

Mathematische Optimierung und Wirtschaftsmathematik |
Mathematical Optimization and Econometrics

RESEARCH

Jan Natolski

Replizierende Portfolios in der Lebensversicherung

Mathematische Fundierung
und Analyse



Springer Spektrum

Mathematische Optimierung und Wirtschaftsmathematik | Mathematical Optimization and Econometrics

Reihe herausgegeben von

R. Werner, Augsburg, Deutschland

T. Harks, Augsburg, Deutschland

V. Shikhman, Chemnitz, Deutschland

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen Themen der mathematischen Optimierung und der Wirtschaftsmathematik publiziert. Hierbei werden sowohl Themen aus Grundlagen, Theorie und Anwendung der Wirtschafts-, Finanz- und Versicherungsmathematik als auch der Optimierung und des Operations Research behandelt. Die Publikationen sollen insbesondere neue Impulse für weitergehende Forschungsfragen liefern, oder auch zu offenen Problemstellungen aus der Anwendung Lösungsansätze anbieten. Die Reihe leistet damit einen Beitrag der Bündelung der Forschung der Optimierung und der Wirtschaftsmathematik und der sich ergebenden Perspektiven.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/15822>

Jan Natolski

Replizierende Portfolios in der Lebensversicherung

Mathematische Fundierung
und Analyse

 Springer Spektrum

Jan Natolski
Augsburg, Deutschland

Zugl.: Dissertation, Universität Augsburg, 2017

Erstgutachter: Prof. Dr. Ralf Werner
Zweitgutachter: Prof. Ralf Korn
Drittgutachter: Prof. Dr. Gernot Müller
Tag der mündlichen Prüfung: 23.05.2017

Mathematische Optimierung und Wirtschaftsmathematik | Mathematical Optimization and Econometrics

ISBN 978-3-658-20375-7 ISBN 978-3-658-20376-4 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-20376-4>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature

Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich einigen Personen meinen herzlichen Dank aussprechen, die mir im Laufe meiner Promotion eine unersetzliche Hilfe waren. Ohne sie wäre diese Dissertation so nicht entstanden.

Der größte Dank gilt meinem Doktorvater Professor Dr. Ralf Werner. Seine Ideen haben mich stets inspiriert und die fachlichen Diskussionen entscheidend vorangebracht. Auch persönlich kann ich mir keinen besseren Doktorvater vorstellen!

Desweiteren bedanke ich mich beim ehemaligen CRO der Allianz Deutschland, Pierre Joos. Seine Kenntnisse waren unentbehrlich für ein klares Verständnis der Problematik aus praktischer Perspektive.

Auch meinen Bürokollegen Andreas, Nazli und Jonas, sowie den Kollegen Fabian, Catinca, Alexander, Michael und Patrick gebührt ein lautes Dankeschön! Die Unterhaltungen im Büro, beim Mittagessen oder beim Kaffee haben für ausgesprochen gute Laune gesorgt und meinem wissenschaftlichen Schaffen neue Energie verliehen.

Mein herzlichster Dank geht an meine Eltern, Iwona und Krzysztof. Ihre Unterstützung während meines gesamten Lebens hat mich mit dem Mut, dem Wissen und der Persönlichkeit ausgestattet, die nötig war um diese Doktorarbeit zu verfassen.

