

Meiner

Philosophische Bibliothek

Gottlob Frege

Die Grundlagen  
der Arithmetik





GOTTLOB FREGE

# Die Grundlagen der Arithmetik

Eine logisch mathematische Untersuchung  
über den Begriff der Zahl

Auf der Grundlage der Centenarausgabe  
herausgegeben von  
CHRISTIAN THIEL

FELIX MEINER VERLAG HAMBURG

PHILOSOPHISCHE BIBLIOTHEK BAND 366

Grundlage dieses Bandes ist die Centenarausgabe, Hamburg 1986, LXIII, 187 Seiten. Für die Studienausgabe wurden der Text Freges und die Anmerkungen übernommen.

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet abrufbar über <http://portal.dnb.de>.

ISBN: 978-3-7873-0719-7

ISBN eBook: 978-3-7873-3222-9

© Felix Meiner Verlag GmbH, Hamburg 1988.

Alle Rechte vorbehalten. Dies gilt auch für Vervielfältigungen, Übertragungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen, soweit es nicht §§ 53 und 54 UrhG ausdrücklich gestatten.

*[www.meiner.de](http://www.meiner.de)*

## INHALT

|                                                             |       |
|-------------------------------------------------------------|-------|
| Einleitung des Herausgebers . . . . .                       | XIII  |
| 1. Ziele der <i>Grundlagen der Arithmetik</i> . . . . .     | XIV   |
| 2. Hauptprobleme und Inhalt der <i>Grundlagen</i> . . . . . | XV    |
| 3. Zur Beurteilung der <i>Grundlagen</i> . . . . .          | XX    |
| Abkürzungen und Zitierhinweise . . . . .                    | XXIII |

### Gottlob Frege *Die Grundlagen der Arithmetik*

|                                                                                                                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Einleitung . . . . .                                                                                                                                                                                                  | 3  |
| § 1. In der Mathematik ist in neuerer Zeit ein auf die<br>Strenge der Beweise und scharfe Fassung der Begriffe<br>gerichtetes Bestreben erkennbar. . . . .                                                            | 13 |
| § 2. Die Prüfung muss sich schliesslich auch auf den Begriff<br>der Anzahl erstrecken. Zweck des Beweises. . . . .                                                                                                    | 13 |
| § 3. Philosophische Beweggründe für solche Untersuchung:<br>die Streitfragen, ob die Gesetze der Zahlen analytische<br>oder synthetische Wahrheiten, apriori oder aposteriori<br>sind. Sinn dieser Ausdrücke. . . . . | 14 |
| § 4. Die Aufgabe dieses Buches. . . . .                                                                                                                                                                               | 15 |
| I. Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur<br>der arithmetischen Sätze. . . . .                                                                                                                               | 16 |
| Sind die Zahlformeln beweisbar? . . . . .                                                                                                                                                                             | 16 |
| § 5. Kant verneint dies, was Hankel mit Recht paradox<br>nennt. . . . .                                                                                                                                               | 16 |
| § 6. Leibnizens Beweis von $2 + 2 = 4$ hat eine Lücke. Grass-<br>manns Definition von $a + b$ ist fehlerhaft. . . . .                                                                                                 | 17 |
| § 7. Mills Meinung, dass die Definitionen der einzelnen                                                                                                                                                               |    |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                  |    |
|-------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
|       | Zahlen beobachtete Thatsachen behaupten, aus denen die Rechnungen folgen, ist unbegründet. . . . .                                                                                                                                                                               | 19 |
| § 8.  | Zur Rechtmässigkeit dieser Definitionen ist die Beobachtung jener Thatsachen nicht erforderlich.   . . . . .                                                                                                                                                                     | 21 |
|       | Sind die Gesetze der Arithmetik inductive Wahrheiten? . . . . .                                                                                                                                                                                                                  | 22 |
| § 9.  | Mills Naturgesetz. Indem Mill arithmetische Wahrheiten Naturgesetze nennt, verwechselt er sie mit ihren Anwendungen. . . . .                                                                                                                                                     | 22 |
| § 10. | Gründe dagegen, dass die Additionsgesetze inductive Wahrheiten sind: Ungleichartigkeit der Zahlen; wir haben nicht schon durch die Definition eine Menge gemeinsamer Eigenschaften der Zahlen; die Induction ist wahrscheinlich umgekehrt auf die Arithmetik zu gründen. . . . . | 23 |
| § 11. | Leibnizens „Eingeboren“. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                 | 25 |
|       | Sind die Gesetze der Arithmetik synthetisch-apriori oder analytisch? . . . . .                                                                                                                                                                                                   | 26 |
| § 12. | Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Die innere Anschauung als Erkenntnisgrund. . . . .                                                                                                                                                                                             | 26 |
| § 13. | Unterschied von Arithmetik und Geometrie. . . . .                                                                                                                                                                                                                                | 28 |
| § 14. | Vergleichung der Wahrheiten in Bezug auf das von ihnen beherrschte Gebiet. . . . .                                                                                                                                                                                               | 28 |
| § 15. | Ansichten von Leibniz und St. Jevons. . . . .                                                                                                                                                                                                                                    | 29 |
| § 16. | Dagegen Mills Herabsetzung des „kunstfertigen Handhabens der Sprache.“ Die Zeichen sind nicht darum leer, weil sie nichts Wahrnehmbares bedeuten. . . . .                                                                                                                        | 29 |
| § 17. | Unzulänglichkeit der Induction. Vermuthung, dass die Zahlgesetze analytische Urtheile sind; worin dann ihr Nutzen besteht. Werthschätzung der analytischen Urtheile. . . . .                                                                                                     | 30 |
| II.   | Meinungen einiger Schriftsteller über den Begriff der Anzahl. . . . .                                                                                                                                                                                                            | 32 |
| § 18. | Nothwendigkeit den allgemeinen Begriff der Anzahl zu untersuchen. . . . .                                                                                                                                                                                                        | 32 |
| § 19. | Die Definition darf nicht geometrisch sein. . . . .                                                                                                                                                                                                                              | 32 |
| § 20. | Ist die Zahl definirbar? Hankel. Leibniz. . . . .                                                                                                                                                                                                                                | 33 |

