Ralf Korn · Bernd Luderer

Mathe, Märkte und Millionen

Plaudereien über Finanzmathematik zum Mitdenken und Mitrechnen

2. Auflage

Springer

Mathe, Märkte und Millionen

Ralf Korn · Bernd Luderer

Mathe, Märkte und Millionen

Plaudereien über Finanzmathematik zum Mitdenken und Mitrechnen

2., erweiterte Auflage

Springer

Ralf Korn
Fachbereich Mathematik
TU Kaiserslautern
Kaiserslautern, Deutschland

Bernd Luderer
Fakultät für Mathematik
TU Chemnitz
Chemnitz, Deutschland

ISBN 978-3-658-23716-5 ISBN 978-3-658-23717-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23717-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Den beiden kritischsten Lesern, unseren Ehefrauen,
in Dankbarkeit gewidmet

Vorwort

Mathematik – abstrakt, staubtrocken, realitätsfern, unverständlich und nichts für Sie? Falsch, ganz falsch! Das ist ein absolut unzutreffendes Klischee. Gerade die angewandte Mathematik hält viele überaus spannende und praxisrelevante Fragestellungen bereit. Dass sich die Beschäftigung mit ihnen lohnt, soll dieses Büchlein zeigen. In fünf Dutzend Geschichten sollen Sie, lieber Leser, in lockerer und dennoch mathematisch exakter Weise in die bunte Welt der Finanzmathematik und der Finanzmärkte entführt werden.

An Mathematikkenntnissen wird lediglich Schulwissen vorausgesetzt, nur in wenigen Erzählungen sind Grundkenntnisse der Differenzialrechnung von Vorteil. Mitdenken und Mitrechnen sind ausdrücklich erwünscht. Die Geschichten sind weitgehend unabhängig voneinander, denn das vorliegende Buch will kein Lehrbuch sein. Häufig benötigte Formeln, ein Glossar sowie einführende Literatur sind am Ende des Buches zusammengestellt, während speziellere Quellen in den einzelnen Erzählungen zu finden sind. Die zweite Auflage wurde um zahlreiche Geschichten zur Portfoliooptimierung und Versicherungsmathematik sowie um einen Theorieteil erweitert. Für diese Geschichten sind Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorteilhaft, wie sie im Anhang bereitgestellt werden.

Unser Dank gilt Dr. A. Börsch und G. Schallenkamp für sorgfältiges Lesen des Manuskripts, technische Hilfestellung und zahlreiche nützliche Hinweise. Dem Verlag Springer Spektrum sind wir dankbar für die Aufnahme des Werkes in das Verlagsprogramm.

Ralf Korn, Kaiserslautern
Bernd Luderer, Chemnitz — Oktober 2018

Inhaltsverzeichnis

Teil 1

Lotto spielen, Löwen fangen, Steuern zahlen – elementare Mathematik

1 »Wir schenken Ihnen die Mehrwertsteuer!« Wie groß ist der gewährte Rabatt wirklich?

Das Ehepaar Wagner sieht sich nach neuen Wohnzimmermöbeln um. Am Einrichtungshaus prangt ein riesiges Werbebanner:

> *Wir schenken Ihnen die Mehrwertsteuer auf Ihren Möbelkauf!*

»Das kommt uns gerade recht«, freut sich Frau Wagner, »da können wir 19 % sparen. Ausgezeichnet!«

»Da steckt bestimmt ein Trick dahinter.« Herr Wagner ist skeptisch. »Die ziehen bestimmt nicht einfach 19 % vom Verkaufspreis ab. Ich werde zu Hause einmal nachrechnen.«

Angenommen, ein Möbelstück kostet P Euro. Dann beträgt sein Preis abzüglich der Mehrwertsteuer von 19 % nur noch $P_1 = \frac{P}{1{,}19}$, denn schlägt man die Mehrwertsteuer auf diesen niedrigeren Betrag wieder drauf, ergibt sich gerade $P_1 + \frac{19}{100} \cdot P_1 = 1{,}19P_1 = P$. Will man nun den Rabatt r berechnen, der hinter der Werbeaktion steckt, hat man vom Ansatz $P_1 = P \cdot (1 - r)$ auszugehen, was auf die Beziehung $P(1 - r) = \frac{P}{1{,}19}$ und nach Kürzen mit P auf $1 - r = \frac{1}{1{,}19}$ bzw.

$$r = 1 - \frac{1}{1{,}19} = \frac{1{,}19 - 1}{1{,}19} = \frac{0{,}19}{1{,}19} = 0{,}1597 = 15{,}97\,\%$$

führt.

»Ich habe es doch gewusst«, triumphiert Herr Wagner, »ein Trick ist dabei, 19 % sind es nicht, es sind nur knapp 16 %.«

»Aber 16 % sind doch auch nicht schlecht«, beschwichtigt ihn seine Gattin.

»Ja, schon. Aber es sind keine 19 %, wie einem suggeriert wird«, grummelt Herr Wagner. Irgendwie ist er trotzdem unzufrieden.