Jan Natolski

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Problemstellung	1
1.2	Lösungsansätze	4
1.3	Lösung über replizierende Portfolios	8
1.4	Einordnung der Arbeit	16
1.5	Aufbau der Arbeit	20
2	Mathematischer Aufbau und Problemstellung	23
2.1	Das mathematische Modell	23
2.2	Problemstellung	26
3	Einführung in die replizierenden Portfolios	27
3.1	Zielgröße des Versicherers	28
3.2	Lösungsansätze in der Praxis	31
3.2.1	Das Terminal-Value-Matching	31
3.2.2	Das 2-Cash-Flow-Matching	32
3.2.3	Das 1-Cash-Flow-Matching	32
3.3	Definition des Replikationsproblems	35
4	Begründung der Replikationstheorie	37
4.1	Zielführender Lösungsansatz für kohärente Risikomaße	38
4.2	Der Fall Value-at-Risk	48
4.3	Replikation unter $\mathbb{W} = \mathbb{Q}$	53
4.4	Replikation unter $\mathbb{W} = \mathbb{P}$	63
5	Diskussion der Replikationsparameter	67
5.1	Numéraire und Martingalmaß	67
5.2	Wahl der Norm $\ \cdot\ _{\mathbb{W}}$	71
5.3	TV vs. 1-CF vs. 2-CF	74
5.4	Numerik	82

6	Eigenschaften der Probleme QTV, QSCF und QACF	87
6.1	Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen	87
6.2	Faire Preise	95
7	Zusammenhänge der Probleme QTV, QSCF und QACF	101
7.1	Simultane Diagonalisierung	101
7.2	Zeitseparabilität	104
7.3	Dynamisches Hedging mit dem Numéraire	106
8	Konvergenz von Monte-Carlo Verfahren	121
8.1	Starke Konsistenz	123
8.2	Asymptotische Normalität	128
8.3	Erwartungstreue	138
8.4	Konsequenzen für die Replikationstheorie	142
9	Schlussbetrachtung	159

1 Einleitung

Aufgabe jeder Versicherung ist es ausreichende Rückstellungen zu bilden um allen Versicherungsansprüchen in der Zukunft nachkommen zu können. Dazu werden stochastische Modelle für Schadensfälle herangezogen, auf deren Basis berechnet wird, welche Rückstellungen nötig sind um mit einer vorgegebenen Mindestwahrscheinlichkeit alle Ansprüche in der Zukunft decken zu können. In der Lebensversicherung ist die Berechnung der nötigen Rückstellungen ein besonders schwieriges Unterfangen. Der Hauptgrund ist die lange Laufzeit und die Komplexität der Verträge.

1.1 Problemstellung

Im Rahmen der Solvency II Richtlinie (EIOPA (2009)) ist jede Versicherung dazu verpflichtet ihr Risikokapital entsprechend dem Solvency Capital Requirement, kurz *SCR*, zu ermitteln um sicher zu stellen, dass das Unternehmen durch ausreichende Rückstellungen solvent bleibt. Das SCR ist definiert als das 0,5%-Quantil (Value-at-Risk) des Marktwerts der Basiseigenmittel (engl. *Basic Own Funds*, kurz *BOF*) in einem Jahr unter dem realen Wahrscheinlichkeitsmaß (vgl. EIOPA (2014, S. 7)). Die Basiseigenmittel sind das Kapital, das der Versicherung nach Abzug aller Verpflichtungen an Versicherungsnehmer und Gläubiger zur Verfügung steht. Eine detaillierte Beschreibung der BOF findet man u.a. in GDV (2007) und Oehlenberg u. a. (2011).

Im Jahr 2008 veröffentlichte das CFO Forum, ein Forum aus Mitgliedern der größten europäischen Versicherungskonzerne, das Konzept des *Market Consistent Embedded Value (MCEV)* zum Ziel „einer methodisch fundierten, über Unternehmensgrenzen hinweg vergleichbaren und aussagekräftigen Messung der Ertragskraft einzelner Versicherungsverträge sowie gesamter Bestände“ (siehe Becker u. a. (2014)). Der MCEV wurde zur Bestimmung der BOF im Rahmen einer Marktwertbilanz angepasst (siehe Wilson (2015)). In Bauer u. a. (2012) wird erwähnt, dass der Unterschied zwischen dem MCEV und den BOF nur sehr gering

ist und daher der MCEV im Rahmen akademischer Arbeiten stellvertretend für die BOF verwendet werden kann. Die Autoren Özkan u. a. (2011) verwenden gar direkt den Begriff MCEV anstatt der BOF. Die BOF entsprechen also in etwa dem MCEV. Jedoch sollte darauf hingewiesen werden, dass der MCEV im Gegensatz zu den BOF ursprünglich nicht zur Festsetzung der Höhe des SCR eingeführt wurde. Er dient mehr als Maß des Wertes einer Lebensversicherung aus Sicht des Aktionärs und nicht der Festsetzung von nötigen Rückstellungen zum Schutz der Versicherungsnehmer.