|                                                                                                                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Ist die Anzahl eine Eigenschaft der äussern Dinge? . . . . .                                                                                                                                                                                    | 34 |
| § 21. Meinungen von M. Cantor und E. Schröder. . . . .                                                                                                                                                                                          | 34 |
| § 22. Dagegen Baumann: die äussern Dinge stellen keine strengen Einheiten dar. Die Anzahl hängt scheinbar von unserer Auffassung ab. . . . .                                                                                                    | 34 |
| § 23. Mills Meinung, dass die Zahl eine Eigenschaft des Aggregats von Dingen sei, ist unhaltbar.   . . . . .                                                                                                                                    | 36 |
| § 24. Umfassende Anwendbarkeit der Zahl. Mill. Locke. Leibnizens unkörperliche metaphysische Figur. Wenn die Zahl etwas Sinnliches wäre, könnte sie nicht Unsinnlichem beigelegt werden. . . . .                                                | 36 |
| § 25. Mills physikalischer Unterschied zwischen 2 und 3. Nach Berkeley ist die Zahl nicht realiter in den Dingen, sondern durch den Geist geschaffen. . . . .                                                                                   | 38 |
| Ist die Zahl etwas Subjectives? . . . . .                                                                                                                                                                                                       | 39 |
| § 26. Lipschitzs Beschreibung der Zahlbildung passt nicht recht und kann eine Begriffsbestimmung nicht ersetzen. Die Zahl ist kein Gegenstand der Psychologie, sondern etwas Objectives. . . . .                                                | 39 |
| § 27. Die Zahl ist nicht, wie Schloemilch will, Vorstellung der Stelle eines Objects in einer Reihe. . . . .                                                                                                                                    | 41 |
| Die Anzahl als Menge. . . . .                                                                                                                                                                                                                   | 43 |
| § 28. Thomaes Namengebung. . . . .                                                                                                                                                                                                              | 43 |
| III. Meinungen über Einheit und Eins. . . . .                                                                                                                                                                                                   | 44 |
| Drückt das Zahlwort „Ein“ eine Eigenschaft von Gegenständen aus? . . . . .                                                                                                                                                                      | 44 |
| § 29. Vieldeutigkeit der Ausdrücke „μονάς“ und „Einheit.“ E. Schröders Erklärung der Einheit als zu zählenden Gegenstandes ist scheinbar zwecklos. Das Adjectiv „Ein“ enthält keine nähere Bestimmung, kann nicht als Praedicat dienen. . . . . | 44 |
| § 30. Nach den Definitionsversuchen von Leibniz und Baumann scheint der Begriff der Einheit gänzlich zu verschwimmen. . . . .                                                                                                                   | 45 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                     |    |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 31. | Baumanns Merkmale der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit. Die Idee der Einheit wird uns nicht von jedem Objecte zugeführt (Locke). . . . .                                                                                                           | 45 |
| § 32. | Doch deutet die Sprache einen Zusammenhang mit der Ungetheiltheit und Abgegrenztheit an, wobei jedoch der Sinn verschoben wird. . . . .                                                                                                             | 46 |
| § 33. | Die Untheilbarkeit (G. Köpp) ist als Merkmal der Einheit nicht haltbar. . . . .                                                                                                                                                                     | 47 |
|       | Sind die Einheiten einander gleich? . . . . .                                                                                                                                                                                                       | 48 |
| § 34. | Die Gleichheit als Grund für den Namen „Einheit.“ E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Durch Abstraction von den Verschiedenheiten der Dinge erhält man nicht den Begriff der Anzahl, und die Dinge werden dadurch nicht einander gleich.   . . . . . | 48 |
| § 35. | Die Verschiedenheit ist sogar nothwendig, wenn von Mehrheit die Rede sein soll. Descartes. E. Schröder. St. Jevons. . . . .                                                                                                                         | 49 |
| § 36. | Die Ansicht von der Verschiedenheit der Einheiten stösst auch auf Schwierigkeiten. Verschiedene Einsen bei St. Jevons. . . . .                                                                                                                      | 50 |
| § 37. | Lockes, Leibnizens, Hesses Erklärungen der Zahl aus der Einheit oder Eins. . . . .                                                                                                                                                                  | 51 |
| § 38. | „Eins“ ist Eigennamen, „Einheit“ Begriffswort. Zahl kann nicht als Einheiten definirt werden. Unterschied von „und“ und + . . . . .                                                                                                                 | 51 |
| § 39. | Die Schwierigkeit, Gleichheit und Unterscheidbarkeit der Einheiten zu versöhnen, wird durch die Vieldeutigkeit von „Einheit“ verdeckt. . . . .                                                                                                      | 52 |
|       | Versuche, die Schwierigkeit zu überwinden. . . . .                                                                                                                                                                                                  | 53 |
| § 40. | Raum und Zeit als Mittel des Unterscheidens. Hobbes. Thomae. Dagegen: Leibniz, Baumann, St. Jevons. . .                                                                                                                                             | 53 |
| § 41. | Der Zweck wird nicht erreicht. . . . .                                                                                                                                                                                                              | 55 |
| § 42. | Die Stelle in einer Reihe als Mittel des Unterscheidens. Hankels Setzen. . . . .                                                                                                                                                                    | 55 |
| § 43. | Schröders Abbildung der Gegenstände durch das Zeichen 1. . . . .                                                                                                                                                                                    | 56 |
| § 44. | Jevons' Abstrahiren vom Charakter der Unterschiede mit Festhaltung ihres Vorhandenseins. Die 0 und die 1                                                                                                                                            |    |

