RESEARCH

Rick Voßwinkel

Systematische Analyse und Entwurf von Regelungseinrichtungen auf Basis von Lyapunov's direkter Methode

Springer Vieweg

Systematische Analyse und Entwurf von Regelungseinrichtungen auf Basis von Lyapunov's direkter Methode

Rick Voßwinkel

Systematische Analyse und Entwurf von Regelungseinrichtungen auf Basis von Lyapunov's direkter Methode

Springer Vieweg

Rick Voßwinkel
Leipzig, Deutschland

Die Promotion wurde durch die Studienstiftung des deutschen Volkes gefördert.

Die vorliegende Arbeit wurde unter dem Titel „Systematische Analyse und Entwurf von Regelungseinrichtungen auf Basis von Lyapunov's direkter Methode“ am 12.07.2019 als Dissertation zur Erlangung des akademischen Grades Doktoringenieur (Dr.-Ing.) an der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik der Technischen Universität Dresden verteidigt.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Dr. techn. Klaus Janschek (TU Dresden)
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. Klaus Röbenack (TU Dresden)
Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Hendrik Richter (HTWK Leipzig)

Tag der Einreichung: 27.02.2019
Tag der Verteidigung: 12.07.2019

ISBN 978-3-658-28060-4 ISBN 978-3-658-28061-1 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-28061-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort

Die vorliegende Dissertationsschrift beschäftigt sich mit der systematischen Analyse dynamischer Systeme und dem konstruktiven Regelungsentwurf auf Basis von Lyapunov-Methoden. Sie entstand im Rahmen eines kooperativen Promotionsverfahrens der Technischen Universität Dresden, sowie der Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig und wurde durch ein Promotionsstipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes gefördert.

Mein besonderer Dank gilt meinen beiden Betreuern Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Dipl.-Math. Klaus Röbenack und Prof. Dr.-Ing. Hendrik Richter für die zahlreichen Gespräche, Hinweise und Anregungen während der gesamten Bearbeitungszeit. Ohne ihre vielfältigen Unterstützungen wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen. Außerdem möchte ich mich bei Herrn Dr.-Ing. Frank Schrödel, Herrn Dr.-Ing. Lorenz Pyta, Herrn Dr. İlhan Mutlu, Herrn Prof. Dr.-Ing. Naim Bajcinca und Herrn Dipl.-Ing. Dinu Mihailescu-Stoica für die wertvollen Diskussionen im Rahmen gemeinsamer Veröffentlichungen bedanken.

Mein Dank gilt weiterhin meinen Kollegen am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der Technischen Universität Dresden und der Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik der Hochschule für Technik, Wirtschaft und Kultur Leipzig für eine Vielzahl von inspirierenden Gesprächen.

Nicht zuletzt danke ich meiner Frau Yvonne und meinen Kindern Thor, Ole, Lina und Ida für ihre endlose Unterstützung, Geduld und Verständnis. Sie sind eine ständige Inspiration und ich verdanke ihnen mehr als ich in der Lage bin auszudrücken.

Leipzig, August 2019 — Rick Voßwinkel

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen ab 0 bzw. 1
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	Körper der reellen bzw. komplexen Zahlen
$\mathbb{R}^+$	Menge der nicht-negativen reellen Zahlen
$\subseteq$, $\subset$	Teilmenge, echte Teilmenge
$\mathbb{K}^n$	n-dimensionaler Vektorraum über den Körper $\mathbb{K}$
$\mathbb{K}^{n\times m}$	Vektorraum der $(n \times m)$- Matrizen über den Körper $\mathbb{K}$
$\oplus$	direkte Summe
M^T, M^*	Transponierte bzw. Adjungierte zur Matrix M
M^{-1}, $M^\dagger$	Inverse bzw. Moore-Penrose-Inverse zur Matrix M
$\det(\cdot)$	Determinante der Matrix
$\mathrm{rang}(\cdot)$	Rang der Matrix
$M \succ 0$, $M \succeq 0$	positiv definite bzw. positiv semidefinite Matrix M
I	Einheitsmatrix
$\otimes$	Kronecker-Produkt
$\exists$, $\forall$	Existenzquantor, Allquantor
$\wedge$, $\vee$, $\neg$	logisches Und, Oder, Nicht
$\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$	Implikation bzw. Äquivalenz
$f'(x), f''(x), f^{(i)}$	erste, zweite, i-te Ableitung von f bzgl. x
$\dot{x}, \ddot{x}, x^{(i)}$	erste, zweite, i-te zeitliche Ableitung von x
$\lvert \cdot \rvert$	Betrag des Objektes $\cdot$
C^k	Menge der k-mal stetig differenzierbaren Funktionen
$\deg(\cdot)$	Ordnung des Polynoms
(a,b), $[a,b)$, $[a,b]$	offenes, halboffenes, geschlossenes Intervall
$\emptyset$	leere Menge
$\in$	Element von
$L_f V(x)$	Lie-Ableitung des Skalarfeldes V entlang des Vektorfeldes f.
$\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_r\}$	lineare Hülle der Vektoren $v_1, \ldots, v_r$
$\frac{\partial}{\partial x}$	partielle Ableitung nach x
$\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert_P$	P-Norm
$\lvert\lvert \cdot \rvert\rvert_\infty$	Supremumsnorm

Abkürzungsverzeichnis

Abkürzung	**Bedeutung**
BMI	Bilineare Matrixungleichung (engl.: bilinear matrix inequality)
CAD	zylindrisch algebraische (Zellen-)Zerlegung (engl.: cylindrical algebraic decomposition)
CLF	Regelungs-Lyapunov-Funktion (engl.: control Lyapunov function)
DGL	Differentialgleichung
GS	globale Stabilität (im Sinne von Lyapunov)
GAS	globale asymptotische Stabilität
δGAS	inkrementelle globale asymptotische Stabilität
ISS	Eingangs-Zustands-Stabilität (engl.: input-to-state stability)
δISS	inkrementelle Eingangs-Zustands-Stabilität (engl.: incremental input-to-state stability)
LMI	Lineare Matrixungleichung (engl.: linear matrix inequality)
QE	Quantorenelimination
SOS	Summe von Quadraten (engl.: sum of squares)

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der systematischen Betrachtung der Stabilitätsanalyse sowie dem Regelungsentwurf, einerseits von linearen und andererseits von nichtlinearen Systemen. Dabei werden sowohl numerische als auch algebraische Ansätze untersucht.

Den Ausgangspunkt stellen dabei Lyapunov's direkte Methode und deren Erweiterungen dar. Diese ermöglichen Formulierungen zur Überprüfung von Stabilität, Eingangs-Zustands-Stabilität, sowie inkrementelle Stabilitätseigenschaften. Auf deren Grundlage werden Bedingungen angegeben, die eine systematische Überprüfung zum einen mit Quadratsummenzerlegung und zum anderen mit Methoden der Quantorenelimination ermöglichen. Dazu werden die jeweiligen Begrifflichkeiten und Ansätze eingeführt.

Bei der Quadratsummenzerlegung wird anstatt einer Definitheitsprüfung versucht, den polynomialen Ausdruck in eine Summe von Quadraten zu zerlegen. Damit geht die positive Semidefinitheit des Ausdruckes einher. Diese Zerlegung lässt sich in ein semidefinites Programm überführen und numerisch lösen.

Grundidee der Quantorenelimination ist es, quantifizierte Ausdrücke in ein quantorenfreies Äquivalent umzuformen. Somit können die Parameterkonstellationen ermittelt werden, welche ein System mit den jeweiligen Eigenschaften ergeben.

Da die beiden Herangehensweisen lediglich die Betrachtung polynomialer Systembeschreibungen erlauben, wird eine Prozedur zur rationalen Umformung vorgestellt. Diese ermöglicht es durch Dimensionserhöhung und zusätzliche Nebenbedingungen, eine Vielzahl von nicht-polynomialen Systemen in adäquate polynomiale Beschreibungen zu überführen. Allerdings müssen dabei die sich aus dem Umformungsprozess ergebenden Nebenbedingungen berücksichtigt werden.

Weiterhin wird ein Parameterraumverfahren zur Stabilitätsüberprüfung linearer Systeme vorgestellt. Dies ermöglicht es, einfache Stabilitätsbedingungen basierend auf der Lyapunov-Gleichung zu formulieren. Mit diesem Ansatz kann die Menge aller stabilisierenden Parameter bestimmt werden. Es wird dargestellt, wie dieser Ansatz auf Basis von Ersatzmatrizen erweitert werden kann, um alle Parameterkonstellationen zu bestimmen, die zusätzliche Güteanforderungen garantieren. Dabei werden sowohl kontinuierliche als auch diskrete Zustandsraummodelle betrachtet und deren Anwendung anhand verschiedener Beispielsysteme umfangreich diskutiert.

Die entwickelten Methoden der Systemanalyse werden mittels Regelungs-Lyapunov-Funktionen für den Regelungsentwurf erweitert. Dabei ergeben sich Bedingungen, die einen systematischen Entwurf von Zustandsrückführungen ermöglichen. Dieser Ansatz wird auf polynomialisierte Systeme adaptiert und entsprechende Bedingungen werden aufgestellt. Zusätzlich wird aufgezeigt, wie auf systematische Weise Zustandsrückführungen mittels Quantorenelimination entworfen werden können, welche die Eingangs-Zustands-Stabilität des geschlossenen Regelkreises erzeugen. Die Anwendung der entwickelten Bedingungen wird jeweils anhand von beispielhaften Systemen diskutiert.

Es zeigt sich, dass der Rechenaufwand mit wachsender Systemdimension zunehmend problematisch wird, so dass die Methoden der Quantorenelimination nur schwerlich auf Systeme mit einer Dimension größer 3 oder 4 angewendet werden können. Dies resultiert aus dem mit den Algorithmen einhergehenden, mitunter doppelt exponentiell wachsenden, Rechenaufwand. Ähnliches gilt für Ansätze, die auf Quadratsummenzerlegung basieren. Obwohl der Rechenaufwand bei diesen Methoden nur polynomiell wächst, ist die Anwendung bei diesen Bedingungen auch bei Systemdimensionen größer 5 oder 6 nur in Ausnahmefällen möglich. Ein wesentlicher Vorteil der Quantorenelimination gegenüber der Quadratsummenzerlegung ist, dass anstatt einer numerischen Näherungslösung die tatsächliche Lösungsmenge bestimmt wird. Außerdem können somit zusätzliche Entwurfsparameter berücksichtigt werden.

Das vorgestellte Parameterraumverfahren ist zwar nur auf lineare Systeme anwendbar, erzeugt allerdings vollständige Lösungsmengen und besitzt dabei einen wesentlich geringeren Rechenaufwand als bekannte Verfahren.

Abstract

This thesis deals with the systematic approach of stability analysis and control design of linear as well as nonlinear systems. Both numerical and algebraic approaches are investigated.

The initial point is Lyapunov's direct method and its extensions. These allow specific formulations for stability, input-to-state stability, and incremental stability properties. On the basis of these, conditions are given which permit a systematic procedure based on sum of squares decomposition on the one hand and quantifier elimination methods on the other hand. For this purpose, the respective terms and algorithms are introduced.

The sum of squares decomposition approach decomposes a polynomial expression in a sum of squares instead of checking the definitness. Such a sum of squares is accompanied by the positive semidefiniteness of the expression. This decomposition can be converted into a semidefinite program and solved numerically.

The basic idea of quantifier elimination is to transform quantified expressions into a quantifier-free equivalent. Thus the parameter constellations can be determined, which result in a system with the respective properties.

Since both approaches only allow the consideration of polynomial systems, a procedure for a rational recast is presented. By increasing the system dimension and additional constraints it is possible to transform a numerous number of non-polynomial systems into equivalent polynomial descriptions. However, the resulting constraints must now be taken into account.

Furthermore, a parameter space method for stability testing of linear systems is presented. This allows the formulation of simple stability conditions based on the Lyapunov equation. With this approach, the set of all stabilizing parameters can be determined. It is shown how this approach can be extended on the basis of surrogate matrices to determine all parameter constellations that guarantee additional performance requirements. Thereby both continuous and discrete state space models are considered and their application is discussed on example systems, respectively.

The developed methods for system analysis are extended by control Lyapunov functions for the control design. This results in conditions that allow a systematic design of state feedback controller. This approach is adapted to polynomialized systems and corresponding conditions are introduced. In addition, it is shown how to systematically design state feedback systems using quantifier elimination, which generates input-to-state stability of the closed-loop system. The application of the developed conditions is discussed by serval examples.

It turns out that the computational effort increases problematic with growing system dimensions so that the methods of quantifier elimination can hardly be applied to systems with a dimension greater than 3 or 4. This is a result of the in the worst case doubly exponential increase in computational effort associated with these algorithms. The same applies to approaches based on sum of squares decomposition. Although the computational load with these methods grows only polynomially, the application with these conditions also with system dimensions larger than 5 or 6 is possible only in exceptional cases. A major advantage of quantifier elimination over sum of squares decomposition is that the complete and exact solution set is determined instead of a numerical approximation solution. Moreover, additional design parameters can be considered.

The parameter space method presented in this work can only be applied to linear systems, but it generates complete solution sets and requires much less computational effort than other known methods.

1 Einleitung

1.1 Problemstellung

Die wichtigste Frage für ein regelungstechnisches System ist, ob es stabil ist oder nicht. Denn instabile Systeme sind im Allgemeinen nicht verwendbar oder sogar gefährlich. Aufgrund dieses Stellenwertes von Stabilität verwundert es nicht, dass die ersten Stabilitätsbetrachtungen bis zu Aristoteles und Archimedes zurück verfolgt werden können [Mag59]. Heutzutage ist Stabilität eine zentrale Eigenschaft für jeden, der mit mathematischen Modellen arbeitet, so dass Stabilitätsbetrachtungen in nahezu alle Bereiche der Wissenschaft Einzug gehalten haben, von Astronomie (z. B. [Poi93]) bis Zoologie (z. B. [Lin00]). Allerdings hat der Begriff Stabilität unterschiedliche Bedeutungen und Verwendungen bei der Charakterisierung von Systemverhalten. Die explizite Begriffsbestimmung variert dabei zwischen den unterschiedlichen Disziplinen, aber auch innerhalb der einzelnen Fachrichtungen. Stabilität deutet jedoch stets auf eine Art Standhaftigkeit gegenüber Störungen oder Abweichungen vom Arbeitspunkt hin. Somit ändert eine quantitativ kleine Störung das Systemverhalten nicht maßgeblich, ruft also keine qualitativen Änderungen hervor. Insbesondere im Bereich der Astronomie entwickelten sich zahlreiche Begriffsdefinitionen. So finden sich beispielsweise unterschiedliche Definitionen von Lagrange, Poisson und Laplace für die Stabilität der Bahn eines Planeten [Mag59]. Die unterschiedlichen Definitionen führen gelegentlich zu Verwirrungen. So führt Poincaré in [Poi93] explizit die „stabilité à la Poisson“ ein, er schlägt aber implizit den Begriff „stabilité à la Lagrange“ vor, indem er erwähnt, dass die Beschränktheit der Planetenbahnen von Lagrange bewiesen wurde.

Am engsten fasst den Stabilitätsbegriff Lyapunov [Lya92, Hah63, Hah67]. Dessen Definition etablierte sich als Standard in der Regelungstechnik und stellt auch den Kern dieser Arbeit dar. Ein wesentlicher Vorteil ergibt sich aus der sogenannten direkten Methode von Lyapunov. Diese erlaubt es, Rückschlüsse auf die Stabilität im Sinne von Lyapunov zu ziehen, ohne die Lösung des betrachteten Systems explizit zu kennen. Diese Methode und deren Weiterentwicklungen haben sich als das Standardverfahren zur Stabilitätsanalyse, insbesondere bei nichtlinearen Systemen, entwickelt [Kha02, Ada14, SL91, SJK97]. Darüber hinaus entstanden in den vergangenen Jahrzehnten erweiterte Analysemethoden und Lyapunov-basierte Regelungsentwurfsverfahren.

Alle Ansätze, denen Lyapunov's direkte Methode zugrunde liegt, verbindet zwei Problemstellungen: Zum einen sind ihre Aussagen zwar hinreichend, aber nicht notwendig. Zum anderen basieren die Methoden auf einer Definitheitsprüfung. Bei dieser

R. Voßwinkel, *Systematische Analyse und Entwurf von Regelungseinrichtungen auf Basis von Lyapunov's direkter Methode*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-28061-1_1