In einer vereinfachten Marktwertbilanz (siehe z.B. Abb. 1.1) ergeben sich die BOF aus dem Marktwert der Anlagen des Unternehmens abzüglich der *Technical Provisions*, die der Deckung aller Verpflichtungen gegenüber Vertragsnehmern dient. Genauer ausgedrückt entsprechen die Technical Provisions genau dem Preis, den das Unternehmen zahlen müsste, wenn es alle Rechte und Verpflichtungen aus abgeschlossenen Verträgen an eine andere Versicherung übertragen würde (siehe CEIOPS (2009)). Die Technical Provisions setzen sich im Wesentlichen aus dem *Best Estimate of Liabilities* und einem *Risk Margin* zusammen. Der Best Estimate of Liabilities entspricht dem heutigen Marktwert aller Verpflichtungen an Versicherungsnehmer. Dabei werden nur bereits abgeschlossene Verträge berücksichtigt, nicht jedoch zukünftige Verträge. Der in Solvency II geforderte Risk Margin soll einen Puffer bieten, der es einer anderen Versicherung oder einer Rückversicherung ermöglichen soll, die Verpflichtungen im Falle der Insolvenz übernehmen zu können. Eine derartige vereinfachte Bilanz ist in Abb. 1.1 abgebildet. Ich fasse im Folgenden zur Vereinfachung den Risk Margin und den Best Estimate of Liabilities kurz als *Liabilities* zusammen, da in dieser Arbeit nur die Aufteilung zwischen den Geldflüssen an Versicherungsnehmer und den Geldflüssen an Aktionäre von Bedeutung ist.

Um die Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit den Value-at-Risk des zukünftigen Marktwerts (vgl. Abb. 1.2) der BOF zu bestimmen, ist es also erforderlich sowohl den zukünftigen Marktwert der Aktiva als auch den zukünftigen Marktwert der Liabilities des Unternehmens, bedingt auf die ökonomische Entwicklung in der Zukunft, zu berechnen. Die Aktiva des Unternehmens sind zu jedem Zeit-

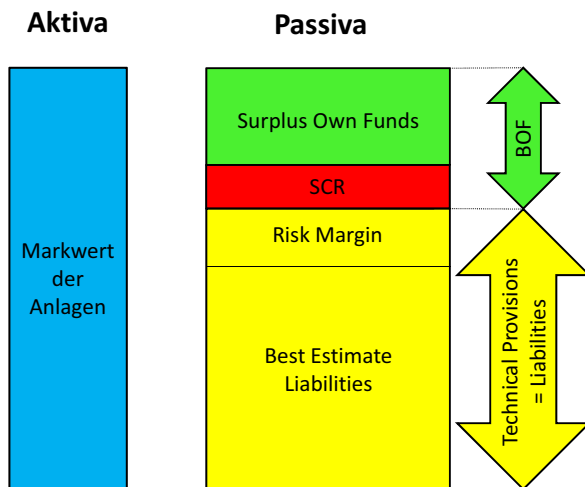


Abbildung 1.1: Die BOF in der Bilanz eines Versicherungsunternehmens (vgl. Reynolds (2015)).