|                                                                                                                                                           |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| sind Zahlen wie die andern. Die Schwierigkeit bleibt bestehen. . . . .                                                                                    | 57 |
| Lösung der Schwierigkeit. . . . .                                                                                                                         | 59 |
| § 45. Rückblick. . . . .                                                                                                                                  | 59 |
| § 46. Die Zahlangabe enthält eine Aussage von einem Begriffe. Einwand, dass bei unverändertem Begriffe die Zahl sich ändere. . . . .                      | 60 |
| § 47. Die Thatsächlichkeit der Zahlangabe erklärt sich aus der Objectivität des Begriffes. . . . .                                                        | 60 |
| § 48. Auflösung einiger Schwierigkeiten. . . . .                                                                                                          | 61 |
| § 49. Bestätigung bei Spinoza. . . . .                                                                                                                    | 62 |
| § 50. E. Schröders Ausführung. . . . .                                                                                                                    | 62 |
| § 51. Berichtigung derselben. . . . .                                                                                                                     | 63 |
| § 52. Bestätigung in einem deutschen Sprachgebrauche. . .                                                                                                 | 64 |
| § 53. Unterschied zwischen Merkmalen und Eigenschaften eines Begriffes. Existenz und Zahl. . . . .                                                        | 64 |
| § 54. Einheit kann man das Subject einer Zahlangabe nennen. Untheilbarkeit und Abgegrenztheit der Einheit. Gleichheit und Unterscheidbarkeit.   . . . . . | 65 |
| IV. Der Begriff der Anzahl. . . . .                                                                                                                       | 66 |
| Jede einzelne Zahl ist ein selbständiger Gegenstand. . .                                                                                                  | 66 |
| § 55. Versuch, die leibnizischen Definitionen der einzelnen Zahlen zu ergänzen. . . . .                                                                   | 66 |
| § 56. Die versuchten Definitionen sind unbrauchbar, weil sie eine Aussage erklären, von der die Zahl nur ein Theil ist. . . . .                           | 66 |
| § 57. Die Zahlangabe ist als eine Gleichung zwischen Zahlen anzusehen. . . . .                                                                            | 67 |
| § 58. Einwand der Unvorstellbarkeit der Zahl als eines selbständigen Gegenstandes. Die Zahl ist überhaupt unvorstellbar. . . . .                          | 68 |
| § 59. Ein Gegenstand ist nicht deshalb von der Untersuchung auszuschliessen, weil er unvorstellbar ist. . . .                                             | 69 |
| § 60. Selbst concrete Dinge sind nicht immer vorstellbar. Man muss die Wörter im Satze betrachten, wenn man nach ihrer Bedeutung fragt. . . . .           | 69 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                       |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 61. | Einwand der Unräumlichkeit der Zahlen. Nicht jeder objective Gegenstand ist räumlich. . . . .                                                                                                                                         | 70 |
|       | Um den Begriff der Anzahl zu gewinnen, muss man den Sinn einer Zahlengleichung feststellen. . . . .                                                                                                                                   | 71 |
| § 62. | Wir bedürfen eines Kennzeichens für die Zahlengleichheit. . . . .                                                                                                                                                                     | 71 |
| § 63. | Die Möglichkeit der eindeutigen Zuordnung als solches [Kennzeichen]. Logisches Bedenken, dass die Gleichheit für diesen Fall besonders erklärt wird. . . . .                                                                          | 71 |
| § 64. | Beispiele für ein ähnliches Verfahren: die Richtung, die Stellung einer Ebene, die Gestalt eines Dreiecks. . . . .                                                                                                                    | 72 |
| § 65. | Versuch einer Definition. Ein zweites Bedenken: ob den Gesetzen der Gleichheit genügt wird. . . . .                                                                                                                                   | 73 |
| § 66. | Drittes Bedenken: das Kennzeichen der Gleichheit ist unzureichend. . . . .                                                                                                                                                            | 74 |
| § 67. | Die Ergänzung kann nicht dadurch geschehen, dass man zum Merkmal eines Begriffes die Weise nimmt, wie ein Gegenstand eingeführt ist. . . . .                                                                                          | 75 |
| § 68. | Die Anzahl als Umfang eines Begriffes. . . . .                                                                                                                                                                                        | 76 |
| § 69. | Erläuterung. . . . .                                                                                                                                                                                                                  | 76 |
|       | Ergänzung und Bewährung unserer Definition. . . . .                                                                                                                                                                                   | 77 |
| § 70. | Der Beziehungsbegriff. . . . .                                                                                                                                                                                                        | 77 |
| § 71. | Die Zuordnung durch eine Beziehung. . . . .                                                                                                                                                                                           | 79 |
| § 72. | Die beiderseits eindeutige Beziehung. Begriff der Anzahl.   . . . . .                                                                                                                                                                 | 80 |
| § 73. | Die Anzahl, welche dem Begriffe F zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Begriffe G zukommt, wenn es eine Beziehung giebt, welche die unter F fallenden Gegenstände den unter G fallenden beiderseits eindeutig zuordnet. . . . . | 81 |
| § 74. | Null ist die Anzahl, welche dem Begriffe „sich selbst ungleich“ zukommt. . . . .                                                                                                                                                      | 82 |
| § 75. | Null ist die Anzahl, welche einem Begriffe zukommt, unter den nichts fällt. Kein Gegenstand fällt unter einen Begriff, wenn Null die diesem zukommende Anzahl ist. . . . .                                                            | 83 |
| § 76. | Erklärung des Ausdrucks „n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m.“ . . . . .                                                                                                                                         | 84 |