R. Korn und B. Luderer, *Mathe, Märkte und Millionen*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23717-2_1

2 Jede Woche Millionen, aber nicht für mich. Sechs Richtige im Lotto

Wenn das Wörtchen »wenn« nicht wär',
wär' ich längst schon Millionär.

Deutsches Sprichwort

»Das glaube ich nicht! Seit wann interessierst du dich für die Lottozahlen?« Mein Freund Peter hat normalerweise großes Interesse am Börsengeschehen und vor allem an systematischen Gewinnen. Dass gerade er mir etwas von der Ziehung der Lottozahlen am letzten Samstag erzählte, war für mich so unwahrscheinlich wie, äh, ein Sechser im Lotto.

»Na ja, der Jackpot wurde geknackt. Und das auch noch mit den Zahlen 34, 35, 36, 40, 41, 42. Das gibt es doch gar nicht!«

»Also, dass der Jackpot geknackt wird, ist doch nichts Besonderes. Und außerdem ist jede x-beliebige Zahlenkombination für den Hauptgewinn gleich wahrscheinlich«, provozierte ich Peter ein wenig.

In der Tat ist z. B. die Kombination $1, 2, 3, 4, 5, 6$ genau so wahrscheinlich wie jede beliebige andere, fest vorgegebene Zahlenkombination. Beim Spiel »6 aus 49« ergeben sich für die erste Kugel 49 Möglichkeiten, gezogen zu werden. Da die gezogene Kugel nicht mehr zurückgelegt wird, ergeben sich für die zweite Kugel dann noch 48, für die dritte 47, die vierte 46, die fünfte 45 und die sechste schließlich noch 44 Möglichkeiten. Da sie frei kombiniert werden können, gibt es immerhin

$$49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44 = 10.068.347.520$$

Möglichkeiten, die wir bei der Ziehung der Lottozahlen beobachten können.

R. Korn und B. Luderer, *Mathe, Märkte und Millionen*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23717-2_2

»Moment mal, ich dachte immer, es seien nur etwa 14 Millionen Möglichkeiten«, warf Peter ein.

»Das stimmt, denn oben habe ich die beiden Fälle als unterschiedlich gezählt, ob z. B. zuerst die 34 und dann die 40 gezogen wurde oder umgekehrt. Da das für den Gewinn aber egal ist, muss man noch durch die Anzahl der Anordnungen der sechs Zahlen auf die sechs Plätze bei der Ziehung teilen. Wir haben also

$$\frac{10.068.347.520}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$$

mögliche Kombinationen der Zahlen 1 bis 49, die gezogen werden können.[1] Die Wahrscheinlichkeit, die richtigen Zahlen zu treffen, beträgt damit lediglich 0,000 0072 %. Das heißt dann aber auch, dass wir jedes Wochenende etwas extrem Unwahrscheinliches beobachten«, stellte ich fest.

Peter protestierte: »Ich meinte etwas anderes. Zweimal drei Zahlen nacheinander. Das kommt doch wirklich selten vor, oder?«

»Na ja, auf alle Fälle häufiger als jede Kombination für sich genommen. Aber ich weiß, was Du meinst. Die Wahrscheinlichkeit ist gering, da es unter den knapp 14 Millionen Möglichkeiten nur 990 Stück gibt, die diese Eigenschaft besitzen. Dabei habe ich auch die 44 Möglichkeiten mitgezählt, wo alle 6 Zahlen direkt nacheinander folgen.[2]

»Wusste ich doch, dass es selten ist!«, war Peter zufrieden.

»Ja, stimmt. Und es gibt noch drei interessante Dinge beim Lotto zu erwähnen. Zum einen gibt es tatsächlich fast jedes Wochenende

[1] Der Leser, der sich mit *Binomialkoeffizienten* auskennt, bemerkt, dass es sich hier gerade um den Ausdruck $\binom{n}{k}$, gesprochen „n über k“, mit $n = 49$ und $k = 6$ handelt.

[2] Man versuche einfach, die Möglichkeiten abzuzählen: So gibt es zu (1; 2; 3) noch 44 weitere solche möglichen Tripel, während es beispielsweise für die Kombination (23, 24, 25) nur noch die Möglichkeiten (26, 27, 28), (27, 28, 29), ...,(47, 48, 49) gibt, die wir noch nicht gezählt haben. Insgesamt kommt man so auf 44 + 43 + . . . + 2 + 1 = 990 mögliche Kombinationen unterschiedlicher Tripel.

mindestens einen Hauptgewinner, was daran liegt, dass halt so viele Personen mitspielen und deshalb auch fast alle 14 Millionen Möglichkeiten getippt werden. Als Zweites sollte ich sagen, dass Lotto für die Gesamtheit ein unfaires Spiel ist, da deutlich weniger ausgeschüttet wird, als eingezahlt wurde. Selbst wenn alle Teilnehmer gewinnen würden, würden die Einzelgewinnsummen entsprechend reduziert. Und drittens kann man zwar seine Gewinnwahrscheinlichkeit nicht erhöhen, wohl aber seine erwartete Gewinnsumme.«

»Hoppla, das klingt nach Strategie. Das will ich hören!« Peter war wieder hellwach!