punkt leicht zu bewerten, da sie üblicherweise bereits aus handelbaren Finanzinstrumenten bestehen, für deren Bewertung analytische Formeln oder effiziente numerische Algorithmen bekannt sind. Anders verhält es sich bei den Liabilities. In Verträgen der Lebensversicherung befinden sich Risikofaktoren, die vom Markt nicht abgebildet werden. Dazu gehören zum Beispiel Sterblichkeit und frühzeitige Verkaufsoptionen, aber auch die Länge der laufenden Verträge. Laufzeiten von bis zu vierzig Jahren sind durchaus üblich. Es gibt jedoch kaum Produkte am Finanzmarkt, die eine ähnliche Laufzeit haben, was eine marktkonsistente Bewertung deutlich erschwert. Hinzu kommt die Komplexität der Verträge. Versicherungsnehmer werden häufig an den Gewinnen des Unternehmens beteiligt und erhalten einen jährlichen Garantiezins, der nicht unterschritten werden darf. Diese Kreditierung erzeugt Auszahlungsprofile der Verträge, welche die Berechnung der Rückstellungen mit analytischen Methoden aussichtslos macht. Damit ist selbst

die Bewertung der heutigen BOF nicht trivial. Für die Bestimmung der zukünftigen Verteilung ist also ein geschickter Lösungsansatz unumgänglich.

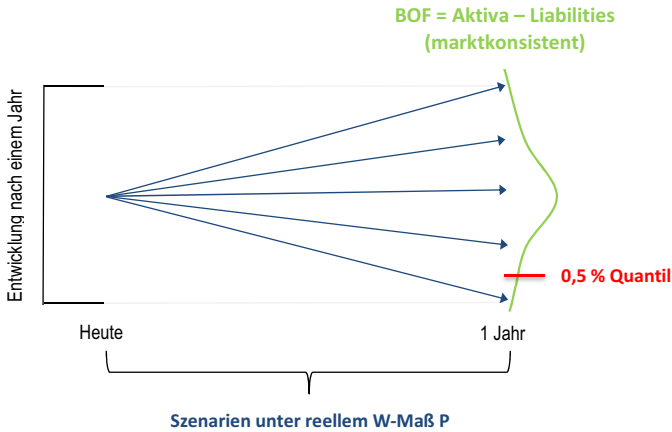


Abbildung 1.2: Idealerweise kennt man den marktkonsistenten Wert der BOF in einem Jahr für jedes beliebige Szenario und liest das 0,5%-Quantil ab.

1.2 Lösungsansätze

In der akademischen Forschung ist man daraufhin zunehmend auf Monte-Carlo Methoden aufmerksam geworden. Bei der klassischen Monte-Carlo Simulation werden für die Bewertung Verlaufspfade der zukünftigen Auszahlungen an Versicherungsnehmer (Liability Cash-Flows) unter Verwendung eines risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaßes erzeugt. Aus diesen Pfaden wird dann durch Mittelung approximativ der marktkonsistente Wert berechnet (siehe Abb. 1.3).

Grosen u. Jørgensen (2000) sind einer der Vorreiter in der Bewertung von Lebensversicherungen über Monte-Carlo Simulation. Sie formulieren ein zeitstetiges Finanzmarktmodell und eine an die Praxis angelehnte Kreditierungsstrategie der Versicherungsverträge. Daraufhin simulieren sie risikoneutrale Verlaufspfade

eines Vertrags und bestimmen den Wert des Vertrags durch Mittelung. Es ist nicht ihr Ziel die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Marktwertes in einem Jahr zu bestimmen. Ihr Augenmerk liegt vorwiegend auf der Untersuchung von Sensitivitäten des Vertrags bezüglich diverser Markt- und Kreditierungsparameter. Allerdings ist ihr Modell zur Kreditierung der Verträge ein Novum, da es die Gewinnbeteiligung der Versicherungsnehmer an den Gewinnen des Unternehmens einbezieht, ein Merkmal, welches in aktuellen Verträgen üblich ist. Dementsprechend wird es zur weiteren Analyse von Lebensversicherungen verwendet, wie z.B. in Bacinello (2001), Hansen u. Miltersen (2002) oder Schmeiser u. Wagner (2013).

Eine naheliegende Methode die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Marktwertes in einem Jahr zu bestimmen, wäre zunächst einjährige Szenarien unter dem realen Maß zu generieren (äußere Szenarien) und für jedes dieser Szenarien durch Monte-Carlo Simulation (innere Szenarien) den marktkonsistenten Wert zu bestimmen (vgl. Abb. 1.3). Ein solches Vorgehen nennt man Nested Monte-Carlo Verfahren. Das risikoneutrale Maß \mathbb{Q} zur Erzeugung der inneren Szenarien ist dabei vom äußeren Szenario unabhängig. Es wird nicht für jedes äußere Szenario i ein risikoneutrales Maß \mathbb{Q}_i neu kalibriert sondern basierend auf den heutigen Marktdaten ein festes \mathbb{Q} für den gesamten Zeithorizont bestimmt. Die Erzeugung solcher Szenarien ist jedoch auf Grund der großen Anzahl an Risikofaktoren und der bereits erwähnten komplexen Struktur der Verträge numerisch sehr aufwändig. Für das Nested Monte-Carlo Verfahren müssen viele Szenarien generiert werden, was diese Methode numerisch ineffizient macht. Dies wird mitunter in der Arbeit von Bauer u. a. (2010) deutlich. Zur Bewertung einer amerikanischen Option mit einer Laufzeit von zehn Jahren, erzeugen sie Verlaufspfade der Markttrisikofaktoren mit einer Baumstruktur. Die Berechnung des Marktwerts der Option erfolgt dann durch Rückwärtsinduktion. Bei 5000 Trinomialbäumen, was einem Simulationsaufwand von insgesamt $5000 \times 3^{10} \approx 300$ Millionen Szenarien entspricht, erhalten sie für den Wert der Option relative Schätzfehler von über 2%. Die Berechnung der Schätzer dauert mehr als 11 Minuten. Bei einer Anwendung auf Verträge in der Lebensversicherung wäre dieser Nachteil noch schwerwiegender, da durch

die Komplexität und Dauer der Verträge die Erzeugung von 1000 Verlaufspfaden der Liability Cash-Flows bereits etwa 10 Minuten erfordert. Daher sind alternative Monte-Carlo Verfahren untersucht worden.

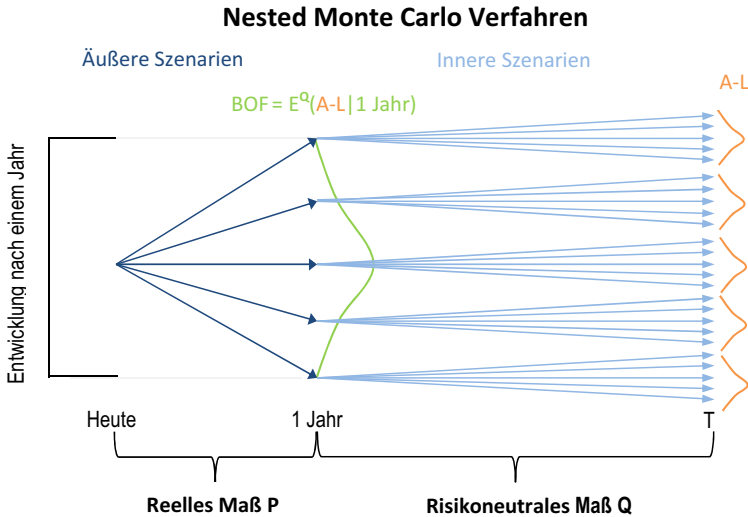


Abbildung 1.3: Für jedes generierte einjährige Anfangsszenario werden risikoneutrale Szenarien generiert und der marktkonsistente Wert approximativ durch Mittelung bestimmt. **L** steht für die kumulierten Auszahlungen des Unternehmens an die Versicherungsnehmer.