|       |                                                                                                                               |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| § 77. | 1 ist die Anzahl, welche dem Begriffe „gleich 0“ zukommt. . . . .                                                             | 84 |
| § 78. | Sätze, die mittels unserer Definitionen zu beweisen sind                                                                      | 85 |
| § 79. | Definition des Folgens in einer Reihe. . . . .                                                                                | 86 |
| § 80. | Bemerkungen hierzu. Objectivität des Folgens. . . . .                                                                         | 86 |
| § 81. | Erklärung des Ausdrucks „x gehört der mit y endenden $\varphi$ -Reihe an“. . . . .                                            | 87 |
| § 82. | Andeutung des Beweises, dass es kein letztes Glied der natürlichen Zahlenreihe giebt. . . . .                                 | 88 |
| § 83. | Definition der endlichen Anzahl. Keine endliche Anzahl folgt in der natürlichen Zahlenreihe auf sich selber. . . . .          | 88 |
|       | Unendliche Anzahlen. . . . .                                                                                                  | 89 |
| § 84. | Die Anzahl, welche dem Begriffe „endliche Anzahl“ zukommt, ist eine unendliche. . . . .                                       | 89 |
| § 85. | Die cantorschen unendlichen Anzahlen; „Mächtigkeit“. Abweichung in der Benennung. . . . .                                     | 90 |
| § 86. | Cantors Folgen in der Succession und mein Folgen in der Reihe. . . . .                                                        | 91 |
| V.    | Schluss. . . . .                                                                                                              | 91 |
| § 87. | Die Natur der arithmetischen Gesetze. . . . .                                                                                 | 91 |
| § 88. | Kants Unterschätzung der analytischen Urtheile. . . . .                                                                       | 92 |
| § 89. | Kants Satz: „Ohne Sinnlichkeit würde uns kein Gegenstand gegeben werden“. Kants Verdienst um die Mathematik. . . . .          | 93 |
| § 90. | Zum vollen Nachweis der analytischen Natur der arithmetischen Gesetze fehlt eine lückenlose Schlusskette. . . . .             | 94 |
| § 91. | Abhilfe dieses Mangels ist durch meine Begriffsschrift möglich. . . . .                                                       | 95 |
|       | Andere Zahlen. . . . .                                                                                                        | 96 |
| § 92. | Sinn der Frage nach der Möglichkeit der Zahlen nach Hankel. . . . .                                                           | 96 |
| § 93. | Die Zahlen sind weder räumlich ausser uns noch subjectiv.   . . . . .                                                         | 96 |
| § 94. | Die Widerspruchslosigkeit eines Begriffes verbürgt nicht, dass etwas unter ihn falle, und bedarf selbst des Beweises. . . . . | 97 |

