

Hilmar Heinemann · Heinz Krämer
Rolf Martin · Peter Müller · Hellmut Zimmer

PHYSIK

in Aufgaben und Lösungen



2., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Naturkonstanten und weitere Zahlenwerte (CODATA 2018)

Atomare Masseneinheit	$u = 1,660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Avogadro-Konstante	$N_A = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Bezugssehweite	$a_B = -25 \text{ cm}$
Bohr'sches Magneton	$\mu_B = 9,274\,010\,0783 \cdot 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$
Boltzmann-Konstante	$k = 1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Compton-Wellenlänge	$\lambda_C = 2,426\,310\,239 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
Elektrische Feldkonstante	$\varepsilon_0 = 8,854\,187\,8128 \cdot 10^{-12} \text{ A} \cdot \text{s}/(\text{V} \cdot \text{m})$
Elementarladung	$e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad (1 \text{ C} = 1 \text{ A} \cdot \text{s})$
Erdmasse	$m_E = 5,972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Erdradius (mittlerer)	$r_E = 6471 \text{ km}$
Erdbahnradius (astronomische Einheit, AE)	$r_0 = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$
Fallbeschleunigung (norm)	$g_n = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$
Gaskonstante (molare)	$R_m = 8,314\,462\,618 \text{ J}/(\text{mol} \cdot \text{K})$
Gravitationskonstante	$G = 6,674\,30 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$
Lichtgeschwindigkeit (Vakuum)	$c_0 = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 1,256\,637\,062\,12 \cdot 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{s}/(\text{A} \cdot \text{m})$
Normfallbeschleunigung	$g_n = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$
Planck'sches Wirkungsquantum	$h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ $\hbar = 1,054\,571\,817 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Ruhemasse des Elektrons	$m_e = 9,109\,383\,7015 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ $= 5,485\,799\,090\,65 \cdot 10^{-4} \text{ u}$
Ruhemasse des Protons	$m_p = 1,672\,621\,923\,69 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $= 1,007\,276\,466\,621 \text{ u}$
Ruhemasse des Neutrons	$m_n = 1,674\,927\,498\,04 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ $= 1,008\,664\,915\,95 \text{ u}$
Rydberg-Frequenz	$R = 3,289\,841\,960\,2508 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$
Solarkonstante	$E_0 = 1,367 \text{ kW/m}^2$
Sonnenmasse	$m_S = 9,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Sterntag	$T_E = 86\,164 \text{ s}$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$\sigma = 5,670\,374\,419 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$



Bleiben Sie auf dem Laufenden!

Hanser Newsletter informieren Sie regelmäßig über neue Bücher und Termine aus den verschiedenen Bereichen der Technik. Profitieren Sie auch von Gewinnspielen und exklusiven Leseproben. Gleich anmelden unter www.hanser-fachbuch.de/newsletter

Hilmar Heinemann

Heinz Krämer (†)

Rolf Martin

Peter Müller

Hellmut Zimmer (†)

PHYSIK in Aufgaben und Lösungen

2., vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage

HANSER

Bearbeiter:

Prof. Dr. Dr. Rolf Martin

Autoren:

Dr. rer. nat. Hilmar Heinemann, Freital

Dr. rer. nat. Heinz Krämer, Dresden (†)

Dr. rer. nat. Peter Müller, Dresden

Prof. Dr. rer. nat. Hellmut Zimmer, Dresden (†)



Alle in diesem Buch enthaltenen Informationen wurden nach bestem Wissen zusammengestellt und mit Sorgfalt geprüft und getestet. Dennoch sind Fehler nicht ganz auszuschließen. Aus diesem Grund sind die im vorliegenden Buch enthaltenen Informationen mit keiner Verpflichtung oder Garantie irgendeiner Art verbunden. Autor(en, Herausgeber) und Verlag übernehmen infolgedessen keine Verantwortung und werden keine daraus folgende oder sonstige Haftung übernehmen, die auf irgendeine Weise aus der Benutzung dieser Informationen – oder Teilen davon – entsteht.

Ebenso wenig übernehmen Autor(en, Herausgeber) und Verlag die Gewähr dafür, dass die beschriebenen Verfahren usw. frei von Schutzrechten Dritter sind. Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek:

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über

<http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt.

Alle Rechte, auch die der Übersetzung, des Nachdruckes und der Vervielfältigung des Buches, oder Teilen daraus, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form (Fotokopie, Mikrofilm oder ein anderes Verfahren) – auch nicht für Zwecke der Unterrichtsgestaltung – reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

© 2021 Carl Hanser Verlag München

Internet: www.hanser-fachbuch.de

Lektorat: Dipl.-Ing. Natalia Silakova-Herzberg

Herstellung: Anne Kurth

Covergestaltung: Max Kostopoulos

Coverkonzept: Marc Müller-Bremer, www.rebranding.de, München

Titelbild: © Prof. Dr. Dr. Rolf Martin

Satz: Dr. Steffen Naake, Brand-Erbisdorf

Druck und Bindung: CPI books GmbH, Leck

Printed in Germany

Print-ISBN 978-3-446-46287-8

E-Book-ISBN 978-3-446-46734-7

Vorwort zur 2. Auflage

Aus langjähriger Lehrerschaft an einer Hochschule sowie von meinem eigenen Studium her weiß ich, wie sehr sich Studierende ausführliche Musterlösungen zu Problemaufgaben wünschen. Und tatsächlich ist es eine gute Möglichkeit, sich anhand vorgerechneter Aufgaben in die Methodik eines Fachgebiets einzuarbeiten. Aus diesem Grund habe ich gerne zugesagt, als mir vom Verlag angeboten wurde, das beliebte Übungsbuch der Professoren Heinemann, Krämer, Müller und Zimmer neu herauszugeben.

Für die vorliegende Neuauflage wurden alle Aufgaben und deren Lösungen überarbeitet und teilweise durch neue ersetzt; dabei wurde aber die bewährte Struktur beibehalten. Die Teilgebiete entsprechen dem üblichen Fächerkanon, der sich an der Experimentalphysik orientiert. Probleme, wie sie in der theoretischen Physik oder Spezialvorlesungen wie Technische Mechanik, Technische Schwingungslehre etc. behandelt werden, sind nicht Gegenstand dieses Buches.

Um die Einarbeitung in die verschiedenen Teilgebiete der Physik zu erleichtern, wurde jeder Abschnitt mit einem kurzen Vorspann versehen, in dem die relevanten Beziehungen prägnant dargestellt sind. In der Elektrizitätslehre wurde die Wechselstromrechnung mithilfe komplexer Zeiger eingeführt. In der Optik wurden die in der Technischen Optik üblichen Vorzeichenregeln der DIN 1335 konsequent angewandt.

Bei fast allen Aufgaben ließ es sich realisieren, dass die Lösungen bis zur letzten Teilfrage mit allgemeinen Beziehungen durchgerechnet werden, sodass im Endergebnis nur die angegebenen Eingangsdaten zu finden sind. Beim praktischen Rechnen dagegen werden häufig Zahlenwerte der Teile a), b) ... verwendet, um weitere Teile zu lösen. Dadurch verliert man aber leicht den Zusammenhang, wie das Endergebnis von den Eingangsgrößen abhängt.