Bergmann (2011) erwähnt in ihrer Arbeit das stochastische Gitter Verfahren von Broadie u. Glasserman (2004). Für die Umsetzung dieses Verfahrens wird jedoch die Kenntnis der Übergangsdichten aller Risikofaktoren benötigt. Diese sind in der Praxis nicht bekannt. Der Versicherung stehen zur Berechnung oft nur sogenannte „ESG“ Dateien zur Verfügung. Diese Dateien enthalten lediglich simulierte Szenarien der Geldflüsse aus Verpflichtungen, nicht jedoch die Zustände der Risikofaktoren. Für eine Anwendung des Gitter Verfahrens wären deutlich reichhaltigere Informationen mit Einbezug von Übergangswahrscheinlichkeiten notwen-

dig. Versicherungen verwenden jedoch bis zu 300 Risikofaktoren, von denen viele stochastische Abhängigkeiten aufweisen. Für die Berechnung einer gemeinsamen Dichte würde bei dieser Dimension eine gewaltige Datenmenge erforderlich sein, die übliche Hardwarekapazitäten übersteigt. Nach bestem Wissen gibt es bisher keine Anwendung dieses Verfahrens in der Berechnung der BOF.

Eine Vielzahl von Autoren setzt dagegen das bekannte Least Square Monte-Carlo (LSMC) Verfahren ein, das von Longstaff u. Schwartz (2001) verwendet worden ist um amerikanische Optionen zu bewerten. Die Schwierigkeit bei der Bewertung amerikanischer Optionen besteht darin, einen bestimmten bedingten Erwartungswert in jedem Zeitpunkt und in jedem Szenario zu bestimmen. Das Nested Monte-Carlo Verfahren ist dafür unbrauchbar, da die Anzahl an benötigten Szenarien exponentiell mit der Anzahl der Zeitschritte wächst. Das LSMC Verfahren umgeht diesen numerischen Aufwand, indem ausschließlich unverzweigte Verlaufspfade erzeugt werden. Für jeden Zeitpunkt wird mit Hilfe einer Linearkombination geeignet gewählter Basisfunktionen versucht, den bedingten Erwartungswert in jedem Knoten möglichst genau zu approximieren. Die Approximation erfolgt dabei über die Methode der kleinsten Quadrate.

Ähnlich wie bei amerikanischen Optionen muss auch die Versicherung den Marktwert der Liability Cash-Flows in einem Jahr, also auch einen bedingten Erwartungswert, in jedem Szenario bestimmen. Analog erzeugt man hier für jedes einjährige reelle Anfangsszenario einen fortführenden Pfad unter dem risikoneutralen Maß (siehe Abb. 1.4). Zum LSMC Verfahren findet man eine große Auswahl an Literatur. Abgesehen von Longstaff u. Schwartz (2001) wird die Methode unter anderem von Tsitsiklis u. van Roy (2001), Glasserman u. Yu (2004), Stentoft (2004), Egloff u. a. (2007), Beutner u. a. (2013) und Zanger (2016) zur Bewertung von amerikanischen Optionen verwendet. In Andreatta u. Corradin (2003), Baione u. a. (2006), Bernard u. Lemieux (2008) und Bauer u. a. (2010) findet man Anwendungen des LSMC Verfahrens auf die Bewertung der Liability Cash-Flows. Im bereits erwähnten Simulationsbeispiel benötigen Bauer u. a. (2010) mit dem LSMC Verfahren für einen relativen Schätzfehler von weniger als 0,2% nur etwa 24 Sekunden. Verglichen mit dem Nested Monte-Carlo Verfahren ist das LSMC Verfahren damit klar überlegen.