|                                                                                                                                                                                 |         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| § 95. Man darf nicht ohne Weiteres ( $c - b$ ) als ein Zeichen ansehen, das die Subtraktionsaufgabe löst. . . . .                                                               | 97      |
| § 96. Auch der Mathematiker kann nicht willkürlich etwas schaffen. . . . .                                                                                                      | 98      |
| § 97. Begriffe sind von Gegenständen zu unterscheiden. . . .                                                                                                                    | 99      |
| § 98. Hankels Erklärung der Addition. . . . .                                                                                                                                   | 99      |
| § 99. Mangelhaftigkeit der formalen Theorie. . . . .                                                                                                                            | 100     |
| § 100. Versuch, complexe Zahlen dadurch nachzuweisen, dass die Bedeutung der Multiplication in besonderer Weise erweitert wird. . . . .                                         | 100     |
| § 101. Die Möglichkeit eines solchen Nachweises ist für die Kraft eines Beweises nicht gleichgiltig. . . . .                                                                    | 101     |
| § 102. Die blossе Forderung, es solle eine Operation ausführbar sein, ist nicht ihre Erfüllung. . . . .                                                                         | 101     |
| § 103. Kossaks Erklärung der complexen Zahlen ist nur eine Anweisung zur Definition und vermeidet nicht die Einmischung von Fremdartigem. Die geometrische Darstellung. . . . . | 102     |
| § 104. Es kommt darauf an, den Sinn eines Wiedererkennungsurtheils für die neuen Zahlen festzusetzen. . . . .                                                                   | 103     |
| § 105. Der Reiz der Arithmetik liegt in ihrem Vernunftcharakter. . . . .                                                                                                        | 104     |
| § 106–109. Rückblick   . . . . .                                                                                                                                                | 105–108 |
| <br>Anmerkungen des Herausgebers . . . . .                                                                                                                                      | <br>109 |
| Literaturverzeichnis . . . . .                                                                                                                                                  | 140     |
| a. Schriften Freges . . . . .                                                                                                                                                   | 140     |
| b. Andere zitierte Literatur . . . . .                                                                                                                                          | 141     |
| <br>Namenregister . . . . .                                                                                                                                                     | <br>143 |