Ich bedanke mich für die gute Betreuung durch Frau Natalia Silakova vom Carl Hanser Verlag. Bei meiner Frau bedanke ich mich für ihre Geduld und den Freiraum, den sie mir während der Arbeit an diesem Werk eingeräumt hat.

Meinen Leserinnen und Lesern wünsche ich Erkenntnisgewinn beim Bearbeiten von Übungsaufgaben und die Befriedigung, die man erhält, wenn man ein schwieriges Problem gelöst hat.

Köngen, im Oktober 2020

Rolf Martin

Inhalt

M	Mechanik	9
M 1	Eindimensionale Kinematik des Punktes	9
M 2	Zwei- und dreidimensionale Bewegung	19
M 3	Newton'sche Axiome, Bewegungsgleichung	30
M 4	Arbeit, Energie, Leistung	40
M 5	Impuls- und Drehimpulserhaltungssatz	51
M 6	Gravitation	63
M 7	Statik	70
M 8	Translation und Rotation starrer Körper	80
M 9	Bewegtes Bezugssystem	95
M 10	Spezielle Relativitätstheorie	106
M 11	Äußere Reibung	116
M 12	Verformung fester Körper	125
M 13	Ruhende Flüssigkeiten und Gase	131
M 14	Strömung idealer Flüssigkeiten und Gase	139
M 15	Strömung realer Flüssigkeiten und Gase	149
W	Schwingungen und Wellen	159
W 1	Harmonische Schwingungen	159
W 2	Gedämpfte Schwingungen	169
W 3	Erzwungene Schwingungen	180
W 4	Wellenausbreitung	193
W 5	Schallwellen	202
T	Thermodynamik	213
T 1	Kalorimetrie, thermische Ausdehnung	213
T 2	Wärmeübertragung	219
T 3	Zustandsänderungen – Erster Hauptsatz der Thermodynamik	226
T 4	Kreisprozesse	239
T 5	Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik	246
T 6	Gaskinetik	253
T 7	Wärmestrahlung	261
E	Elektrizität und Magnetismus	274
E 1	Gleichstromkreis	274
E 2	Elektrisches Feld	286
E 3	Magnetisches Feld	299
E 4	Induktion	309
E 5	Wechselstromkreis	319

O	Optik	329
O 1	Reflexion, Brechung und Dispersion.....	329
O 2	Dünne Linse	336
O 3	Spiegel.....	346
O 4	Dicke Linse, Linsensysteme	352
O 5	Auge, optische Vergrößerung.....	362
O 6	Optische Instrumente	367
O 7	Interferenz und Beugung	382
S	Struktur der Materie	395
S 1	Welle-Teilchen-Dualismus	395
S 2	Atomhülle	403
S 3	Atomkern	413

■ M 1 Eindimensionale Kinematik des Punktes

Die Kinematik beschreibt die Bewegung von Körpern, ohne nach der Bewegungsursache (Kräfte, Drehmomente) zu fragen. Häufig spielt die Ausdehnung der Körper keine Rolle, so dass sie vereinfacht als punktförmig behandelt werden können. Bei einem ausgedehnten Körper kann man auch einen speziellen Punkt, z. B. den Schwerpunkt, stellvertretend für den Körper betrachten.

Unter *eindimensional* wird eine Bewegung verstanden, wenn eine einzige Variable ausreicht, um den Ort des Punktes in Abhängigkeit von der Zeit zu beschreiben. Dies ist beispielsweise der Fall bei geradliniger Bewegung, aber auch bei geführter Bewegung auf einer krummlinigen Bahn, wie bei Schienenfahrzeugen oder Autos, die der Straße folgen. Hier wird der Weg $s(t)$ längs der Bahn gemessen. Bei bekannter Abhängigkeit des Weges von der Zeit, folgen die Geschwindigkeit $v(t)$ und die Beschleunigung $a(t)$ durch Ableiten (Tabelle M 1.1). Umgekehrt ergeben sich die Geschwindigkeit und der Ort durch Integration aus der Beschleunigung. Bei der vektoriellen Beschreibung in Abschnitt M 2 sind die Bahngrößen die Tangentialkomponenten der Vektoren $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$.

Tabelle M 1.1 Beziehungen zwischen kinematischen Größen

Bahngrößen	Winkelgrößen
Weg s	Winkel $\varphi = \frac{s}{r}$
Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{v}{r}$
Beschleunigung $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$	Winkelbeschleunigung $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{a}{r}$

Völlig gleichartige Zusammenhänge beschreiben die Bewegung eines Punktes auf einer Kreisbahn mit Radius r . Hier benutzt man sinnvollerweise Winkelgrößen. Sie sind ebenfalls in Tabelle M 1.1 zusammengestellt.

Für den einfachen Fall konstanter Beschleunigung a_0 bzw. Winkelbeschleunigung α_0 sind die Ergebnisse der Integration in Tabelle M 1.2 angegeben.

Tabelle M 1.2 Geschwindigkeit und Weg bei konstanter Beschleunigung

Bahngrößen	Winkelgrößen
$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau$ $= v_0 + a_0 (t - t_0)$	$\omega(t) = \omega_0 + \int_{t_0}^t \alpha(\tau) d\tau$ $= \omega_0 + \alpha_0 (t - t_0)$
$s(t) = s_0 + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau$ $= s_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} a_0 (t - t_0)^2$	$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^t \omega(\tau) d\tau$ $= \varphi_0 + \omega_0 (t - t_0) + \frac{1}{2} \alpha_0 (t - t_0)^2$

M 1.1 Massenpunkt auf einer Geraden

Ein punktförmiger Körper bewegt sich mit konstanter Beschleunigung längs der x -Achse. Er befindet sich zur Zeit $t = 0$ am Ort x_0 und hat dort die Geschwindigkeit v_0 .