Bei Versicherungen ist das Least Square Monte-Carlo Verfahren nicht beliebt. Stattdessen hat sich eine dritte Monte-Carlo Methode etabliert, welche das Thema meiner Dissertation ist - replizierende Portfolios.

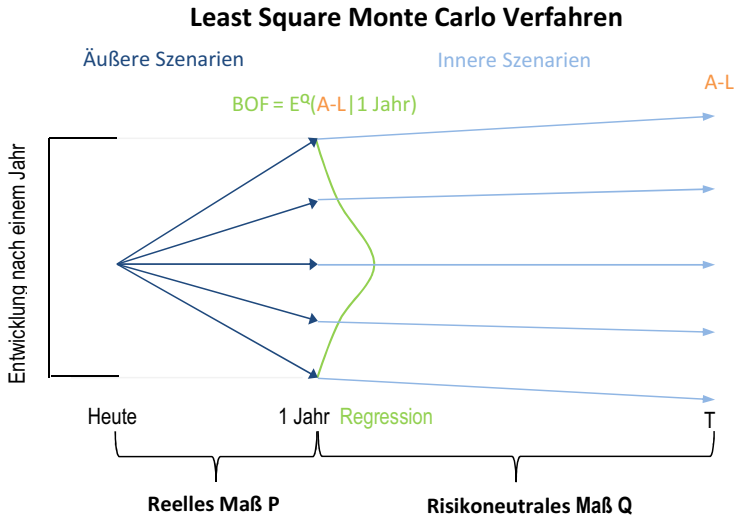


Abbildung 1.4: Für jedes generierte einjährige Anfangsszenario wird ein (oder nur wenige) risikoneutrales Szenario generiert. Der Marktwert der BOF in einem Jahr wird durch eine Linearkombination von in einem Jahr messbaren Basisfunktionen approximiert. Es wird also in den einjährigen Szenarien regressiert. Die Regression erfolgt durch die Methode der kleinsten Quadrate.

1.3 Lösung über replizierende Portfolios

Pelsser (2003) führte rückblickend vermutlich als Erster die Idee ein, das Profil der Liability Cash-Flows mit einem statischen Portfolio aus Finanzinstrumenten zu replizieren. Er betrachtet einen Lebensversicherungsvertrag mit Gewinnbeteiligung und Garantiezins und versucht dessen Cash-Flow Profil durch ein Portfolio

aus Vanilla Swaptions nachzubilden. Dadurch gelingt ihm eine bemerkenswert gute Annäherung an den Marktwert und die Cash-Flows des Vertrags.

Das Konzept das Auszahlungsprofil eines Wertpapiers mit Finanzinstrumenten dynamisch zu replizieren ist in der Finanzmathematik bekannt. In ihrem berühmten Paper führen Black u. Scholes (1973) einen vollständigen Markt ein und beweisen, dass jedes Auszahlungsprofil durch eine dynamische Delta-Hedging-Strategie perfekt nachgebildet werden kann. Dieses Ergebnis ist daraufhin ausgiebig in der Literatur zur Bewertung angewendet worden (siehe z.B. Cox u. Ross (1976) oder Leland (2001)). Das hat Pelsser (2003) motiviert, die Replikationstheorie in der Bewertung von Optionen mit Garantieverzinsung, wie sie typischerweise als Verträge in der Lebensversicherung angeboten werden, einzusetzen. Tatsächlich ist Pelssers Replikation zum Zweck des Bilanzstrukturmanagement gedacht mit dem Ziel das Zinsrisiko abzusichern. Er argumentiert, dass der Einsatz von dynamischen Delta-Hedging-Strategien für Optionen mit langer Laufzeit in der Praxis inadäquat sei. Zum Einen könnten diese Strategien sogenannte „Feedback-Loops“ hervorrufen. Mit der Zeit müssten Versicherungen zunehmend große Positionen im Portfolio umschichten um delta-neutral zu bleiben bis zu dem Grad, dass diese Umschichtungen den Preis der Anlagen beeinflussten. Diese Preisänderungen würden für die Delta-Neutralität wiederum eine Umschichtung erfordern, was der Anfang einer gefährlichen Spirale bedeute. Zum Anderen seien die Transaktionskosten einer Hedging Strategie über einen langen Zeithorizont sehr groß. Daher schlägt er vor statisch zu replizieren.