## EINLEITUNG DES HERAUSGEBERS

„Meine Anstrengungen, über das ins Klare zu kommen, was man Zahl nennen will, haben zu einem Mißerfolge geführt“, notiert Frege am 23. März 1924 in sein Tagebuch. Dieser Mißerfolg, den Frege durch die Herleitung der Zermelo-Russellschen Antinomie (s. u.) in seinem ausgearbeiteten System bestätigt sah, mußte in fehlerhaften Annahmen des Fregeschen Systems seine Gründe haben. Der wohl aus Freges letztem Lebensjahr stammende, fragmentarisch gebliebene *Neue Versuch der Grundlegung der Arithmetik* befaßt sich mit solchen Gründen und enthält als vorausgeschicktes Fazit gleich zu Beginn zwei Selbstberichtigungen Freges:

„Ich habe die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und daß demgemäß in der Arithmetik alles rein logisch bewiesen werden müsse. Zweitens habe ich die Meinung aufgeben müssen, daß die Arithmetik auch der Anschauung keinen Beweisgrund zu entnehmen brauche“ (NSchrWB I, 298).

Ganz bewußt lehnt sich die Formulierung dieser Sätze an den Anfang der Einleitung zu den *Grundgesetzen der Arithmetik* an, wo Frege geschrieben hatte:

„In meinen *Grundlagen der Arithmetik* habe ich wahrscheinlich zu machen gesucht, dass die Arithmetik ein Zweig der Logik sei und weder der Erfahrung noch der Anschauung irgendeinen Beweisgrund zu entnehmen brauche“ (GGA I, 1).

Welche Revolution in Freges Denken die Zurücknahme seines logizistischen Programms, die Arithmetik allein mit Mitteln der Logik zu begründen, bedeutete, kann man erst verstehen, wenn man sich die Hintergründe, die Ziele und die Hauptschritte dieses Programms vor Augen führt. Geschieht dies anhand der *Grundlagen*, so wird zugleich deutlich, weshalb wir heute trotz der Unerreichbarkeit des Fregeschen Ziels auf dem von ihm gewählten Wege zu den klassischen Lehrstücken philosophischer Analyse gerade Freges *Grundlagen der Arithmetik* rechnen, deren für die Centenarausgabe (1986) kritisch durchgesehener und kommentierter Text hier in einer Studienausgabe zugänglich gemacht wird.