- Wo befindet sich der Körper zur Zeit t_1 ?
- Welche Geschwindigkeit v_1 hat er dort?
- Zu welcher Zeit und an welchem Ort erfolgt die Umkehr der Bewegungsrichtung?
- Skizzieren Sie das $x(t)$ - und das $v(t)$ -Diagramm.

$$x_0 = 6,0 \text{ m} \quad v_0 = -5,0 \text{ m/s} \quad a_0 = 2,0 \text{ m/s}^2 \quad t_1 = 3,0 \text{ s}$$

a) $x_1 = x(t_1) = x_0 + v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_0 t_1^2 = \underline{\underline{0}}$

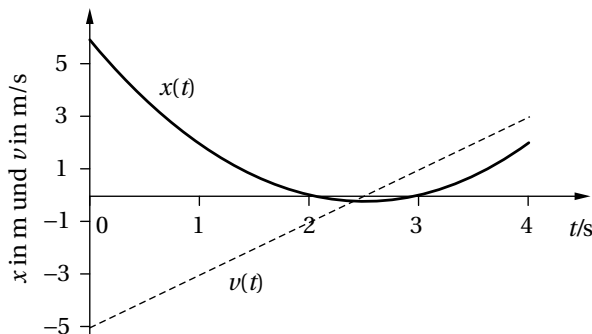
b) $v_1 = v_0 + a_0 t_1 = \underline{\underline{1,0 \text{ m/s}}}$

- c) Die Geschwindigkeit muss am Umkehrpunkt null sein: $v_0 + a_0 t_2 = 0$ liefert

$$t_2 = -\frac{v_0}{a_0} = 2,5 \text{ s}$$

$$x_2 = x(t_2) = x_0 + v_0 t_2 + \frac{1}{2} a_0 t_2^2 = \underline{\underline{-0,25 \text{ m}}}$$

- d)



M 1.2 Schwingung

Ein schwingender Körper hat die Geschwindigkeit $v_x(t) = v_m \cos(2\pi t/T)$. Er befindet sich zur Zeit $t_0 = T/4$ am Ort x_0 .

Geben Sie den Ort x und die Beschleunigung a_x des Körpers als Funktion der Zeit t an!

$$v_x(t) = v_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

$$x(t) = \int v_x \, dt$$

$$x(t) = \frac{v_m T}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + C$$

$$x\left(\frac{T}{4}\right) = x_0 = \frac{v_m T}{2\pi} \sin \frac{\pi}{2} + C$$

$$C = x_0 - \frac{v_m T}{2\pi}$$

$$x(t) = \frac{v_m T}{2\pi} \left(\sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) - 1 \right) + x_0$$

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt}$$

$$a_x(t) = -2\pi \frac{v_m}{T} \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$$

M 1.3 Kraftfahrzeug

Ein Kraftfahrzeug nähert sich einer Verkehrsampel mit verminderter Geschwindigkeit. Beim Umschalten der Ampel auf Grün beschleunigt es während der Zeit t_1 gleichmäßig mit a und legt dabei die Strecke s_1 zurück.

Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_0 und v_1 am Anfang und am Ende der Beschleunigungsphase?

$$a = 0,94 \, \text{m/s}^2 \quad t_1 = 5,3 \, \text{s} \quad s_1 = 60 \, \text{m}$$

$$s_1 = \frac{a}{2} t_1^2 + v_0 t_1 \quad (s_0 = 0)$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{s_1}{t_1} - \frac{at_1}{2} = \underline{\underline{32 \, \text{km/h}}}$$

$$v_1 = at_1 + v_0$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{s_1}{t_1} + \frac{at_1}{2} = \underline{\underline{50 \, \text{km/h}}}$$

M 1.4 Notbremsen

Beim Notbremsen wird ein mit einer Geschwindigkeit v_{x0} fahrender Zug auf einer Strecke von $x_0 = 0$ bis x_1 zum Stehen gebracht.

- a) Wie groß ist die konstante Bremsbeschleunigung a_x und wie lange dauert der Bremsvorgang?

b) Stellen Sie den Verlauf der Bewegung im $x(t)$ -, $v_x(t)$ - und $a_x(t)$ -Diagramm dar!

$$x_1 = 260 \text{ m} \quad v_{x0} = 90 \text{ km/h}$$

a) $x = \frac{a_x}{2} t^2 + v_{x0} t \quad (x_0 = 0)$

$$v_x = a_x t + v_{x0}$$

$$x_1 = \frac{a_x}{2} t_1^2 + v_{x0} t_1$$

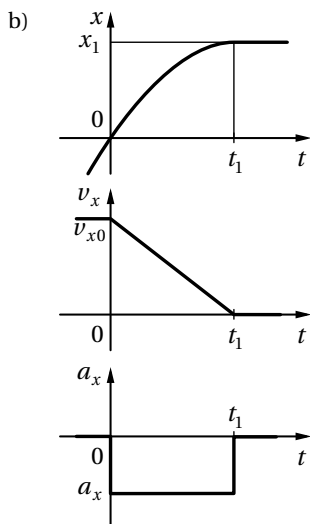
$$v_{x1} = 0 = a_x t_1 + v_{x0}$$

$$\Rightarrow t_1 = -\frac{v_{x0}}{a_x}$$

$$x_1 = \frac{v_{x0}^2}{2a_x} - \frac{v_{x0}^2}{a_x} = -\frac{v_{x0}^2}{2a_x}$$

$$a_x = -\frac{v_{x0}^2}{2x_1} = \underline{\underline{-1,20 \text{ m/s}^2}}$$

$$t_1 = -\frac{v_{x0}}{a_x} = \frac{2x_1}{v_{x0}} = \underline{\underline{21 \text{ s}}}$$



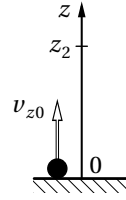
M 1.5 Senkrechter Wurf

Ein Körper wird von der Erdoberfläche aus ($z_0 = 0$) mit der Anfangsgeschwindigkeit v_{z0} senkrecht nach oben abgeschossen.

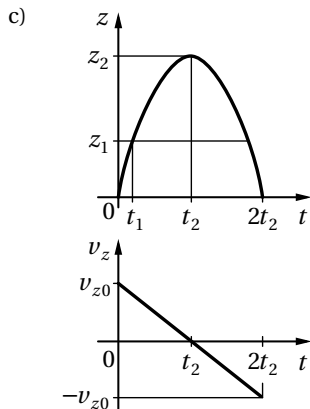
- Welche Geschwindigkeit v_{z1} hat er in der Höhe z_1 ?
- Welche Maximalhöhe z_2 erreicht er und wie groß ist die Steigzeit?
- Skizzieren Sie den Verlauf des Wurfes im $z(t)$ - und $v_z(t)$ -Diagramm!

$$v_{z0} = 20 \text{ m/s} \quad z_1 = 5,0 \text{ m} \quad g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } z &= -\frac{g}{2}t^2 + v_{z0}t \quad (z_0 = 0) \\
 v_z &= -gt + v_{z0} \Rightarrow t = \frac{v_{z0} - v_z}{g} \\
 z &= -\frac{(v_{z0} - v_z)^2}{2g} + v_{z0} \frac{(v_{z0} - v_z)}{g} = \frac{v_{z0}^2 - v_z^2}{2g} \\
 v_z^2 &= v_{z0}^2 - 2gz \\
 v_{z1} &= +\sqrt{v_{z0}^2 - 2gz_1} = \underline{\underline{+17,4 \text{ m/s}}} \\
 v_{z1}^* &= -\sqrt{v_{z0}^2 - 2gz_1} = \underline{\underline{-17,4 \text{ m/s}}}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{b) Aus a):} \\
 z &= \frac{v_{z0}^2 - v_z^2}{2g} \\
 \text{mit } z &= z_2 \text{ und } v_z = v_{z2} = 0 \\
 z_2 &= \frac{v_{z0}^2}{2g} = \underline{\underline{20,4 \text{ m}}} \\
 \text{Steigzeit: } t_2 &= \frac{v_{z0}}{g} = \underline{\underline{2 \text{ s}}}
 \end{aligned}$$



M 1.6 Testfahrzeuge

Zwei Testfahrzeuge beginnen gleichzeitig eine geradlinige Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ am gleichen Ort.

Das Fahrzeug A bewegt sich mit der Beschleunigung $a_A = a_0 = \text{const}$, das Fahrzeug B mit der Beschleunigung $a_B = kt$; $k = \text{const}$.

Beide Fahrzeuge legen in der Zeit t_1 die Strecke s_1 zurück.

- Skizzieren Sie den Verlauf beider Bewegungen im $a(t)$ -, $v(t)$ - und $s(t)$ -Diagramm!
- Berechnen Sie die Zeit t_1 und die Strecke s_1 !
- Welche Geschwindigkeiten v_{A1} und v_{B1} haben die Fahrzeuge am Ende der Strecke s_1 erreicht?

d) Nach welcher Zeit t_2 haben beide Fahrzeuge die gleiche Geschwindigkeit v_2 erreicht?

Gegeben: a_0, k

a) $a_A = a_0 = \text{const}$

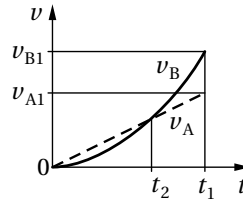
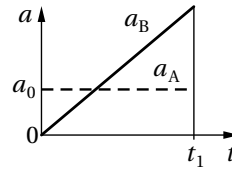
$$v_A = a_0 t \quad (v_{A0} = 0)$$

$$s_A = \frac{a_0}{2} t^2 \quad (s_{A0} = 0)$$

$$a_B = k t$$

$$v_B = \frac{k}{2} t^2 \quad (v_{B0} = 0)$$

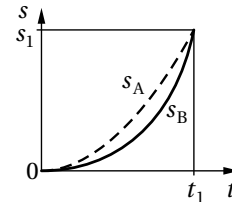
$$s_B = \frac{k}{6} t^3 \quad (s_{B0} = 0)$$



b) $s_1 = s_{A1} = s_{B1}$

$$s_1 = \frac{a_0}{2} t_1^2 = \frac{k}{6} t_1^3$$

$$t_1 = 3 \frac{a_0}{k}; \quad s_1 = \frac{9}{2} \frac{a_0^3}{k^2}$$



c) $v_{A1} = a_0 t_1 = 3 \frac{a_0^2}{k}$

$$v_{B1} = \frac{k}{2} t_1^2 = \frac{9}{2} \frac{a_0^2}{k}$$

d) $v_{A2} = v_{B2}$

$$a_0 t_2 = \frac{k}{2} t_2^2 \Rightarrow t_2 = 2 \frac{a_0}{k}$$

M 1.7 Güterzug

Ein Güterzug passiert auf einem Nebengleis mit der konstanten Geschwindigkeit v'_0 einen Bahnhof. Zur gleichen Zeit $t_0 = 0$ fährt ein Personenzug in derselben Richtung ab. Die Beschleunigung des Personenzuges nimmt von a_0 (zur Zeit $t = 0$) linear mit der Zeit bis auf null (zur Zeit t_1) ab. Dann fährt er mit konstanter Geschwindigkeit v_1 weiter und überholt den Güterzug.

a) Zu welcher Zeit t_2 fährt der Personenzug am Güterzug vorbei?

b) In welcher Entfernung s_2 vom Bahnhof geschieht das?

c) Wie groß ist die Relativgeschwindigkeit $\Delta v = v_2 - v'_0$ beim Überholen?

d) Skizzieren Sie das $s(t)$ -, das $v(t)$ - und das $a(t)$ -Diagramm beider Bewegungen!

$$v'_0 = 54 \text{ km/h} \quad t_1 = 160 \text{ s} \quad a_0 = 0,25 \text{ m/s}^2$$

a) Güterzug: $s'(t) = v'_0 t$

Personenzug:

Allgemeiner Ansatz für $a(t)$:

$$a = bt + a_0$$

Bestimmung der Konstanten b ($t = t_1$):

$$0 = bt_1 + a_0$$

$$\Rightarrow b = -\frac{a_0}{t_1}$$

$$a = a_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) \quad (t \leq t_1)$$

Der Überholvorgang liegt im Bereich $t \geq t_1$. Ermittlung $s(t)$:

$$t \geq t_1: \quad a = 0$$

$$v(t) = v_1$$

$$s - s_1 = \int_{t_1}^t v_1 dt$$

$$s(t) = v_1(t - t_1) + s_1 \quad (*)$$

Bestimmung der Anfangsbedingungen s_1 und v_1 :

$$t \leq t_1: \quad v - v_0 = \int_0^t a_0 \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) dt \quad v_0 = 0$$

$$v(t) = a_0 \left(t - \frac{t^2}{2t_1}\right)$$

$$\Rightarrow v_1 = a_0 \frac{t_1}{2}$$

$$s - s_0 = \int_0^t a_0 \left(t - \frac{t^2}{2t_1}\right) dt \quad s_0 = 0$$

$$s(t) = a_0 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6t_1}\right)$$

$$\Rightarrow s_1 = a_0 \frac{t_1^2}{3}$$

Damit wird (*):

$$s(t) = \frac{a_0 t_1}{2} (t - t_1) + a_0 \frac{t_1^2}{3} = \frac{a_0 t_1}{2} \left(t - \frac{t_1}{3}\right)$$

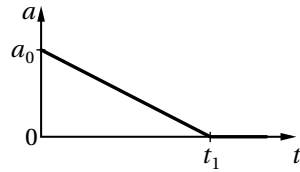
Bedingung für das Einholen:

$$s(t_2) = s'(t_2)$$

$$\frac{a_0 t_1}{2} \left(t_2 - \frac{t_1}{3}\right) = v'_0 t_2$$

$$t_2 \left(\frac{a_0 t_1}{2} - v'_0\right) = \frac{a_0 t_1^2}{6}$$

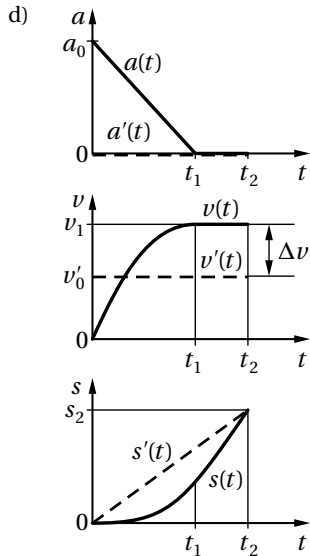
$$t_2 = \frac{t_1}{3 \left(1 - \frac{2v'_0}{a_0 t_1}\right)} = \underline{\underline{213 \text{ s}}}$$



b) $s_2 = s'_2 = v'_0 t_2 = \underline{\underline{3,2 \text{ km}}}$

c) $\Delta v = v_2 - v'_2 = v_1 - v'_0$

$$\Delta v = \frac{a_0 t_1}{2} - v'_0 = \underline{\underline{18 \text{ km/h}}}$$