© M. Schuppich/stock.adobe.com

»Viele Lottospieler kreuzen ihre Glückszahlen an. Meist ist das Geburtsdatum dabei. Das heißt aber auch, dass die Zahlen von 1 bis 31 besonders häufig getippt werden. Bei einer Ziehung mit relativ niedrigen Zahlen muss man daher seinen Gewinn mit vielen Mitspielern teilen. Dann gibt es für einen Sechser auch nicht mehrere Millionen, wenn der Gewinn überhaupt eine Million beträgt.«

3 Wo ist mein Geld nur geblieben? Verlustausgleich nach Kursrutsch

Nur weil eine Aktie bereits fiel, heißt das noch nicht, dass sie nicht noch weiter fallen kann.
Börsenweisheit

Herr Obermayr reibt sich verdutzt die Augen: »Jesses Maria!« Da war er dem Rat des Börsengurus Kostolany »Aktien kaufen, liegen lassen, ruhig schlafen« gefolgt, hatte sich Solaraktien gekauft, anschließend eine Weltreise unternommen und sich nicht mehr um die Aktienkurse gekümmert. Und nun das – gerade einmal 12 % des ursprünglichen Kaufpreises sind seine Aktien noch wert. Schöne Bescherung! 200 Euro pro Stück hatte er bezahlt, nun liegt der Kurs nur noch bei 24 Euro.

Er hatte noch die Worte seines Spezis Niedermayr im Ohr: »Die Börsen atmen. Also keine Sorge, wenn eine Aktie einmal um 3 % fällt. Irgendwann steigt sie wieder um 3 % und alles gleicht sich aus.« Der hatte gut reden, von wegen 3 %. Die Solaraktien waren um 88 % gefallen! Wer weiß, ob sie jemals wieder um 88 % steigen? Augenblick mal ...

Was passiert denn überhaupt, wenn sie um 88 % steigen? Herr Obermayr rechnet und rechnet: Irgendetwas kann nicht stimmen. Hat ihm sein Freund die Unwahrheit gesagt? Wenn der Kurs von 24 Euro um 88 % ansteigt, so liegt der neue Kurs ja gerade einmal bei

$$24 \cdot \left(1 + \frac{88}{100}\right) = 24 \cdot 1{,}88 = 45{,}12 \quad [\text{Euro}].$$

Das ist ja meilenweit von 200 Euro entfernt! So ist das, wenn man auf den Rat der Freunde oder »Experten« hört.

Herr Obermayr seufzt und macht sich ans Rechnen. Angenommen, der Kaufpreis beträgt P und der Kurs fällt um S Prozent. Setzt man

R. Korn und B. Luderer, *Mathe, Märkte und Millionen*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23717-2_3

$s = \frac{S}{100}$, so liegt der neue Kurs bei $P_1 = (1 - s)P$. Nun ist der prozentuale Wachstumsfaktor G gesucht, um den der Kurs wieder ansteigen muss. Mit der Bezeichnung $g = \frac{G}{100}$ führt das auf den Ansatz

$$P_2 = (1 + g)P_1 = (1 + g)(1 - s)P \stackrel{!}{=} P.$$

Nach Division durch P und kurzer Umformung erhält man

$$g = \frac{s}{1 - s} \quad \text{bzw.} \quad G = \frac{100S}{100 - S}\,.$$

Damit ergeben sich beispielsweise die folgenden Werte:

S	5	10	20	50
G	5,26	11,11	25	100

»Um wie viel Prozent muss denn nun der Kurs meiner Aktien, die um 88 % gefallen sind, steigen?«, überlegt Herr Obermayr, und erhält nach kurzer Rechnung ... 733,33 %. Oh je! Ob das wirklich irgendwann passiert?[3]

Obwohl nun seine konkrete Frage beantwortet ist, grübelt Herr Obermayr weiter. »Der Niedermayr, der ist doch kein Dummer. Hat er eventuell doch recht damit, dass sich ein Kursverlust und Anstieg um denselben Prozentsatz ausgleichen, aber nur, wenn die Schwankung gering ist?«

Er probiert: Der Kurs sei 100 und soll um 1 % sinken. Dann beträgt er 99. Steigt er nun wieder um 1 %, so liegt er bei 99,99, was so gut wie 100 ist. Sinkt er um 3 % und steigt dann wieder, so rutscht er zunächst auf 97 und wächst anschließend auf 99,91. »Ja, der Niedermayr scheint recht zu haben. Der is scho a ganz a G'scheiter.«

[3] Selbst wenn der Aktienkurs wieder auf den ursprünglichen Stand ansteigt, erleidet Herr Obermayr einen Verlust durch entgangene Zinsen aus einer risikolosen Festzinsanlage, die er alternativ hätte tätigen können.

Der Grund liegt darin, dass für kleine x-Werte die Beziehung

$$(*) \qquad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x$$

gilt.[4] Damit lässt sich – zumindest für Werte von s nahe null – der Quotient $\frac{1}{1+s}$ durch die Differenz $1 - s$ ersetzen. Daher kann man die Division, die praktisch nur schriftlich oder mit Taschenrechner durchführbar ist, durch die Subtraktion ersetzen. Es lebe das Kopfrechnen!