Diese Idee der Replikation wurde erst später durch Oechslin u. a. (2007) erstmalig im Risikomanagement der Lebensversicherung verwendet.

Die zu Grunde liegende Idee der Replikation zur Bewertung von Versicherungsverträgen ist einfach. Man versucht mit einer bestimmten Anzahl an ausgewählten leicht bewertbaren Finanzinstrumenten über ein Optimierungsproblem ein Portfolio zu erstellen, dessen Cash-Flow Profil dem der Liabilities möglichst nahe kommt. Da die Aktiva bereits aus einem Portfolio aus Finanzinstrumenten bestehen, reicht es lediglich die Cash-Flows der Liabilities nachzubilden. Ist die

Ähnlichkeit zwischen den Cash-Flow Profilen groß genug, sollte sich zu jedem Zeitpunkt und in jedem Szenario der Marktwert der Liability Cash-Flows mit dem Wert des Portfolios abschätzen lassen. Der Vorteil besteht darin, dass die Bewertung von Finanzinstrumenten mithilfe analytischer Formeln und effizienter numerischer Methoden vergleichsweise einfach ist. Es ist jedoch maßgeblich welche Kriterien angesetzt werden um zu entscheiden wann zwei Cash-Flow Profile ausreichende Ähnlichkeit besitzen. Dabei muss im Auge behalten werden, welches Ziel mit der Replikation angestrebt wird. In Kapitel 3 werde ich die tatsächliche Zielgröße des Versicherers klar definieren und zeigen, dass Replikation der Liability Cash-Flows tatsächlich geeignet ist um ihren Marktwert gut zu approximieren.

Das Verfahren der Replikation ist dem Least Square Monte-Carlo Verfahren ähnlich. Wieder werden über Monte-Carlo Simulation unverzweigte Verlaufspfade erzeugt und die Cash-Flow Profile verglichen. Allerdings wird nicht in den einjährigen Szenarien regressiert, sondern typischerweise die abdiskontierten Terminal Values zum Ende des Zeithorizonts¹ (siehe Abb. 1.5). Glasserman u. Yu (2004) untersuchen den Unterschied zwischen der Regression zu früheren (Regress-Now) und späteren Zeitpunkten (Regress-Later) im Rahmen der Bewertung amerikanischer Optionen. Üblicherweise wird die Regress-Now Variante als klassisches Least Square Monte-Carlo Verfahren betitelt, da es so von Longstaff u. Schwartz (2001) verwendet wurde. Es stellte sich heraus, dass Regression zum späteren Zeitpunkt mit höherem Bestimmtheitsmaß R^2 und kleineren Kovarianzen der resultierenden Schätzer einhergeht. Beutner u. a. (2013) zeigen, dass replizierende Portfolios der Regress-Later Variante in Glasserman u. Yu (2004) entsprechen.

Lange gab es keine theoretischen Resultate bezüglich replizierender Portfolios. Erst in den letzten Jahren haben Beutner u. a. (2015), Pelsser u. Schweizer (2016) und Beutner u. a. (2013) in einer Reihe von Publikationen einen großen Beitrag zur mathematischen Fundierung replizierender Portfolios geleistet. Sie analysieren detailliert den Unterschied zwischen dem Least Square Monte-Carlo Verfahren und replizierenden Portfolios und kommen zu dem Schluss, dass replizierende

¹ Beim Cash-Flow-Matching, das ich später einführen werde, wird mithilfe einer festgelegten Zielfunktion über alle Zeitpunkte regressiert an denen Cash-Flows stattfinden