M 1.8 Schienenfahrzeug

Ein Schienenfahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit v_0 . Nach Abschalten des Triebwerkes zur Zeit $t_0 = 0$ wird das Fahrzeug im Wesentlichen durch den Luftwiderstand gebremst; die Beschleunigung ist geschwindigkeitsabhängig: $a = -Kv^2$.

a) Nach welcher Zeit t_1 ist die Geschwindigkeit auf v_1 abgesunken?

b) Welche Strecke s_1 wurde in der Zeit t_1 zurückgelegt?

$$v_0 = 120 \text{ km/h} \quad K = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1} \quad v_1 = 60 \text{ km/h}$$

a) $a = \frac{dv}{dt} = -Kv^2$

$$\frac{dv}{v^2} = -K dt$$

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v^2} = -K \int_0^t dt$$

$$\left[-\frac{1}{v} \right]_{v_0}^v = -Kt$$

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} = -Kt$$

(*)

$$\frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} = -Kt_1$$

$$t_1 = \frac{1}{K} \left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0} \right) = \underline{\underline{80 \text{ s}}}$$

b) Die Gleichung (*) liefert:

$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 K t}$$

Zurückgelegter Weg durch Integration:

$$s(t) = v_0 \int_0^t \frac{d\tau}{1 + v_0 K \tau}$$

$$\text{Substitution: } 1 + v_0 K \tau = z, d\tau = \frac{dz}{v_0 K}$$

$$s(t) = \frac{1}{K} \int_1^{1+v_0 K t} \frac{dz}{z} = \frac{1}{K} \ln(1 + v_0 K t)$$

$$s_1 = s(t_1) = \frac{1}{K} \ln(1 + v_0 K t_1) = \frac{1}{K} \ln \frac{v_0}{v_1} = \frac{1}{K} \ln 2 = \underline{\underline{1,85 \text{ km}}}$$

M 1.9 Rennwagen

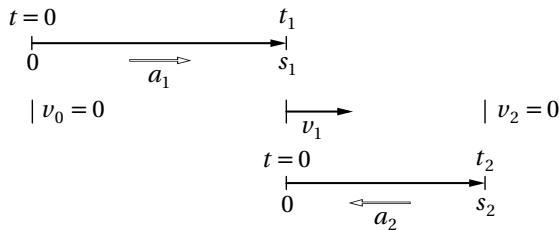
Ein Rennwagen durchfährt zwischen zwei Haarnadelkurven eine Strecke s_0 , wobei Anfangs- und Endgeschwindigkeit annähernd gleich null seien. Die als konstant angesehene Beschleunigung ist a_1 , die ebenfalls als konstant vorausgesetzte Verzögerung ist a_2 .

a) Welche minimale Zeit t_0 benötigt der Wagen für die Strecke s_0 ?

b) Welche Höchstgeschwindigkeit v_1 erreicht er auf dieser Strecke?

$$s_0 = 120 \text{ m} \quad a_1 = 2,5 \text{ m/s}^2 \quad a_2 = -5,0 \text{ m/s}^2$$

Zur Vereinfachung wird in der Bremsphase die Zeit- und Wegmessung neu bei null begonnen:



Anfahren:

$$s_1 = \frac{a_1}{2} t_1^2 \quad (1)$$

$$v_1 = a_1 t_1 \quad (2)$$

Bremsen:

$$s_2 = \frac{a_2}{2} t_2^2 + v_1 t_2 \quad (3)$$

$$v_2 = 0 = a_2 t_2 + v_1 \quad (4)$$

Gesamtbewegung:

$$s_0 = s_1 + s_2 \quad (5)$$

$$t_0 = t_1 + t_2 \quad (6)$$

(4) mit (2): $a_1 t_1 = -a_2 t_2$

$$\Rightarrow t_2 = -\frac{a_1}{a_2} t_1 \quad (7)$$

(5) mit (3) und (2):

$$s_0 - s_1 = \frac{a_2}{2} t_2^2 + a_1 t_1 t_2 \quad (8)$$

(8) mit (7) und (1):

$$s_0 = \frac{a_1}{2} t_1^2 - \frac{a_1^2}{2a_2} t_1^2 = \frac{a_1}{2} t_1^2 \left(1 - \frac{a_1}{a_2}\right)$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{2s_0 a_2}{a_1(a_2 - a_1)}} \quad (9)$$

a) (6) mit (7) und (9):

$$t_0 = t_1 - \frac{a_1}{a_2} t_1 = t_1 \frac{a_2 - a_1}{a_2}$$

$$t_0 = \sqrt{\frac{2s_0(a_2 - a_1)}{a_1 a_2}} = \underline{\underline{12 \text{ s}}}$$

b) (2) mit (9):

$$v_1 = \sqrt{\frac{2s_0 a_1 a_2}{a_2 - a_1}} = \underline{\underline{72 \text{ km/h}}}$$

M 1.10 Rotor

Ein Rotor läuft aus dem Stand hoch, wobei die Winkelbeschleunigung folgender Funktion gehorcht:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left[1 - \sin\left(\frac{\pi}{2t_1} t\right) \right]$$

Nach der Zeit t_1 ist die Enddrehzahl n_1 erreicht und der Rotor läuft mit konstanter Drehzahl weiter.

Wie viele Umdrehungen hat der Rotor während des Anlaufvorgangs ausgeführt?

$$t_1 = 5 \text{ s} \quad n_1 = 1800 \text{ min}^{-1}$$

Erste Integration zur Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega(t) = \int_0^t \alpha(\tau) d\tau = \alpha_0 \left[t + \frac{2t_1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2t_1} t\right) - \frac{2t_1}{\pi} \right]$$

$$\omega_1 = 2\pi n_1 = \omega(t_1) = \alpha_0 t_1 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$$

liefert

$$\alpha_0 = \frac{2\pi n_1}{t_1 \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)} = 103,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Die zweite Integration ergibt den Drehwinkel

$$\varphi_1 = \varphi(t_1) = \int_0^{t_1} \omega(t) dt = \alpha_0 t_1^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} - \frac{2}{\pi}\right)$$

Mit dem obigen Ergebnis von α_0 ergibt sich

$$\varphi_1 = \frac{2\pi n_1 t_1}{\pi - 2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} - 2 \right) = 697 \text{ rad}$$

Damit wird die Zahl der Umdrehungen

$$N = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{n_1 t_1}{\pi - 2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} - 2 \right) = \underline{\underline{111}}$$

M 1.11 Drehmaschine

Eine Drehmaschine rotiert mit der Drehzahl n_0 . Sie wird mit konstanter Winkelbeschleunigung (-verzögerung) α_0 abgebremst und kommt nach N Umdrehungen zum Stillstand.

Wie groß ist die Winkelbeschleunigung und wie lange dauert der Bremsvorgang?

$$N = 10 \quad n_0 = 480 \text{ min}^{-1}$$

Aus den allgemeinen Formen für die Winkelgeschwindigkeit und den Drehwinkel

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha_0 t \quad \text{und} \quad \varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha_0 t^2$$

wird am Ende des Bremsvorgangs zur Zeit t_1 :

$$\omega(t_1) = 0 = \omega_0 + \alpha_0 t_1 \tag{1}$$

$$\varphi(t_1) = N \cdot 2\pi = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha_0 t_1^2 \tag{2}$$

Setzt man $t_1 = -\frac{\omega_0}{\alpha_0}$ aus (1) in (2) ein, erhält man die zeitunabhängige Beziehung

$$N \cdot 2\pi = -\frac{\omega_0^2}{2\alpha_0}$$

und damit

$$\alpha_0 = -\frac{\pi n_0^2}{N} = \underline{\underline{20,1 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}}$$

Zeitdauer:

$$t_1 = -\frac{\omega_0}{\alpha_0} = \underline{\underline{\frac{2N}{n_0} = 2,5 \text{ s}}}$$

■ M2 Zwei- und dreidimensionale Bewegung

M 2.1 Auto auf Parabelflug

Am 26.1.2009 fuhr in Limbach-Oberfron, Sachsen, ein Auto über einen gefrorenen Erdwall der Höhe y_0 und flog im Abstand x_1 in der Höhe y_1 in das Dach einer Kirche.

Bestimmen Sie den Abflugwinkel β_0 und die Abfluggeschwindigkeit v_0 des Autos unter Vernachlässigung der Luftreibung und unter der Voraussetzung, dass

- a) das Auto mit horizontaler Flugbahn im Dach landet,
b) eine Kurve mit minimaler Abfluggeschwindigkeit durchfliegen wird.

$$y_0 = 80 \text{ cm} \quad y_1 = 7 \text{ m} \quad x_1 = 30 \text{ m}$$

- a) Die x - und y -Koordinaten der Bahnkurve lauten:

$$x(t) = v_0 \cos \beta_0 \cdot t$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin \beta_0 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Eliminieren der Zeit:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \beta_0}$$

Wurfparabel:

$$y(x) = y_0 + x \tan \beta_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \beta_0} x^2$$

Zielpunkt:

$$y_1 = y_0 + x_1 \tan \beta_0 - \frac{g}{2 v_0^2 \cos^2 \beta_0} x_1^2$$

Horizontales Eintreffen im Zielpunkt bedingt:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x_1} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \tan \beta_0 - \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \beta_0} x$$

$\tan \beta_0 = \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \beta_0} x_1$ eingesetzt in die Gl. des Zielpunkts liefert

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2} x_1 \tan \beta_0 \text{ und damit}$$

$$\beta_0 = \arctan \left(\frac{2(y_1 - y_0)}{x_1} \right) = \underline{\underline{22,5^\circ}}$$

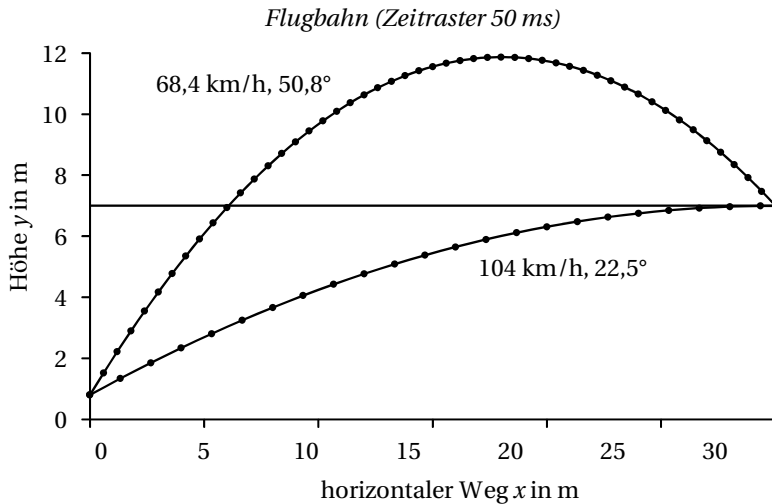
Die Geschwindigkeit folgt durch Auflösung der Gl. für den Zielpunkt:

$$v_0 = \sqrt{\frac{g x_1^2}{2 \cos^2 \beta_0 (x_1 \tan \beta_0 - y_1 + y_0)}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{g (x_1^2 + 4 (y_1 - y_0)^2)}{2 (y_1 - y_0)}} = \underline{\underline{28,9 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 104 \frac{\text{km}}{\text{h}}}}$$

Das Diagramm zeigt die Flugbahn mit der Zeit als Parameter. Der Flug dauert

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0 \cos \beta_0} = 1,12 \text{ s}$$



- b) Die Gl. für die Startgeschwindigkeit wird der Einfachheit halber umgeformt zu

$$v_0^2 = \frac{gx_1^2}{2 \cos^2 \beta_0 (x_1 \tan \beta_0 + y_0 - y_1)}$$

Gesucht ist das Minimum von v_0 und damit auch das Minimum von v_0^2 .

Ableitung nach Quotienten- und Produktregel:

$$\frac{dv_0^2}{d\beta_0} = \frac{-2gx_1^2 [-2 \cos \beta_0 \sin \beta_0 (x_1 \tan \beta_0 + y_0 - y_1)] + x_1}{\text{Nenner}^2}$$

Nullsetzen des Zählers liefert die Beziehung

$$x_1 = 2 \cos \beta_0 \sin \beta_0 (x_1 \tan \beta_0 + y_0 - y_1)$$

Diese Gleichung hat keine geschlossene Lösung für den Winkel β_0 , kann aber z. B. auf einem programmierbaren oder grafischen Taschenrechner numerisch gelöst werden. Es ergibt sich:

$$\beta_0 = 50,838^\circ \quad \text{und damit} \quad v_0 = 19,01 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 68,4 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$$

(Der Winkel ist so genau angegeben, weil er relativ kritisch in das Ergebnis für die Startgeschwindigkeit eingeht.)

Der Flug dauert

$$t_1 = \frac{x_1}{v_0 \cos \beta_0} = 2,5 \text{ s}$$

Die Flugbahn ist ebenfalls in obigem Diagramm eingezeichnet.

M2.2 Wasserspeier

Aus einem Wasserspeier fließt Regenwasser mit der Geschwindigkeit v_0 unter einem Winkel α_0 gegenüber der Vertikalen ab. Der Ausfluss befindet sich in der Höhe h über dem Erdboden und in der Entfernung x_0 von der Gebäudewand.

In welcher Entfernung x_1 von der Gebäudewand trifft das Wasser am Erdboden auf?

$$v_0 = 0,80 \text{ m/s} \quad \alpha_0 = 60^\circ \quad h = 12 \text{ m} \quad x_0 = 0,75 \text{ m}$$

Ort-Zeit-Funktionen:

$$x(t) = v_{x0}t + x_0; \quad v_{x0} = v_0 \sin \alpha_0$$

$$z(t) = \frac{g}{2}t^2 + v_{z0}t; \quad v_{z0} = v_0 \cos \alpha_0$$

Auftreffpunkt:

$$x_1 = v_0 \sin \alpha_0 t_1 + x_0$$

$$h = \frac{g}{2}t_1^2 + v_0 \cos \alpha_0 t_1$$

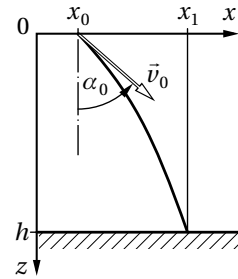
t_1 aus h berechnen:

$$t_1^2 + \frac{2v_0 \cos \alpha_0}{g}t_1 - \frac{2h}{g} = 0$$

$$t_1 = -\frac{v_0 \cos \alpha_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0 + 2gh}{g^2}} \quad (t_1 > 0)$$

t_1 in x_1 einsetzen:

$$x_1 = x_0 + \frac{v_0^2 \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0}} - 1 \right) = \underline{\underline{1,8 \text{ m}}}$$



M 2.3 Erdrotation

Wie groß ist die Radialbeschleunigung (Zentripetalbeschleunigung) a_r für einen auf der Erdoberfläche liegenden Körper am 51. Breitengrad infolge der Erdumdrehung?

Mittlerer Erdradius: 6371 km Sonnentag: 86 400 s Sterntag: 86 164 s

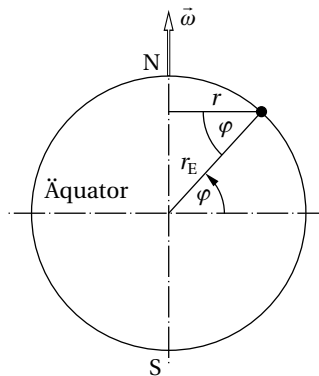
$$a_r = \omega^2 r$$

$$r = r_E \cos \varphi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = d^* \quad (\text{Sterntag!})$$

$$a_r = \frac{4\pi^2}{d^{*2}} r_E \cos \varphi = \underline{\underline{0,0213 \text{ m/s}^2}}$$



M 2.4 Riesenrad

Ein Riesenrad hat die Umlaufdauer T .

- Wie groß sind Geschwindigkeit v_0 und die Radialbeschleunigung a_r einer Person im Abstand r von der Drehachse?
- Welche Bahnbeschleunigung a_s hat dieselbe Person, wenn das Riesenrad nach Abschalten des Antriebs bei gleichmäßiger Verzögerung noch eine volle Umdrehung ausführt?

$$T = 12 \text{ s} \quad r = 5,6 \text{ m}$$

$$\text{a) } v_0 = \omega_0 r = \frac{2\pi r}{T} = \underline{\underline{2,9 \text{ m/s}}}$$

$$a_r = \omega_0^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \underline{\underline{1,5 \text{ m/s}^2}}$$

b) Verzögerungsphase:

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t \quad (\alpha < 0)$$

$$\varphi(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Stillstand:

$$0 = \omega_0 + \alpha t_1 \Rightarrow t_1 = -\frac{\omega_0}{\alpha}$$

$$2\pi = \omega_0 t_1 + \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = -\frac{\omega_0^2}{2\alpha}$$

Winkelbeschleunigung:

$$\alpha = -\frac{\omega_0^2}{4\pi} = -\frac{\pi}{T^2} = -0,0218 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Bahnbeschleunigung:

$$a_s = \alpha \cdot r = -0,122 \text{ m/s}^2$$

M2.5 Eisenbahnzug

Ein Zug fährt auf einer Strecke mit dem Krümmungsradius r gleichmäßig beschleunigt an. Nach der Zeit t_1 hat er die Geschwindigkeit v_1 .

Gesucht: Tangential-, Radial- und Gesamtbeschleunigung nach der Fahrzeit t_2 .

$$r = 1200 \text{ m} \quad t_1 = 90 \text{ s} \quad v_1 = 54 \text{ km/h} \quad t_2 = 150 \text{ s}$$

$$a_s = \text{const}$$

$$v(t) = a_s t \quad (v = 0)$$

$$v_1 = a_s t_1$$

$$a_s = \frac{v_1}{t_1} = \underline{\underline{0,17 \text{ m/s}^2}}$$

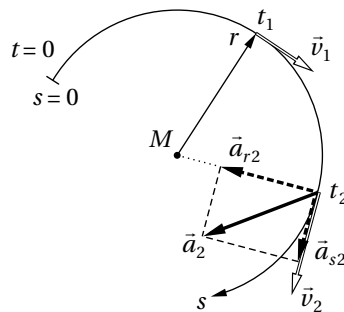
$$a_r = \frac{v^2}{r}; \quad v_2 = a_s t_2$$

$$a_{r2} = \frac{v_2^2}{r} = \frac{a_s^2 t_2^2}{r}$$

$$a_{r2} = \frac{v_1^2}{r} \left(\frac{t_2}{t_1} \right)^2 = \underline{\underline{0,52 \text{ m/s}^2}}$$

$$a = \sqrt{a_s^2 + a_r^2}$$

$$a_2 = \sqrt{a_s^2 + a_{r2}^2} = \underline{\underline{0,55 \text{ m/s}^2}}$$



M2.6 Schraubenmutter

Eine Schraubenmutter an einem rotierenden Rad bewegt sich auf einem Kreis (Radius r) in vertikaler Ebene nach der Winkel-Zeit-Funktion $\varphi(t) = (\alpha/2) \cdot t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$. Zur Zeit t_1 löst sich beim Winkel φ_1 die Mutter vom Rad.

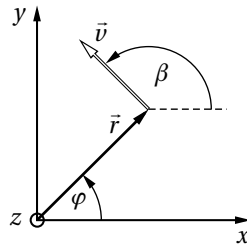
- Wie groß sind die Winkelbeschleunigung α und die Winkelgeschwindigkeit ω_1 zur Zeit t_1 ?
- Wie lautet der Ortsvektor $\vec{r}_1$ zur Zeit t_1 und wie der Vektor $\vec{\omega}_1$ der Winkelgeschwindigkeit im x, y, z -Koordinatensystem?
- Bestimmen Sie den Anfangsort (x_1, y_1) und die Anfangsgeschwindigkeit unter Angabe der Richtung (v_1 und β_1) bei der anschließenden Wurfbewegung!

$$r = 10 \text{ cm} \quad t_1 = 2,0 \text{ s}$$

$$\varphi_1 = \frac{125}{3} \pi (= 7500^\circ)$$

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} (= 90^\circ)$$

$$\omega_0 = 10\pi \text{ s}^{-1} \quad (f_0 = 5,0 \text{ s}^{-1})$$



$$\begin{aligned} \text{a) } \varphi_1 &= \frac{\alpha}{2} t_1^2 + \omega_0 t_1 + \varphi_0 \\ \alpha &= \frac{2}{t_1} \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{t_1} - \omega_0 \right) = \underline{\underline{33 \text{ s}^{-2}}} \end{aligned}$$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \alpha t + \omega_0$$

$$\omega_1 = \alpha t_1 + \omega_0$$

$$\omega_1 = \frac{2(\varphi_1 - \varphi_0)}{t_1} - \omega_0 = \underline{\underline{98 \text{ s}^{-1}}}$$

$$\text{b) } \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} r \cos \varphi_1 \\ r \sin \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren der Winkelgrößen stehen senkrecht auf der Ebene der Rotation:

$$\vec{\omega}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix}$$

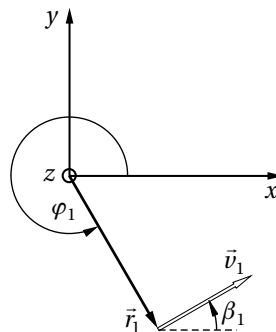
$$\begin{aligned} \text{c) } x_1 &= r \cos \varphi_1 = 5,0 \text{ cm,} \\ y_1 &= r \sin \varphi_1 = -8,66 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\vec{v}_1 = \vec{\omega}_1 \times \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} -r\omega_1 \sin \varphi_1 \\ r\omega_1 \cos \varphi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v_{1x} = -r\omega_1 \sin \varphi_1 = 8,48 \text{ m/s}$$

$$v_{1y} = r\omega_1 \cos \varphi_1 = 4,90 \text{ m/s}$$

$$v_1 = \sqrt{v_{1x}^2 + v_{1y}^2} = \underline{\underline{9,8 \text{ m/s}}}$$



$$\tan \beta_1 = \frac{v_{1y}}{v_{1x}} = -\cot \varphi_1$$

$$\underline{\underline{\beta_1 = 30^\circ}}$$

M2.7 Karussell

Ein Karussell beginnt seine Drehbewegung. Die zeitabhängige Winkelbeschleunigung folgt der Funktion $\alpha(t) = \alpha_0 - \beta t$. Wenn die Winkelbeschleunigung den Wert null erreicht hat, läuft das Karussell mit konstanter Drehzahl n_2 weiter.

- Welche Gesamtbeschleunigung a_1 erfährt eine Person, die sich im Abstand r von der Drehachse befindet, zum Zeitpunkt t_1 ?
- In welcher Zeit t_2 ist die konstante Drehzahl n_2 erreicht und wie groß ist diese?
- Mit welcher Bahngeschwindigkeit v_2 bewegt sich die Person für $t \geq t_2$?

$$r = 8,5 \text{ m} \quad t_1 = 20 \text{ s} \quad \alpha_0 = 0,036 \text{ rad/s}^2 \quad \beta = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}^3$$

- a) Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega(t) = \int_0^t \alpha(\tau) \, d\tau = \alpha_0 t - \frac{1}{2} \beta t^2$$

$$\omega_1 = \alpha_0 t_1 - \frac{1}{2} \beta t_1^2 = 0,48 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\text{Drehzahl: } n_1 = \omega_1 / 2\pi = 0,0764 \text{ s}^{-1} = 4,58 \text{ min}^{-1}$$

Radial- oder Zentripetalbeschleunigung:

$$a_{r1} = r\omega_1^2 = 1,96 \text{ m/s}^2$$

Bahnbeschleunigung:

$$a_{s1} = r\alpha_1 = r(\alpha_0 - \beta t_1) = 0,102 \text{ m/s}^2$$

Gesamtbeschleunigung (die Bahnbeschleunigung ist vernachlässigbar klein):

$$a_1 = \sqrt{a_{r1}^2 + a_{s1}^2} = 1,96 \text{ m/s}^2$$

- b) $\alpha(t_2) = 0 = \alpha_0 - \beta t_2$ liefert

$$\underline{\underline{t_2 = \alpha_0 / \beta = 30 \text{ s}}}$$

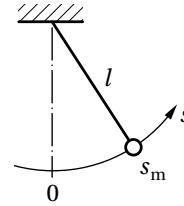
- c) $\omega_2 = \alpha_0 t_2 - \frac{1}{2} \beta t_2^2 = \frac{\alpha_0^2}{2\beta}$

$$\underline{\underline{v_2 = r\omega_2 = \frac{r\alpha_0^2}{2\beta} = 4,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

M2.8 Pendel

Die Ort-Zeit-Funktion eines Pendelkörpers ist für kleine Ausschläge $s(t) = s_m \cos \omega t$. Bestimmen Sie die Radialbeschleunigung a_r und die Bahnbeschleunigung a_s zu den Zeiten t_1 und t_2 ! T ist die Schwingungsdauer des Pendels: $T = 2\pi\sqrt{l/g}$, $\omega = 2\pi/T$.

$$l = 100 \text{ cm} \quad s_m = 2,0 \text{ cm} \quad t_1 = 0 \quad t_2 = T/4$$



$$a_r = \frac{v^2}{l}$$

$$v = \dot{s} = -\omega s_m \sin \omega t \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$a_s = \ddot{s} = -\omega^2 s_m \cos \omega t$$

$$t_1 = 0: \quad v_1 = \dot{s}_1 = 0$$

$$\underline{\underline{a_{r1} = 0}}$$

$$a_{s1} = \ddot{s}_1 = -\omega^2 s_m$$

$$\underline{\underline{a_{s1} = -g \frac{s_m}{l} = -20 \text{ cm/s}^2}}$$

$$t_2 = \frac{T}{4}: \quad v_2 = \dot{s}_2 = -\omega s_m$$

$$\underline{\underline{a_{r2} = g \left(\frac{s_m}{l} \right)^2 = 0,39 \text{ cm/s}^2}}$$

$$a_{s2} = \ddot{s}_2 = 0$$

$$\underline{\underline{a_{s2} = 0}}$$

M2.9 Beschleunigungen

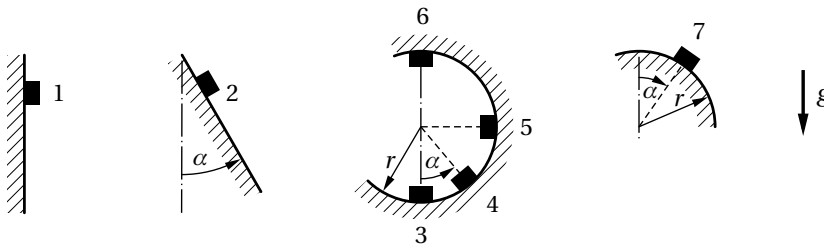
Der Betrag der Gesamtbeschleunigung a des Körpers ist für jeden der Fälle 1 bis 7 anzugeben, wenn

a) $v = 0$ (d. h., der Körper wird gerade freigegeben) und

b) $v \neq 0$

angenommen wird.

$\alpha = 30^\circ$ (Reibung nicht berücksichtigen.)



		a) $v = 0$	b) $v \neq 0$
Fall 1		$\underline{\underline{a = g}}$	$\underline{\underline{a = g}}$
Fall 2		$a = g \cos \alpha$ $a = \frac{g}{2} \sqrt{3}$	$a = \frac{g}{2} \sqrt{3}$