:

Partialsummen und Reihe

Ist eine reelle Folge (a_n) gegeben, so nennt man

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \tag{1.9}$$

die n*-te Teilsumme* oder n*-te Partialsumme* der Folge (a_n). Die auf diese Weise neu gebildete Folge (s_n) heißt die *Reihe zur Folge* (a_n).

Konkret ergibt sich für die ersten Reihenglieder

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

Ein erstes einfaches Beispiel ist etwa die Folge der natürlichen Zahlen n selbst. Hierfür gilt

$$\begin{aligned} s_0 &= 0 \\ s_1 &= 1 \\ s_2 &= 3 \\ s_3 &= 6 \\ s_4 &= 10 \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

Interessant ist die Frage, ob es für die Folge der Partialsummen wiederum einen geschlossenen Ausdruck gibt, der von n abhängt. Es gibt ihn, und die Idee, die dann auch zur allgemeineren *arithmetischen Summenformel* führen wird, geht der Legende nach auf Carl Friedrich Gauß zurück, wobei diese kleine Geschichte nach neueren Erkenntnissen allerdings in der Form wohl nicht stattgefunden hat. Der damalige Lehrer des sechsjährigen Gauß soll der Klasse die Aufgabe gestellt haben, die natürlichen Zahlen bis 100 aufzusummieren. Nun kann man diese Aufgabe „mit Gewalt" angehen und tatsächlich vorn anfangen, die Zahlen zu addieren. Gauß hingegen soll auf den folgenden Trick gekommen sein: Man schreibt die zu bildende Summe zweimal untereinander, wobei man allerdings beim zweiten Mal die Reihenfolge umkehrt. Der Konsistenz wegen beginnen wir mit 0:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & + & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \ldots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 3 & + & 2 & + & 1 & + & 0 \end{array} \tag{1.10}$$

Dann ist sofort klar, dass es hier 101 Pärchen gibt, die jeweils in der Summe 100 ergeben. Addiert man in (1.10) diese Paare auf, so ergibt sich damit $100 \cdot 101$, und für die gesuchte Summe der ersten hundert Zahlen ist dieser Wert noch zu halbieren, denn in (1.10) steht ja jede Zahl doppelt. Aufgrund dieses Tricks soll der kleine Gauß das Problem in wenigen Sekunden gelöst haben. Es ergibt sich

$$0 + 1 + 2 + \ldots + 99 + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 5.050 \tag{1.11}$$

und allgemein:

Partialsummen der natürlichen Zahlen

Für die Folge der natürlichen Zahlen (n) gilt für die n-te Partialsumme:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{1.12}$$

Verallgemeinert man dieses Prinzip, so erhält man sofort die folgende arithmetische Summenformel:

Partialsummen einer arithmetischen Folge

Bei einer arithmetischen Folge (a_n) mit Differenz d gilt für die n-te Partialsumme:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = (a_0 + a_n)\frac{n+1}{2} = (2 \cdot a_0 + n \cdot d)\frac{n+1}{2}. \tag{1.13}$$

Auch wenn die Folge der Quadratzahlen keine arithmetische ist, wollen wir sie an dieser Stelle kurz erwähnen, weil wir auf die entsprechende Summe bei einer späteren Flächeninhaltsberechnung zurückgreifen müssen.

Partialsummen der Quadratzahlenfolge

Für die Folge der Quadratzahlen (n^2) gilt für die n-te Partialsumme:

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \tag{1.14}$$

Kommen wir nun zu den Partialsummen geometrischer Folgen, denn diese gibt es selbstverständlich auch. Beim Aufsummieren können hier sogar interessante Phänomene auftreten. Addiert man die Glieder einer geometrischen Folge (a_n) mit Quotient q auf, so kann mithilfe von (1.5) ein kompakter Ausdruck gefunden werden. Für die ersten Teilsummen ergibt sich

$$\begin{aligned}
s_0 &= a_0 \\
s_1 &= a_0 + a_0 \cdot q &&= a_0 \cdot (1+q) \\
s_2 &= a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 &&= a_0 \cdot (1+q+q^2) \\
s_3 &= a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + a_0 \cdot q^3 &&= a_0 \cdot (1+q+q^2+q^3)
\end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1},$$

sofern $q \neq 1$. Demnach ergibt sich:

Partialsummen einer geometrischen Folge

Bei einer geometrischen Folge (a_n) mit Quotient q gilt für die n-te Partialsumme:

$$s_n = a_0 \cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = a_0 \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1. \tag{1.15}$$

Bei arithmetischen Folgen werden die Teilsummen aufgrund der Konstanz der pro Folgenglied addierten festen Differenz d immer größer (bzw. bei negativem d immer kleiner). Bei geometrischen Reihen kann etwas anderes passieren. Für manche Quotienten q lassen sich bei einer geometrischen Reihe auch „alle" (also unendlich viele) Folgenglieder aufsummieren, ohne dass dabei ein gewisser endlicher Wert überschritten wird. Das kann offenbar nur dann passieren, wenn der Quotient q „nicht zu groß" ist. Ist er betragsmäßig kleiner als 1, so werden die Folgenglieder immer kleiner, und die Teilsummen nähern sich einem festen Wert. In diesem Fall spricht man von *Konvergenz der Reihe*. Konvergiert eine Reihe nicht, so sagt man, sie *divergiert*. Man kann das genau spezifizieren:

Geometrische Reihe

Eine geometrische Reihe mit Quotient q und Startglied a_0 konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$, und in diesem Fall gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \frac{a_0}{1-q}. \tag{1.16}$$

Das liegt daran, dass für $|q| < 1$ mit wachsendem n die Potenzen q^{n+1} in (1.15) gegen 0 gehen. Ist $|q| > 1$, dann wird der Betrag der Folgenglieder und damit auch der Betrag der Teilsummen immer größer, und es kann sich keine Konvergenz ergeben. Im Fall $q = 1$ schließlich handelt es sich bei der Folge um eine arithmetische Folge mit $d = 0$, d. h. wir haben es mit der konstanten Folge $(a_n) = (a_0, a_0, a_0, a_0, \ldots)$ zu tun. Für die *n-te Partialsumme* erhalten wir mit (1.13) $s_n = (n+1) \cdot a_0$.

Beispiel 1.3

Stellen Sie sich ein übliches Schachbrett mit 64 Feldern vor. Es gibt die Legende, dass der Erfinder des Schachspiels von seinem Herrscher in folgender Weise belohnt werden sollte: Auf das erste Feld des Bretts sollte ein Reiskorn gelegt werden, auf das zweite Feld zwei Reiskörner, auf das dritte Feld vier Reiskörner, und so fort: Stets sollte die Anzahl der Reiskörner auf einem Feld das Doppelte der Anzahl auf dem vorhergehenden Feld betragen. Hier liegt demnach die geometrische Folge (a_n) mit

$$a_n = 2^n$$

zugrunde, deren Glieder von $n = 0$ bis $n = 63$ aufzusummieren sind. (Die Nummerierung ist hier entsprechend anzupassen.) Nun kann man sich etwa fragen, wie viele Reiskörner *in der ersten Reihe* des Schachbretts liegen. Für die Anzahl ergibt sich mithilfe von (1.15)

$$s_7 = 1 \cdot \frac{2^8 - 1}{2 - 1} = 255.$$

Will man wissen, wie viele Reiskörner auf dem gesamten Brett liegen, berechnet sich dies durch

$$s_{63} = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18.446.744.073.709.551.615,$$

also etwa 18,45 Trillionen Reiskörner. Dieses schon so kaum vorstellbare Ergebnis wird umso erstaunlicher, wenn man Folgendes bedenkt: Laut den Vereinten Nationen reichen 20.000 Reiskörner aus, um einen Erwachsenen für einen Tag zu ernähren. Im Jahr 2018 leben rund 7,6 Milliarden Menschen auf der Erde. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass auch Kinder eine Erwachsenenration erhalten, dann könnte die aktuelle Weltbevölkerung mit den Reiskörnern, die sich auf dem Schachbrett befinden, gute 330 Jahre lang ernährt werden. ■

Auch in der Zinsrechnung kann man die geometrische Summenformel wiederfinden. Wird nämlich etwa ein Kapital K_0 mit Zinseszinsen bei einem Jahreszins i angelegt, so kann man sich die Frage stellen, wie viele Zinsen sich nach n Jahren angesammelt haben. Schreibt man dies für die ersten Jahre hin und drückt die entstehenden Guthaben jeweils durch K_0 und den Aufzinsungsfaktor $q = 1 + i$ aus, so erhält man:

$$\begin{aligned}
Z_1 &= K_0 \cdot i \\
Z_2 &= K_1 \cdot i &&= K_0 \cdot q \cdot i \\
Z_3 &= K_2 \cdot i &&= K_0 \cdot q^2 \cdot i \\
\cdots &= \cdots
\end{aligned}$$

Summiert man diese Beträge bis zum Zeitpunkt n auf, so ergibt sich für die Summe aller Zinsen

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} Z_i &= K_0 \cdot i + K_0 \cdot q \cdot i + K_0 \cdot q^2 \cdot i + \ldots + K_0 \cdot q^{n-1} \cdot i \\
&= K_0 \cdot i \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) \\
&= K_0 \cdot i \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \\
&= K_0 \cdot i \cdot \frac{q^n - 1}{i} \\
&= K_0 \cdot (q^n - 1) \\
&= K_n - K_0.
\end{aligned}$$

Die Zinssumme entspricht somit dem Guthaben nach n Jahren abzüglich des Startkapitals.

1.1.3 Grenzwerte von Folgen

Um den wichtigen Begriff des Grenzwerts einer Folge einführen zu können, ist die Kenntnis einiger weiterer Eigenschaften von Folgen erforderlich. Eine reellwertige Folge (a_n) heißt

1. *alternierend*, falls das Vorzeichen zweier benachbarter Folgenglieder stets verschieden ist,
2. *monoton wachsend* bzw. *streng monoton wachsend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$

   $$a_n \geq a_{n-1} \quad \text{bzw.} \quad a_n > a_{n-1}$$

   gilt,

3. *monoton fallend* bzw. *streng monoton fallend*, falls für alle $n \in \mathbb{N}$

$$a_n \leq a_{n-1} \quad \text{bzw.} \quad a_n < a_{n-1}$$

gilt,

4. *nach oben bzw. unten beschränkt*, falls es eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$a_n \leq C \quad \text{bzw.} \quad a_n \geq C$$

gilt, und

5. *beschränkt*, falls sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Diese Eigenschaften von Folgen sind allesamt recht einfach verständlich und zugänglich. Der wichtigste Begriff hingegen, nämlich der des Grenzwertes einer Folge, auf dem die gesamte Analysis basiert, mag zunächst ein bisschen widerspenstig wirken. Um ihn fassen zu können, führen wir den folgenden Begriff ein.

Eigenschaften, die für fast alle Folgenglieder gelten

Es sei (a_n) eine reelle Folge. Wir sagen, dass eine beliebige Eigenschaft *für fast alle* Folgenglieder gilt, falls es eine natürliche Zahl N gibt, sodass die Eigenschaft für alle Folgenglieder ab dem N. Glied (also für alle $n \geq N$) gilt. Dabei kann dieses N beliebig groß sein; wichtig ist nur, dass wirklich für alle danach kommenden Folgenglieder die Eigenschaft gilt. Man kann auch sagen, dass die Eigenschaft *für höchstens endlich viele Folgenglieder nicht gelten darf.*

Beispiel 1.4

Bei der Folge

$$(a_n) = (2^n) = (1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$$

sind fast alle Folgenglieder größer als 20, denn nur $1, 2, 4, 8$ und 16 sind kleiner als 20. Hier gilt $N = 5$. Ebenso sind natürlich fast alle Folgenglieder größer als 1000, mit einem entsprechend „späteren“, also größeren Wert für N, nämlich $N = 10$. ■

Beispiel 1.5

Die Folge

$$(a_n) = ((-2)^n) = (1, -2, 4, -8, 16, -32, \ldots)$$

ist eine alternierende Folge. Für sie gilt die im vorgehenden Beispiel genannte Eigenschaft nicht, denn hier gibt es immer wieder Folgenglieder (nämlich die negativen), die kleiner als 20 sind. ■

Nun können wir den Begriff des Grenzwertes definieren.

Grenzwert einer Folge

Es sei (a_n) eine reelle Folge. Wir sagen, dass (a_n) *konvergent* ist, falls es eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass in jedem (noch so kleinen) Intervall I um a herum fast alle Folgenglieder liegen. Man schreibt in diesem Fall

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \tag{1.17}$$

und nennt a den *Grenzwert der Folge* (a_n). Gibt es einen Grenzwert in diesem Sinn nicht, wachsen aber die Folgenglieder nach und nach über alle Grenzen, also Richtung ∞ oder $-\infty$, so sprechen wir von dem *uneigentlichen Grenzwert* ∞ *oder* $-\infty$. Gibt es keinen Grenzwert, so heißt die Folge *divergent*. Wir benutzen dafür die suggestive Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

Unmittelbar aus der Definition kann etwa der Grenzwert der Folge

$$(a_n) = \left(\frac{1}{n+1}\right)$$

berechnet werden. Die Berechnung einiger Folgenglieder legt die Vermutung nahe, dass 0 der Grenzwert dieser Folge ist. Betrachtet man nun Folgenglieder für großes n und ist $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ein (kleines) Intervall um 0 (den vermuteten Grenzwert), so stellt man fest, dass für $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$ gilt:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon.$$

Demnach liegen alle Folgenglieder mit größerem Index als $\frac{1}{\varepsilon} - 1$ (und damit eben fast alle) in dem vorgegebenen Intervall. Es gilt also

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1}\right) = 0. \tag{1.18}$$

Dies ist bereits einer der wichtigsten Grenzwerte. Ebenso gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^k}\right) = 0 \quad \text{für alle Potenzen } k \in \mathbb{N}.$$

Solche Folgen, die den Grenzwert 0 haben, nennt man auch *Nullfolgen*.

Konvergente Folgen, also Folgen mit einem Grenzwert, verhalten sich vernünftig, wenn man durch die elementaren Rechenoperationen neue Folgen aus ihnen bildet. Vernünftig, das bedeutet, dass diese Rechenoperationen „verträglich“ sind mit den entsprechenden Grenzwerten. Addiert man etwa die passenden Glieder zweier konvergenter Folgen auf, so sollte auch die entstehende Summenfolge konvergent sein, und ihr Grenzwert sollte der Summe der beiden Grenzwerte entsprechen. So passieren also keine Überraschungen. Formal kann man all dies in den sogenannten *Grenzwertsätzen für Folgen* zusammenfassen.

Grenzwertsätze für Folgen

Sind die Folgen (a_n) bzw. (b_n) konvergent mit den Grenzwerten a bzw. b, so sind die dargestellten zusammengesetzten Folgen wieder konvergent mit den entsprechenden Grenzwerten:

- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$, falls alle $b_n \neq 0$ und $b \neq 0$.
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)^r = a^r$ für alle $r \in \mathbb{R}$.

Mit (1.18) und mithilfe der Grenzwertsätze kann man die Grenzwerte vieler konvergenter Folgen angeben:

Beispiel 1.6

Es gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{5n+12}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-\frac{2}{n}}{5+\frac{12}{n}}\right) = \frac{3}{5}$$

oder

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{5n^2+12}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{5+\frac{12}{n^2}}\right) = 0.$$

■

Dass die Reihe zur geometrischen Folge unter bestimmten Voraussetzungen konvergiert, haben wir bereits gesehen. Die Reihe zu einer arithmetischen Folge dagegen konvergiert niemals. Das liegt daran, dass die immer gleich bleibenden Abstände der Folgenglieder die Partialsummen schnell über alle Grenzen steigen lassen. Damit eine Reihe konvergiert, muss ganz offensichtlich eine *notwendige Bedingung* erfüllt sein: Die „späten“ Folgenglieder müssen klein sein, damit die Summe insgesamt einen endlichen Wert nicht übersteigt. Formal muss also, damit die Reihe zu einer reellwertigen Folge (a_n) überhaupt konvergieren kann,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

gelten, mit anderen Worten also die zugrunde liegende Folge (a_n) eine Nullfolge sein.

Dieses wichtige Kriterium ist aber tatsächlich nur ein notwendiges, kein hinreichendes: Zwar kann man schließen, dass eine Reihe nicht konvergiert, falls die zugrunde liegende Folge keine Nullfolge ist, aber es gibt auch Nullfolgen, deren zugehörige Reihen nicht konvergieren. Das wohl berühmteste Beispiel ist die sogenannte *harmonische Folge*

$$(h_n) = \frac{1}{n} \quad (n \geq 1).$$

Die Folge der Partialsummen, und damit die Reihe, divergiert zwar unvorstellbar langsam, aber sie tut es. So gilt etwa

$$\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n} \approx 5,18$$

und

$$\sum_{n=1}^{10.000} \frac{1}{n} \approx 9,79.$$

Selbst wenn 10.000 Glieder der Folge addiert werden, hat man noch nicht einmal den Summenwert 10 erreicht, und es ist kaum vorstellbar, dass der Wert der Teilsummen tatsächlich immer größer wird. Aber es ist so:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty. \tag{1.19}$$

Dabei müssen wir leider den Nachweis an dieser Stelle schuldig bleiben.

Summiert man allerdings nicht die Kehrwerte der natürlichen Zahlen, sondern die Kehrwerte der Quadratzahlen, so ergibt sich ein ebenfalls erstaunliches Ergebnis:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,64493. \tag{1.20}$$

Beide Folgen, die Folge der Kehrwerte von n und die Folge der Kehrwerte von n^2, haben die Eigenschaft, dass ihre Folgenglieder mit wachsendem n immer kleiner werden, aber offenbar reicht diese Tatsache allein nicht aus, um die Konvergenz der Reihe zu erzwingen. Es gibt aber ein Kriterium, das dem norwegischen Mathematiker Nils Henrik Abel zugeschrieben wird: Ist (a_n) eine *alternierende Nullfolge*, so konvergiert die zugehörige Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. Nimmt man etwa die harmonische Folge her und addiert die Glieder alternierend auf, so erhält man

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k} = \ln(2) \approx 0,69315,$$

wobei mit ln(2) der natürliche Logarithmus von 2 gemeint ist (siehe (1.38)). Ein letztes wichtiges Beispiel für eine Zahl, die als Grenzwert einer Folge eingeführt werden kann, ist die eulersche Zahl e. Ihre Benennung geht auf Leonhard Euler, einen sehr aktiven Schweizer Mathematiker des 18. Jahrhunderts zurück, der den Buchstaben e allerdings nach eigener Aussage als Symbol für das Wort „Exponent“ verwendete, und nicht für „Euler“. Die eulersche Zahl kann auf viele unterschiedliche Wege beschrieben werden, und ihre Anwendungen, gerade bei Wachstumsprozessen und damit auch wieder in der Finanzmathematik, sind groß an der Zahl. Wir definieren sie hier kurzerhand als den Grenzwert einer Folge, nämlich

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,71828. \tag{1.21}$$

Dass diese Folge tatsächlich konvergiert, werden wir an dieser Stelle nicht zeigen. Versucht man aber einmal, in den Ausdruck große Werte für n einzusetzen, kann man sich die Konvergenz zumindest plausibel machen:

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	$2,000000000$
2	$2,250000000$
3	$2,370370370$
4	$2,441406250$
5	$2,488320000$
10	$2,593742460$
100	$2,704813829$
1.000	$2,716923932$
1.000.000	$2,718280469$
1.000.000.000	$2,718281827$

1.2 Einige wichtige Funktionen

In diesem Abschnitt werden kurz die wesentlichen Eigenschaften einiger wichtiger Funktionstypen wiederholt, die in der ökonomischen Realtität auftauchen und mit denen wir uns später ausführlich beschäftigen werden. Zu Beginn eine kurze Motivation zum Funktionsbegriff allgemein: Eine Funktion ist, technisch gesprochen, eine *eindeutige Zuordnung*, beispielsweise von reellen Zahlen. So könnte man etwa die Funktion betrachten, die einer beliebigen reellen Zahl x ihre Quadratzahl x^2 zuordnet. Die zugeordnete Zahl kann dann etwa mit y bezeichnet werden, also $y = x^2$, oder aber man nennt sie $f(x)$, also den *Funktionswert von* x. In diesem Buch werden beide Schreibweisen benutzt:

$$y = f(x) = x^2.$$

Man setzt also Zahlen x in eine Funktionsgleichung $y = f(x)$ ein, um Funktionswerte zu erhalten. Man nennt x in dem Zusammenhang auch die *Variable* der Funktion, die „unabhängige Größe", während es sich bei y um eine abhängige Größe handelt. Im Lauf dieses Buchs werden uns auch andere Funktionen begegnen, nämlich solche, die von mehr als einer Variablen abhängen. Damit sind wir in der Praxis: In den Wirtschaftswissenschaften beschäftigt man sich nämlich systematisch mit den Zusammenhängen verschiedener Größen. So hängen etwa die Kosten K von der produzierten Menge x ab, oder der Absatz x eines bestimmten Gutes hängt ab vom Preis p. Zur Beschreibung oder Modellierung dieser Abhängigkeiten eignet sich der Begriff der mathematischen Funktion hervorragend. Man erhält auf diese Weise Kostenfunktionen $K(x)$, Absatz-Preis-Funktionen $x(p)$ und viele mehr.

Die in den nachfolgenden Unterabschnitten behandelten Funktionen sollten auf jeden Fall aus der Schule bekannt sein. Trotzdem werden sie noch einmal mit ihren wichtigsten Eigenschaften wiederholt. In den späteren Abschnitten werden sie uns dann in praktischen Anwendungen als ökonomische Funktionen wieder begegnen. Alle in diesem Kapitel betrachteten Funktionen haben formal die Gestalt

$$f : D_f (\subset \mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

das bedeutet, dass die Zahlen, die in f eingesetzt werden dürfen, der sogenannte *Definitionsbereich D_f der Funktion f*, eine Teilmenge der reellen Zahlen ist, und dass auch die Werte, also y oder $f(x)$, reelle Zahlen sind. Vielfach ist f in der Tat nicht für alle reellen Zahlen definiert, sondern es gibt Einschränkungen (etwa bei Logarithmusfunktionen). In den Anwendungen werden sich später auch sachbezogene Gründe für die Einschränkung des Definitionsbereichs ergeben.

Häufig werden wir mit graphischen Veranschaulichungen arbeiten. Eine Funktion in einer Variablen kann innerhalb von zwei Dimensionen dargestellt werden, indem man die Paare (x/y), wobei y der Funktionswert von x ist, als Punkte in der Ebene interpretiert. Zeichnet man all diese Punkte ein, so entsteht der *Graph* der Funktion. Bei den Funktionen, die in der Praxis vorkommen und die wir ausschließlich betrachten werden, ergibt sich als Graph immer eine eindimensionale, einigermaßen „glatte" Kurve. Das liegt daran, dass kleine Änderungen in der Variablen x in der Regel auch nur kleine Änderungen des Funktionswertes zur Folge haben. Die Funktion macht keine unerwarteten Sprünge. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der *Stetigkeit* einer Funktion.

1.2.1 Lineare Funktionen

Unter einer *linearen Funktion* versteht man eine eindeutige Zuordnung der Form

$$y = f(x) = ax + b, \tag{1.22}$$

wobei a und b fest gewählte reelle Zahlen sind. Es gibt auch eine geometrische Bedeutung: Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade, deren *Steigung* durch a gegeben ist und die die senkrechte Koordinatenachse im Punkt $(0/b)$ schneidet. Dazu gehört auch der Fall $a = 0$, der der konstanten Funktion $f(x) = b$ entspricht und deren Graph eine zur x-Achse parallele Gerade durch den Punkt $(0/b)$ ist. In *Bild 1.1* ist eine solche Gerade abgebildet. Es handelt sich um den Graphen zur Funktion

$$y = f(x) = 3x - 2 \tag{1.23}$$

mit der Steigung 3 und dem y-Achsenabschnitt -2. Zusätzlich ist ein *Steigungsdreieck* eingezeichnet, das verdeutlicht, wie der Wert $a = 3$ in der Funktionsgleichung mit der Geraden zusammenhängt: Bewegt man sich von einem Punkt auf der Geraden *eine Einheit nach rechts und drei Einheiten nach oben*, so erhält man einen weiteren Punkt auf der Geraden.

Da eine lineare Funktion durch zwei Parameter, nämlich a und b, festgelegt ist, benötigt man auch zwei Bedingungen, um sie eindeutig bestimmen zu können. Dies können etwa zwei Punkte sein, die auf der zugehörigen Geraden liegen.

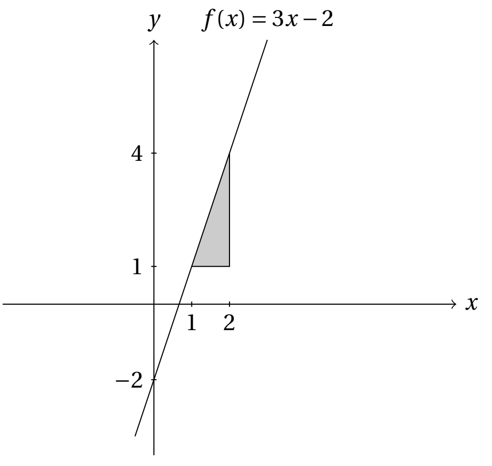


Bild 1.1 Die Gerade zur linearen Funktion $y = f(x) = 3x - 2$ mit y-Achsenabschnitt -2 und Steigungsdreieck: Ändert sich x um eine Einheit, dann ändert sich y um drei Einheiten.

Zwei-Punkte-Form einer Geradengleichung

Liegen die beiden Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) (mit $x_1 \neq x_2$) auf einer Geraden, so gilt für die Steigung a und für den y-Achsenabschnitt b:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad \text{und} \quad b = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}. \tag{1.24}$$

Die Bedingung $x_1 \neq x_2$ ist erforderlich, damit der Nenner in den beiden Ausdrücken (1.24) ungleich null ist. Anschaulich bedeutet dies, dass ein Steigungsdreieck wie in *Bild 1.1* angelegt werden kann. Im Fall $x_1 = x_2$ liegen die Punkte „übereinander“, so z. B. die Punkte (3/1) und (3/4). Es gibt zwar auch in diesem Fall eine Gerade durch die beiden Punkte, aber diese Gerade gehört zu keiner linearen Funktion der Form (1.22). Sie gehört sogar zu überhaupt keiner Funktion, kann aber durch die Gleichung $x = 3$ beschrieben werden. Entsprechend hat die Gerade durch die beiden Punkte (1/1) und (1/4) die Gleichung $x = 1$.

Beispiel 1.7

Bei der Geraden durch die Punkte (2/4) und (6/2) gilt nach (1.24) für Steigung und Achsenabschnitt

$$a = \frac{4-2}{2-6} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{2 \cdot 2 - 6 \cdot 4}{2-6} = 5.$$

Die entsprechende lineare Funktion ist demnach

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + 5.$$

■