Zurück zum Kursrutsch. Wenn also der Aktienkurs von P auf $\frac{P}{1+s}$ sinkt, so ist das ungefähr gleich $P(1-s)$. Steigt dieser Wert dann wieder um S Prozent, gilt

$$P_{\text{neu}} = P(1-s)(1+s) = P(1-s^2) \approx P,$$

da s^2 eine sehr kleine Zahl ist.

Übrigens nutzten die Kaufleute im Mittelalter beim sog. *kaufmännischen Diskontieren* genau die Beziehung $(*)$ aus, indem sie die Zinsen vom Endwert abzogen, anstatt zu dividieren (vgl. Grundformel (2)):

$$K_0 = K_t \cdot (1 - it) \approx \frac{K_t}{1+it}\,.$$

Wurde beispielsweise eine Rückzahlung von 1 000 Talern in einem halben Jahr bei 4 % jährlichen Zinsen vereinbart, so betrug die bar auszuzahlende Summe $B = 1\,000 \cdot (1 - 0{,}04 \cdot \frac{1}{2}) = 980$ Taler.[5]

[4] Diese ergibt sich aus der *Taylorentwicklung* der Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x}$ in einer Umgebung des Punktes $x_0 = 0$ bzw. – äquivalent – aus der Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(0, f(0))$. Beide lauten: $l(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) = 1 - x$.

[5] Bei linearer Abzinsung hätten $\frac{1\,000}{1{,}02} = 980{,}39$ Taler ausgezahlt werden müssen.

4 Wie fängt man einen Löwen? Intervallhalbierung zur Nullstellenbestimmung

> *Die Wüste wird in Nord-Süd-Richtung durch einen Zaun halbiert. Dann sitzt der Löwe entweder in der westlichen oder östlichen Hälfte der Wüste. Angenommen, er befindet sich in der westlichen Hälfte. Nun wird der westliche Teil durch einen Zaun in Ost-West-Richtung halbiert. Dann ist der Löwe entweder im nördlichen oder im südlichen Teil. Fährt man auf diese Weise fort, so streben die Seitenlängen der bei diesem Halbierungsprozess entstehenden Teile gegen null. Auf diese Weise wird der Löwe schließlich von einem Zaun beliebig kleiner Länge eingegrenzt.*
>
> *Bolzano-Weierstraß-Methode[6] zum Fangen eines Löwen*
> *Mathematikerwitz*

Nanu, wird sich der Leser fragen. Was hat denn ein Löwe mit Mathematik zu tun?[7]

Nehmen wir den Löwen als Synonym für die Nullstelle einer stetigen Funktion, beispielsweise eines Polynoms höheren Grades[8], das sehr oft bei der Renditeberechnung in der Finanzmathematik vorkommt, kommen wir der Sache schon viel näher. Es verhält sich nämlich so: Entgegen dem weit verbreiteten Eindruck, mit einfachen Umformungen oder Formeln könne man alles lösen, ist dem bei Weitem nicht so. Oftmals muss man zu *numerischen Methoden*, sprich »schlauem Probieren«, greifen.

In vielen Situationen benötigt man die Nullstellen einer stetigen Funktion f, also solche Werte x, für die $f(x) = 0$ gilt. Das sind genau die Punkte, wo der Graph der Funktion f die x-Achse schneidet. Wie

[6] Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781–1848), böhmisch-österreichischer katholischer Priester, Philosoph und Mathematiker; Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897), deutscher Mathematiker.

[7] Übrigens findet man auf der Website www.uwenowak.de/humor/loewe.xhtml zahlreiche weitere spannende »Löwenfangmethoden«.

[8] Der Leser kann sich $f(x) = x^{11} - 25x^{10} + 3x^2 - 7x + 5$ als Beispiel vorstellen.

R. Korn und B. Luderer, *Mathe, Märkte und Millionen*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23717-2_4

bereits erwähnt, ist die Funktion f in der Finanzmathematik in der Regel ein Polynom.

Beginnen wir mit den Polynomen 1. Grades, den linearen Funktionen

$$y = f(x) = a_0 + a_1 x,$$

die in der grafischen Darstellung Geraden darstellen. Zur Berechnung der (für $a_1 \neq 0$ einzigen) Nullstelle hat man $a_0 + a_1 x = 0$ zu setzen und nach x aufzulösen, was für $a_1 \neq 0$ möglich und auch ganz einfach ist: $x = -\frac{a_0}{a_1}$.

Auch für die quadratische Funktion $y = f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit $a_2 \neq 0$ lassen sich für die Gleichung $f(x) = 0$ bzw. (nach kurzer Umformung) für die Beziehung[9]

$$x^2 + px + q = 0$$

mithilfe der aus der Schule gut bekannten Lösungsformel die maximal zwei reellen Nullstellen bestimmen:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Ist der Radikand $D = \frac{p^2}{4} - q$ gleich null, gibt es nur eine Nullstelle, für $D < 0$ keine.