1. Ziele der *Grundlagen der Arithmetik*

Friedrich Ludwig Gottlob Frege (\* 8. 11. 1848 in Wismar, † 26. 7. 1925 in Bad Kleinen) studierte zunächst in Jena und dann in Göttingen, wo er 1873 aufgrund seiner Dissertation über ein geometrisches Thema promoviert wurde. Schon 1874 habilitierte er sich für Mathematik an der Universität Jena, deren Lehrkörper er von da an bis zu seinem Rücktritt vom Lehramt im Jahre 1918 angehörte. Seine drei Buchveröffentlichungen – die *Begriffsschrift* 1879, *Die Grundlagen der Arithmetik* 1884 und *Grundgesetze der Arithmetik* I 1893, II 1903 – markieren drei aufeinanderfolgende, jeweils das bis dahin Erreichte in der Darstellung verbessernde und inhaltlich weiterführende Schritte auf dem Weg des obengenannten logizistischen Programms. In der *Begriffsschrift* wollte Frege „versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind“ (BS IV), wobei er „zuerst den Begriff der Anordnung in einer Reihe auf die *logische* Folge zurückzuführen suchte, um von hier aus zum Zahlbegriff fortzuschreiten. Damit sich hierbei nicht unbemerkt etwas Anschauliches eindringen konnte, musste Alles auf die Lückenlosigkeit der Schlusskette ankommen“ (ibid.). Garantieren sollte diese Lückenlosigkeit, auf der Basis eines zweidimensionalen Notationssystems für die logischen Grundbegriffe und Verknüpfungen (z. B. „nicht“, „und“, „wenn ... ,dann ---“, „alle ... sind ---“, „manche ... sind ---“), ein von Frege ohne jedes historische Vorbild geschaffener Logikkalkül, die „technische“ Manifestation eines axiomatischen Aufbaus der heute so genannten klassischen Aussagen- oder Junktorenlogik sowie (stufenunabhängig) der klassischen Prädikaten- oder Quantorenlogik. Technisch weiter verbessert und um die „Logik“ der Begriffsumfänge oder Mengen erweitert liegt dieses begriffsschriftliche System auch Freges Hauptwerk, den *Grundgesetzen der Arithmetik* zugrunde. Frege übernimmt hier in begriffsschriftlicher Fassung die Definitionen der arithmetischen Grundbegriffe und -beziehungen, die er 1884 in *Die Grundlagen der Arithmetik* gegeben hatte – dort noch ohne symbolische Einkleidung und damit den esoterischen Charakter, der die anderen beiden Werke bis heute einem breiteren philosophischen Publikum unzugänglich erscheinen läßt.

Über die Ziele des Buches hat sich Frege deutlich ausgesprochen: Es sollte einen *mathematischen Beitrag* liefern, indem die zeitgenössischen Bemühungen um eine strengere Begründung der Mathematik durch genauere Analyse ihrer Begriffe und Zurückführung ihrer Sätze auf wenige überschaubare Axiome um eine Analyse der Begriffe und Sätze der Arithmetik erweitert wurde, bis zu denen das sog. „Arithmetisierungsprogramm“ der Analysis bereits zurückgegangen war. Es sollte aber auch einen *philosophischen Beitrag* leisten und die Frage „nach der apriorischen oder aposteriorischen, der synthetischen oder analytischen Natur der arithmetischen Wahrheiten“ (GLA 3) dadurch einer Beantwortung näherbringen, daß die Frage entschieden wird, ob der Anzahlbegriff durch einfachere Begriffe definiert werden könne oder nicht. „Das soll die Aufgabe dieses Buches sein“ (ibid.).