Auch für Polynome 3. und 4. Grades gibt es Lösungsformeln, die aber derart kompliziert sind, dass sie praktisch von niemandem tatsächlich angewendet werden. Für Polynomfunktionen fünften und höheren Grades existieren prinzipiell keine Lösungsformeln, wie der Norweger Niels Henrik Abel Anfang des 19. Jahrhunderts zeigte. Man ist daher auf numerische Verfahren wie zum Beispiel die Intervallhalbierungsmethode angewiesen.

[9] Hierbei gilt $p = \frac{a_1}{a_2}$ und $q = \frac{a_0}{a_2}$.

Nun nähern wir uns auch wieder unserem Löwen, aber ganz vorsichtig, er könnte angreifen. Wir begeben uns auf die Pirsch, um den Löwen (sprich, die Nullstelle) einzukreisen. Dabei haben wir es einfacher als oben beschrieben, denn unsere Suche verläuft jetzt nur entlang einer Geraden, ist daher nur eindimensional. Zunächst stellen wir eine Wertetabelle auf: Für ausgewählte x-Werte werden die zugehörigen y-Werte berechnet. Mitunter hat man eine Vermutung, wo der Löwe, pardon, die Nullstelle, liegen könnte. In der Finanzmathematik beispielsweise weiß man, dass der sog. Aufzinsungsfaktor $q = 1 + i$ mit dem Zinssatz i knapp über 1 liegt, mithin zwischen 1 und 2, denn Zinssätze haben im Normalfall eine Größenordnung von 1, 2, 5 oder 8 %, betragen also 0,01 oder vielleicht 0,08.

Nehmen wir nun an, unsere Suche war erfolgreich, und wir haben einen Wert x_L gefunden, für den $f(x_L) < 0$ gilt, sowie einen weiteren Wert x_R mit $f(x_R) > 0$. Da Polynome keine Sprünge aufweisen, muss also der Graph der Funktion f zwischen x_L und x_R mindestens einmal die x-Achse schneiden.[10] Wir haben den Löwen umstellt. Er sitzt in der Falle!

Nun wollen wir ihn in die Enge treiben. Zu diesem Zweck berechnen wir den Funktionswert im Mittelpunkt x_M des Intervalls $[x_L, x_R]$:

$$x_M = \frac{1}{2}(x_L + x_R).$$

Ist $f(x_M) = 0$, so haben wir den Löwen gefangen: x_M ist eine Nullstelle. Gilt aber $f(x_M) > 0$, so lauert der Löwe im nunmehr halb so großen Intervall $[x_L, x_M]$, für $f(x_M) < 0$ hingegen in $[x_M, x_R]$. In beiden Fällen wissen wir genau, in welcher Intervallhälfte der Löwe sitzt. Bei Wiederholung dieses Prozesses wird in jedem Schritt die Länge des Intervalls, in dem sich die Nullstelle befindet, halbiert. Damit wird der Löwe immer mehr eingekreist. Je länger man rechnet, umso genauer lässt sich die Nullstelle bestimmen und folglich jede gewünschte Genauigkeit erreichen.

[10] Dies gilt nicht nur für Polynome, sondern für beliebige stetige Funktionen.

Die beschriebene »Jagdmethode« soll nun am Beispiel der Funktion

$$f(i) = 96 - \frac{1}{(1+i)^8} \cdot \left[4 \cdot \frac{(1+i)^8 - 1}{i} + 100\right]$$

demonstriert werden, deren Nullstelle i wir suchen. Diese Funktion entsteht nach kurzer Umformung aus der Kursformel

$$96 = \frac{1}{(1+i)^8} \cdot \left[4 \cdot \frac{(1+i)^8 - 1}{i} + 100\right]$$

einer Anleihe (vgl. Grundformel (14)), die eine Laufzeit von $n = 8$ Jahren, einen Kupon von $4\,\%$ und einen (Unter-pari-)Kurs von 96 aufweist. Damit weiß der Finanzmarktexperte sofort, dass die Rendite der Anleihe höher als $4\,\%$ sein muss. Vielleicht $5\,\%$?

Wir setzen $x_L = 0{,}04$ und $x_R = 0{,}06$. Dann ergibt sich

$$f(x_L) = -4{,}000 < 0 \qquad \text{und} \qquad f(x_R) = 8{,}4196 > 0$$

und der Löwe wurde bereits lokalisiert: Er sitzt zwischen 0,04 und 0,06. Im Mittelpunkt $x_M = 0{,}05$ gilt $f(x_M) = 2{,}4632 > 0$. Also liegt die Nullstelle im linken Teilintervall $[0{,}04; 0{,}05]$. Der neue Mittelpunkt ist $x_M = 0{,}045$ und besitzt einen Funktionswert von $f(x_M) = -0{,}7021$, sodass die Nullstelle rechts davon liegt. Im nächsten Schritt erhalten wir den Mittelpunkt $x_M = \frac{1}{2} \cdot (0{,}045 + 0{,}05) = 0{,}0475$.

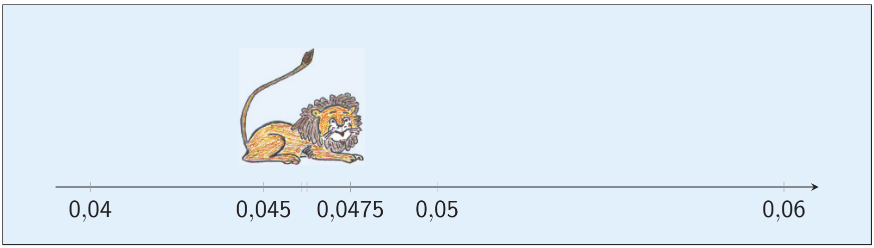

Abb. 1: Der »Löwe« ist gefangen

Dazu gehört der Funktionswert $f(x_M) = 0{,}8678$. Nach der Berechnung des Funktionswertes im neuen Mittelpunkt

$$x_M = \frac{1}{2} \cdot (0{,}045 + 0{,}0475) = 0{,}046\,25,$$

der 0,1015 beträgt und schon nahezu null ist, stoppen wir den Prozess: Die Nullstelle liegt bei ungefähr 4,6 %. Benötigt man eine höhere Genauigkeit, muss man noch ein paar Schritte weiterrechnen.[11]

Der Leser kann sich im »Löwenfangen« üben, indem er für Kevin den beim Autokauf zu erzielenden Rabatt berechnet, wenn dieser sein Geld zu 5 % angelegt hat (s. S. 65). Das Ergebnis kann anschließend mit dem dort angegebenen exakten Resultat verglichen werden.

Abschließend soll bemerkt werden, dass die Intervallhalbierung nur eines von zahlreichen numerischen Verfahren zur Nullstellenbestimmung ist. Es gibt durchaus »schlauere«, die in der Regel auch schneller sind. Erwähnt seien beispielsweise das *Sekantenverfahren* bzw. die mehrfache lineare Interpolation. Die genannten Methoden gehören zu den *ableitungsfreien* Verfahren. Andere Methoden hingegen nutzen die erste oder auch höhere Ableitungen, beispielsweise das *Tangentenverfahren* (auch *Newton-Verfahren* genannt) oder auch das *Quasi-Newton-Verfahren. Konvergenzuntersuchungen* werden benötigt, um Aussagen über das Funktionieren all dieser Verfahren treffen zu können, während die *Konvergenzgeschwindigkeit* etwas darüber aussagt, wie schnell eine Nullstelle gefunden wird. In Schwarz/Köckler kann man Näheres dazu finden.

Literatur:

Schwarz H. R., Köckler N.: Numerische Mathematik. 8. Aufl., Vieweg + Teubner, Wiesbaden 2011

Zeidler E. (Hrsg.): Springer-Taschenbuch der Mathematik. 3. Aufl., Springer Spektrum, Wiesbaden 2013

[11] Wer es genau wissen will: Bei einer Rechnung mit zwei Nachkommastellen lautet die Nullstelle 0,0461 = 4,61 %.

5 »Bäumchen, wechsel dich!« Wie viele Nullstellen besitzt ein Polynom?

Die Anzahl positiver Nullstellen eines Polynoms und die Finanzmathematik – was haben sie miteinander zu tun? Sehr viel!

Gerade bei der Lösung des wahrscheinlich wichtigsten Problems der Finanzmathematik, der Ermittlung des Effektivzinssatzes bzw. der Rendite[12], trifft man immer wieder auf diese Situation:

Ein Polynom höheren Grades

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

ist zu untersuchen, und dessen Nullstellen sind zu bestimmen. Nullstellen sind solche Werte x_0, für die $f(x_0) = 0$ gilt; dies sind die Schnittpunkte mit der x-Achse. Dabei sind die Größen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ gegebene reelle Zahlen.

Als Beispiel kann man sich

$$(*) \qquad p(x) = x^9 - 33x^8 + 7x^6 + 15x^2 + 4x + 6$$

vorstellen.

In der Finanzmathematik steht anstelle der Variablen x meist die Größe q, der sog. *Aufzinsungsfaktor*, wobei $q = 1 + i$ gilt und i der (gesuchte) Effektivzinssatz ist. Da nun i in der Regel eine kleine Zahl ist, wie z. B. $i = 6\,\% = 0{,}06$ oder auch $i = -10\,\% = -0{,}10$ (ja, auch negative Wertentwicklungen kann es geben; man denke nur an Geldanlagen am Aktienmarkt oder in Aktien-Investmentfonds oder auch Zeiten der Deflation, in denen Anleihen zu negativen Zinssätzen

[12] Im Grunde genommen Synonyme, die nur in unterschiedlichem Kontext unterschiedlich verwendet werden.

R. Korn und B. Luderer, *Mathe, Märkte und Millionen*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23717-2_5

ausgereicht werden[13]), sind nur positive Werte von q als potenzielle Nullstellen sinnvoll.

Von der Schule her kennt der Leser vielleicht den *Fundamentalsatz der klassischen Algebra*, entsprechend dem jedes Polynom n-ten Grades höchstens n reelle Nullstellen besitzt (im Bereich der komplexen Zahlen genau n Nullstellen, berücksichtigt man deren Vielfachheit).[14]

Schön und gut: Aber was nützt die Aussage, dass die obige Polynomfunktion p höchstens neun und damit auch maximal neun positive Nullstellen besitzt? Und welche davon entspricht dann der Rendite? Kann es gar mehrere Renditen geben?

Hier hilft uns ein weniger bekanntes Resultat von Descartes[15], die *Descartes'sche Vorzeichenregel*: Man zähle die Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten des Polynoms, d. h. die Übergänge von $+$ zu $-$ oder von $-$ zu $+$. Koeffizienten, die null sind, werden weggelassen und die Anzahl der Wechsel wird mit w bezeichnet. Dann besitzt das Polynom w oder $w-2$ oder $w-4$ ... positive Nullstellen.

Betrachten wir beispielhaft die Polynomfunktion p aus der Beziehung $(*)$, so ergibt sich diese Vorzeichenfolge der Koeffizienten:

$$+ \quad - \quad + \quad + \quad + \quad +$$

Diese weist zwei Wechsel auf, sodass $w = 2$ gilt. Folglich besitzt p zwei oder keine positive Nullstelle(n). Diese Aussage ist zwar schon besser als die obige, die maximal neun positive Nullstellen garantierte, aber dennoch nicht perfekt. Im vorliegenden Fall hilft uns jedoch ein glücklicher Umstand weiter: Durch »scharfes Hinschauen« – ja, wenn es

[13] Im Januar 2013 wurden kurzlaufende Bundeswertpapiere versteigert, die für die Investoren eine negative Rendite von ca. 0,01 % erbrachten. Mit anderen Worten: Für 10 000 investierte Euro erhält der Investor nach einem Jahr lediglich 9 999 Euro zurück.

[14] Dieser berühmte Satz ist in der 1799 publizierten Dissertation von Carl Friedrich Gauß (1777–1855) enthalten.

[15] René Descartes, latinisiert Renatus Cartesius (1596–1650); französischer Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler.

funktioniert, kann das durchaus eine mathematische Lösungsmethode sein – erkennt man, dass $x = 1$ eine Nullstelle ist. Damit scheidet der Fall aus, dass es keine positive Nullstelle gibt. Fazit: Es gibt zwei positive Nullstellen.

Die Vorzeichenregel von Descartes ist in einer Reihe von Situationen nützlich, in denen man garantieren kann, das es nur eine Nullstelle und damit nur eine *Rendite* bzw. einen *internen Zinsfuß* gibt.

Situation 1 (Normalinvestition):

Der Standardfall einer Sachinvestition sieht so aus, dass einer (großen) Anfangsausgabe A_0 mehrere (kleinere oder größere) Netto-Einnahmen E_k, $k = 1, \ldots, n$ gegenüberstehen, was sich durch diesen Zahlungsstrom darstellen lässt:

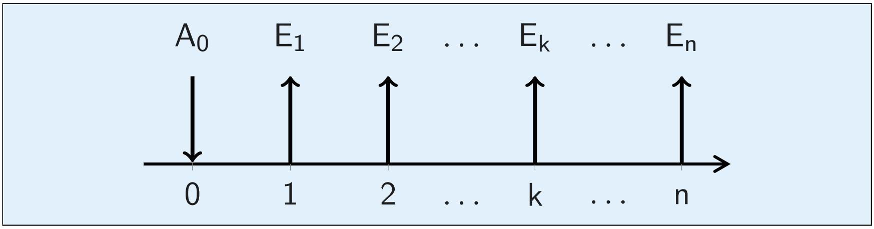

Abb. 2: Zahlungsstrom einer Normalinvestition

Dabei stellt E_k die Differenz aus den tatsächlichen Einnahmen und Ausgaben in der k-ten Periode dar, wobei der Einfachheit halber alle Zahlungen jeweils auf das Periodenende gelegt oder aufgezinst werden und positiv sein sollen.

Will man den *internen Zinsfuß* i ermitteln, hat man vom Barwertvergleich

$$A_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{E_k}{q^k} \quad \text{mit} \quad q = 1 + i$$

bzw. – nach Multiplikation mit dem Hauptnenner $(1 + i)^n$ – von der

Polynomgleichung

$$A_0 q^n - E_1 q^{n-1} - E_2 q^{n-2} - \ldots - E_{n-1} q - E_n = 0$$

auszugehen. Das Polynom auf der linken Seite weist nur einen Vorzeichenwechsel auf, weshalb es genau eine positive Nullstelle besitzt.

Situation 2 (Anleihe, Plain-Vanilla Bond):

Dem zu Beginn zu zahlenden Preis P stehen die jährlichen Zinszahlungen Z sowie die Schlussrückzahlung in Höhe des Nominalwertes N gegenüber:

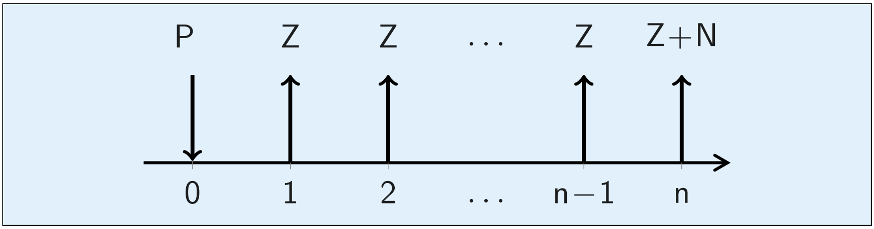

Abb. 3: Zahlungsstrom einer Standard-Anleihe

Für die Berechnung der *Rendite* i (bzw. der Größe $q = 1 + i$) der betrachteten Standard-Anleihe hat man für die gegebenen Größen P, N, Z und n von der Beziehung

$$P = \frac{Z}{q} + \frac{Z}{q^2} + \ldots + \frac{Z}{q^{n-1}} + \frac{Z+N}{q^n}$$

auszugehen (vgl. Grundformel (6)). Nach Multiplikation mit q^n ergibt sich wiederum eine Polynomgleichung n-ten Grades, die lediglich einen Vorzeichenwechsel und damit eine positive Lösung aufweist.

Literatur:

Zeidler E. (Hrsg.): Springer-Taschenbuch der Mathematik. 3. Aufl., Springer Spektrum, Wiesbaden 2013

6 Das macht nach Adam Ries ... Von Fusti, Fracht und Fuhrlohn

Zeitgenössisches Porträt von Adam Ries.
Holzschnitt auf dem Titelblatt seines dritten Rechenbuches (1550).
Mit freundlicher Genehmigung des Adam-Ries-Bundes Annaberg-Buchholz.

Das vereinigte Europa und insbesondere die Eurozone, in der keinerlei Währungsumrechnung mehr erforderlich ist, weiß man sehr zu schätzen, wenn einem Aufgaben des großen Rechenmeisters und Mathematikers Adam Ries[16] in die Hände kommen.

Der Reiz der historischen Aufgaben von Adam Ries liegt zum einen in der dem Mittelalter eigentümlichen Sprache, vor allem in der noch wenig oder gar nicht reglementierten Rechtschreibung. Zum anderen bestechen die Aufgaben durch ihre Anschaulichkeit und Praxisrelevanz, sind sie doch unmittelbar den verschiedensten Bereichen des gesellschaftlichen Lebens entnommen. Weiterhin erstaunt es den heutigen Leser und nötigt ihm den größten Respekt ab, welch komplizierte Rechnungen durch die mittelalterlichen Rechenmeister zu bewältigen und von ihren Schülern zu lösen waren.

[16] 1492 im oberfränkischen Staffelstein geboren und 1559 in Annaberg im Erzgebirge gestorben; er vollbrachte Zeit seines Lebens außerordentliche Anstrengungen zur Popularisierung des Rechnens. Im süddeutschen Sprachraum verwendet man meist den Namen Riese, es muss jedoch Ries heißen.

R. Korn und B. Luderer, *Mathe, Märkte und Millionen*,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-23717-2_6

Gleichzeitig wird aus den Problemstellungen heraus klar, warum derart schwierige Rechnungen erforderlich waren, denn im täglichen Leben waren eine Vielzahl von Münzwerten, Maßen und Gewichten, die von Land zu Land verschieden waren[17] und sich beständig änderten, ineinander umzurechnen. Und das alles vorwiegend mit Rechenbrett und Rechenpfennigen, denn das schriftliche Rechnen bildete sich gerade erst heraus. Vor diesem Hintergrund an Taschenrechner und Computer zu denken, verbietet sich von selbst.

Schauen wir einmal in Ries' zweites Rechenbuch, das 1522 in Erfurt erschien und über viele Jahrzehnte hinweg weit verbreitet und sehr erfolgreich war, und greifen drei Aufgaben heraus, die lediglich Kenntnisse der Multiplikation, Division und des Dreisatzes erfordern, aber dennoch nicht »mit links« zu lösen sind. Insbesondere für die Umrechnung der verschiedenen Maßeinheiten ineinander werden Fertigkeiten in der Anwendung der Bruchrechnung benötigt.

Aufgabe 1: (Von Fracht vnd Fuhrlohn) Item man gibt von 3. Centner 24. meil ein Vngerischen fl. zu fuhrlohn/ wie viel wirdt man geben von 11. Centnern 120. meil?

[Für 3 Zentner und 24 Meilen wird ein Ungarischer Gulden (fl) als Fuhrlohn bezahlt. Wie viel muss man für 11 Zentner und 120 Meilen bezahlen?]

Die Abkürzung »fl« kommt daher, dass der Gulden (»guldin pfennic«, also die »goldene Münze«) zuerst als Nachahmung des florentinischen Fiorino geprägt wurde und daher auch Florin hieß.

Lösung: Es handelt sich um eine Aufgabe zum zusammengesetzten Dreisatz. Für einen Zentner und eine Meile hat man $1/(3 \cdot 24) = 1/72$ Gulden zu zahlen, demzufolge für 11 Zentner und 120 Meilen den Betrag von $\frac{11 \cdot 120}{72} = \frac{1320}{72} = \frac{165}{9} = \frac{55}{3} = 18\frac{1}{3}$ Gulden.

[17] So hat beispielsweise ein Zentner in verschiedenen Aufgaben bei Ries 100, 102, 110 oder 112 Pfund.