## 2. Hauptprobleme und Inhalt der *Grundlagen*

Frege gibt in den *Grundlagen der Arithmetik* eine Definition des Anzahlbegriffs, in deren Definiens allein Begriffe der Logik vorkommen (so wie Frege deren Bereich abgrenzt; nach heutiger Sichtweise und Terminologie definiert er die Anzahl durch Begriffe der elementaren Mengenlehre). Damit beantwortet er die Frage nach der Natur der arithmetischen Wahrheiten im Sinne ihres analytischen Charakters.

Für diese Antwort aber, die erst im letzten Drittel der *Grundlagen* erfolgt, müssen Vorbereitungen getroffen werden, und Frege rechnet zu diesen offenbar auch die umfassende, die erste Hälfte des Buches füllende Zusammenstellung und Kritik von „Meinungen von Philosophen und Mathematikern über die hier in Betracht kommenden Fragen“ (GLA IV). Von Philosophen und Mathematikern – denn schon in der *Einleitung* weist Frege die Untersuchung des Zahlbegriffs der Mathematik und der Philosophie als gemeinsame Aufgabe zu und vermutet, daß die zur Lösung nötige Zusammenarbeit beider Wissenschaften durch das „Ueberwiegen psychologischer Betrachtungsweisen in der Philosophie, die selbst in die Logik eindringen“ (GLA V), behindert werde. So erklärt sich auch der erste der drei „Grundsätze“, von denen Frege sagt, daß er sie bei den Untersuchungen in den *Grundlagen* konsequent festgehalten habe (GLA X):

1. „es ist das Psychologische von dem Logischen, das Subjective von dem Objectiven scharf zu trennen“.

Natürlich ist mit der Formulierung nicht gemeint, daß alles Objektive logisch und alles Subjektive psychologisch sein müßte, gemeint ist vielmehr, daß das Psychologische als etwas das rein Subjektive Betreffendes vom Logischen als einem etwas rein Objektives Betreffenden getrennt werden sollte (vgl. auch § 93);

2. „nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden“ –

eine nicht unumstrittene, da oft (z. B. in der gegenwärtigen analytischen Philosophie) überinterpretierte Stelle, die wichtig wird bei der Fregeschen Analyse des Sinnes der Zahlwörter in Sätzen, in denen eine Zahlangabe erfolgt (vgl. § 60);

3. „der Unterschied zwischen Begriff und Gegenstand ist im Auge zu behalten“ –

ein Unterschied, der ebenfalls für die Analyse der Zahlangabe von Wichtigkeit ist, weil eine Zahl für Frege „eben dadurch, dass sie nur einen Theil der Aussage [sc. des Prädikats, das bei einer Zahlangabe von einem Begriff ausgesagt wird, C.T.] bildet, als selbständiger Gegenstand“ erscheint (GLA 68, vgl. auch allgemeiner §§ 57 ff. und für eine weitere Anwendung des Grundsatzes § 97).

Nach den ersten vier Paragraphen, welche Motivation und Zielsetzung des Buches darlegen, erörtert Frege in Teil I „Meinungen einiger Schriftsteller über die Natur der arithmetischen Sätze“, wobei er sich sowohl von Kants Auffassung dieser Sätze als zwar apriori, aber synthetisch, als auch von J. S. Mills empiristischer Auffassung der arithmetischen Wahrheiten in detaillierter Kritik absetzt. In Teil II, „Meinungen einiger Schriftsteller über den Begriff der Anzahl“, wendet er sich zunächst gegen die (aufgrund der Verwendungsweise der Zahlwörter in der Sprache „in adjectivischer Form und in attributiver Verbindung“ (GLA 27) naheliegende Gleichstellung der Zahlwörter mit Eigenschaftswörtern wie „hart“, „schwer“ usw. Daß die Zahl nicht den einzelnen gezählten Dingen als ihre Eigenschaft zukommen könne, zeigt sich nach Frege daran, daß man doch „in einem ganz andern Sinne von 1 000 Blättern als von grünen Blättern des Baumes“ spreche – „die grüne Farbe legen wir jedem Blatte bei, nicht so die Zahl 1 000“ (GLA 28).

Nicht weniger fehlerhaft wäre es jedoch, die Zahl nun als etwas Subjektives anzusehen: