



Valentin L. Popov  
Markus Heß

# Methode der Dimensionsreduktion in Kontaktmechanik und Reibung

Eine Berechnungsmethode im Mikro-  
und Makrobereich

---

# Methode der Dimensionsreduktion in Kontaktmechanik und Reibung

---

Valentin L. Popov · Markus Heß

# Methode der Dimensionsreduktion in Kontaktmechanik und Reibung

Eine Berechnungsmethode im Mikro- und  
Makrobereich

Valentin L. Popov  
Institut für Mechanik, TU Berlin  
Berlin, Deutschland

Markus Heß  
Abt. IC Studienkolleg, TU Berlin  
Berlin, Deutschland

ISBN 978-3-642-32672-1      ISBN 978-3-642-32673-8 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-642-32673-8

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media  
[www.springer-vieweg.de](http://www.springer-vieweg.de)

*Es ist schwieriger, eine vorgefasste Meinung zu zertrümmern als ein Atom.*

A. Einstein

---

## Vorwort

Kontakt und Reibung sind Phänomene, die für unzählige technische Anwendungen von entscheidender Bedeutung sind. Gleichzeitig sind es Phänomene, deren theoretische Erfassung und numerische Simulation auf besondere Schwierigkeiten stoßen. Dieses Buch ist einer Methode gewidmet, welche zwei wichtige Klassen von Kontaktaufgaben soweit „trivialisiert“, dass sie für jeden Ingenieur-Studierenden des ersten Semesters, der über die elementaren mathematischen und physikalischen Kenntnisse verfügt, zugänglich werden. Gleichzeitig eröffnet sie die Möglichkeiten, Kontakt- und Reibungskräfte auf eine sehr einfache Weise in die numerischen Simulationen einzubinden.

Die „Trivialisierung“ geschieht mithilfe der Methode der Dimensionsreduktion, welche den Hauptgegenstand des Buches bildet. Diese Methode basiert auf einer Analogie zwischen bestimmten Klassen von dreidimensionalen Kontakten und Kontakten mit eindimensionalen elastischen oder viskoelastischen Bettungen. Dreidimensionale Kontakte werden im Rahmen der Methode der Dimensionsreduktion durch eine Reihe von eindimensional angeordneten elastischen oder viskoelastischen Elementen ersetzt. Dabei möchten wir streng hervorheben, dass dies *keine Näherung* ist: Bestimmte makroskopische Kontakteigenschaften stimmen *exakt* mit denen des dreidimensionalen Originals überein.

Die Methode der Dimensionsreduktion bietet die *zweifache* Reduktion: Zum einen wird ein dreidimensionales System durch ein eindimensionales ersetzt, zum anderen sind die resultierenden Freiheitsgrade des eindimensionalen Ersatzsystems unabhängig voneinander. Diese beiden Eigenschaften führen zu einer enormen Vereinfachung in der Handhabung von Kontaktaufgaben und einer qualitativen Beschleunigung von numerischen Simulationen.

Die Methode der Dimensionsreduktion zeichnet sich durch vier wesentliche Eigenschaften aus: sie ist *mächtig*, sie ist *einfach*, sie ist *bewiesen* und sie ist *konstraintuitiv*. Es fällt nicht leicht, sie zu akzeptieren. Jeder Fachmann in der Kontaktmechanik, der sich mit den detaillierten Beweisen der Methode noch nicht beschäftigt hat, wird sofort beurteilen, dass sie nicht funktionieren kann. Es scheint einer gesunden Intuition völlig zu widersprechen, dass ein System mit einer anderen räumlichen Dimension und dazu auch noch unabhängigen Freiheitsgraden ein dreidimensionales System mit räumlichen Wechselwirkungen korrekt wiedergeben kann. Und trotzdem funktioniert das! Wie und unter welchen Einschränkungen – diesen Themen ist dieses Buch gewidmet.

Beim Verfassen des Buches haben wir im Wesentlichen zwei Hauptziele verfolgt. Einerseits ging es uns um eine möglichst einfache Vermittlung der Handhabungsregeln der Methode. Andererseits wollten wir aber auch die wichtigsten Aussagen der Methode mit strengen mathematischen Beweisen belegen, damit auch der rigoroseste Kontaktmechaniker sich selbst von der Korrektheit der Methode überzeugen könnte. Wir haben versucht, diese zwei Ziele auseinander zu halten. Die Kapitel, in denen die Grundlagen der praktischen Handhabung der Methode erläutert werden (vor allem [Kap. 3](#), aber auch die darauffolgenden [Kap. 4](#), [5](#), [6](#) und [7](#) sowie das der Kontaktmechanik von rauen Oberflächen gewidmete [Kap. 10](#)), versuchten wir mit den Beweisen nicht zu überlasten. Es ist uns bewusst, dass uns das leider nicht an allen Stellen gelungen ist.

Die Methode der Dimensionsreduktion gibt vor allem dem Ingenieur ein praktisches Werkzeug in die Hand. Um die praktische Seite der Methode noch stärker zu unterstreichen, haben wir die meisten Kapitel mit zahlreichen Aufgaben versehen, welche zum besseren Verständnis der Handhabung der Methode und ihrer Anwendungsgebiete dienen sollen. Das Buch kann daher auch als ein Lehrbuch in einem tribologisch orientierten Studiengang benutzt werden.

Berlin, April 2013

Valentin L. Popov  
Markus Heß

---

# Danksagung

Dieses Buch wäre nicht ohne die tatkräftige Unterstützung unserer Kollegen am Institut für Mechanik der Technischen Universität Berlin entstanden. Einige Kapitel wurden in direkter Zusammenarbeit mit Kollegen geschrieben:

- Kapitel 6: Rollkontakt – zusammen mit R. Wetter
- Kapitel 7: Kontakt mit Elastomeren – zusammen mit S. Kürschner
- Kapitel 10: Normalkontakt mit rauen Oberflächen – zusammen mit R. Pohrt
- Kapitel 11: Reibungskraft – zusammen mit S. Kürschner
- Kapitel 12: Reibungsdämpfung – zusammen mit E. Teidelt
- Kapitel 13: Kopplung an eine makroskopische Dynamik – zusammen mit E. Teidelt
- Kapitel 14: Akustische Emission beim Rollen – zusammen mit M. Popov und J. Benad
- Kapitel 15: Kopplung an Mikroskala – zusammen mit R. Pohrt
- Kapitel 19: Anlage 3: Ersetzung der Materialeigenschaften mit Radoks Methode der Funktionalgleichungen – zusammen mit S. Kürschner

Für viele wertvolle Diskussionen sind wir unseren Kollegen und Gästen am Institut für Mechanik dankbar: A. Dimaki, A.E. Filippov, T. Geike, R. Heise, Q. Li, S.G. Psakhie, J. Starcevic, E. Teidelt, E. Willert. Einen ganz herzlichen Dank möchten wir Frau Dr.-Ing. J. Starcevic aussprechen für ihre umfangreiche Unterstützung beim Verfassen des Buches. Frau Ch. Koll danken wir für ihre Geduld bei der Erstellung von Bildern.

Berlin, im April 2013

Valentin L. Popov und Markus Hefß



# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	1
1.1 Zielsetzung des Buches	1
1.2 Methode der Dimensionsreduktion als Bindeglied zwischen Mikro- und Makroskala	3
1.3 Struktur des Buches	4
Literatur	5
<b>2 Separation der elastischen und der Trägheitseigenschaften in dreidimensionalen Systemen</b>	7
2.1 Einführung	7
2.2 Quasistationarität	8
2.3 Elastische Energie als lokale Eigenschaft	9
2.4 Kinetische Energie als globale Eigenschaft	10
Aufgaben	14
Literatur	18
<b>3 Normalkontaktprobleme mit rotationssymmetrischen Körpern ohne Adhäsion</b>	19
3.1 Abbildung von dreidimensionalen Kontaktproblemen in eine Dimension: Die Grundidee	19
3.2 Regeln von Geike & Popov und Regeln von Heß für Normalkontaktprobleme	20
3.3 Allgemeine Abbildung rotationssymmetrischer Profile	25
3.4 Abbildung von Spannungen	28
3.5 Abbildung von nicht-rotationssymmetrischen Körpern	29
Aufgaben	29
Literatur	37
<b>4 Normalkontakt mit Adhäsion</b>	39
4.1 Einführung	39
4.2 Regel von Heß für den adhäsiven Kontakt rotationssymmetrischer Körper	40
4.3 Adhäsiver Kontakt und Griffith-Riss	41
	XI

4.4	Vollständige Reduktion des adhäsiven, elastischen Kontaktes . . . . .	46
4.5	Musterbeispiel: Adhäsion einer Kugel mit überlagerter, radialer Welligkeit . . .	52
	Aufgaben . . . . .	57
	Literatur . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Tangentialkontakt</b> . . . . .	<b>67</b>
5.1	Einführung . . . . .	67
5.2	Tangentialkontakt mit Reibung für parabolische Körper . . . . .	68
5.3	Tangentialkontakt mit Reibung für beliebige rotationssymmetrische Körper . . . . .	70
5.4	Abbildung von Spannungen im Tangentialkontakt . . . . .	75
	Aufgaben . . . . .	76
	Literatur . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Rollkontakt</b> . . . . .	<b>87</b>
6.1	Abbildung des stationären Rollkontaktes . . . . .	87
6.2	Regeln für die exakte Abbildung des Rollkontaktes . . . . .	90
6.3	Shakedown und Kriechen in oszillierenden Rollkontakten . . . . .	91
	Aufgaben . . . . .	96
	Literatur . . . . .	98
<b>7</b>	<b>Kontakt mit Elastomeren</b> . . . . .	<b>99</b>
7.1	Einführung . . . . .	99
7.2	Spannungsrelaxation in Elastomeren . . . . .	100
7.3	Anwendung der Methode der Dimensionsreduktion auf viskoelastische Medien: Die Grundidee . . . . .	102
7.4	Radoks Methode der Funktionalgleichungen . . . . .	103
7.5	Formulierung der Reduktionsmethode für linear viskose Elastomere . . . . .	106
7.6	Das allgemeine viskoelastische Materialgesetz . . . . .	107
	Aufgaben . . . . .	108
	Literatur . . . . .	113
<b>8</b>	<b>Wärmeleitung und Wärmeerzeugung</b> . . . . .	<b>115</b>
8.1	Wärmeleitfähigkeit und Wärmewiderstand . . . . .	115
8.2	Temperaturverteilung bei punktförmiger Wärmequelle auf leitendem Halbraum . . . . .	116
8.3	Die universelle Abhängigkeit von Leitfähigkeit und Kontaktsteifigkeit . . . . .	118
8.4	Die Umsetzung stationärer Leitungsprozesse innerhalb der Reduktionsmethode . . . . .	119
8.5	Wärmeproduktion und Temperatur im Kontakt elastischer Körper . . . . .	122
8.6	Wärmeproduktion und Temperatur im Kontakt viskoelastischer Körper . . . . .	124
	Aufgaben . . . . .	125
	Literatur . . . . .	130

<b>9</b>	<b>Adhäsion mit Elastomeren</b> .....	133
9.1	Einführung .....	133
9.2	Spannungskonzentration in der Nähe der Grenze eines adhäsiven Kontaktes .....	133
9.3	Deformationskriterium .....	135
9.4	Spannungskriterium .....	136
9.5	Adhäsiver Kontakt ohne Vorspannung .....	136
	Aufgaben .....	137
	Literatur .....	143
<b>10</b>	<b>Normalkontakt mit rauen Oberflächen</b> .....	145
10.1	Einführung .....	145
10.2	Zufällig raue, statistisch isotrope Oberflächen .....	146
10.3	Fraktale, selbst-affine Oberflächen .....	147
10.4	Generierung des äquivalenten 1D-Systems .....	149
10.5	Numerische Ergebnisse der Randelementemethode und der Reduktionsmethode .....	152
10.6	Selbstaffinität und Dimensionsreduktion .....	156
10.7	Kontaktmechanik von selbstaffinen Oberflächen für $-1 < H < 3$ .....	157
10.8	Äquivalenz zwischen rauen selbst-affinen und rotationssymmetrischen Kontakten mit gleichem Hurst-Exponenten .....	160
	Aufgaben .....	162
	Literatur .....	167
<b>11</b>	<b>Reibungskraft</b> .....	169
11.1	Einführung .....	169
11.2	Energiedissipation in einem Elastomer mit linearer Rheologie .....	170
11.3	Reibungskraft zwischen einem starren, axialsymmetrischen Indenter und einem Elastomer .....	171
11.4	Die Halbraumnäherung .....	173
11.5	Berechnung der Reibungskraft mit einem konischen Indenter im Rahmen der Dimensionsreduktionsmethode .....	174
11.6	Korrekturkoeffizient bei der Umrechnung von 3D in 1D Profile .....	177
11.7	Kontakte zwischen rauen Oberflächen .....	180
11.8	Kontakt eines ebenen, glatten Elastomers mit einem durchschnittlich ebenen, rauen Körper .....	181
11.9	Kontakt zwischen einem rauen Elastomer und einer rauen starken Fläche .....	182
	Aufgaben .....	182
	Literatur .....	188
<b>12</b>	<b>Reibungsdämpfung</b> .....	189
12.1	Einführung .....	189
12.2	Dämpfung durch trockene Reibung .....	189

12.3	Dämpfung von Elastomeren bei Normaloszillationen .....	192
	Aufgaben.....	193
	Literatur .....	195
<b>13</b>	<b>Kopplung an eine makroskopische Dynamik .....</b>	<b>197</b>
13.1	Einführung .....	197
13.2	Hybridmodelle: Verzicht auf die Formulierung eines expliziten Reibgesetzes .....	197
13.3	Simulation eines Nanoantriebs .....	200
	Aufgaben.....	204
	Literatur .....	206
<b>14</b>	<b>Akustische Emission beim Rollen.....</b>	<b>207</b>
14.1	Einführung.....	207
14.2	Akustische Emission beim Rollen eines Rades – Analytische Lösung.....	208
14.3	Akustische Emission beim Rollen eines Rades – Dynamische Simulation .....	211
	Literatur .....	214
<b>15</b>	<b>Kopplung an Mikroskala .....</b>	<b>215</b>
15.1	Einführung.....	215
15.2	Nichtlineare Steifigkeit auf der „Mikroebene“ .....	215
15.3	Kopplung mit der Mikroskala am Beispiel des Hertzschens Kontaktes .....	216
15.4	Kopplung mit der Mikroskala am Beispiel einer zufällig rauhen, fraktalen Oberfläche .....	217
	Literatur .....	219
<b>16</b>	<b>Was weiter? .....</b>	<b>221</b>
16.1	Einführung.....	221
16.2	Lineare Scans zur direkten Verwendung im eindimensionalen Ersatzmodell.....	221
16.3	Anisotropie: Lineare Scans in Bewegungsrichtung?.....	222
16.4	Kann die Methode der Dimensionsreduktion auch auf nicht zufällig raue Oberflächen angewandt werden? .....	223
16.5	Heterogene Systeme .....	224
16.6	Bruch und plastische Deformation in der Dimensionsreduktionsmethode .....	225
	Literatur .....	226

<b>17</b>	<b>Anlage 1: Exakte Lösungen in drei Dimensionen für den Normalkontakt rotationssymmetrischer Körper</b>	<b>227</b>
17.1	Einführung	227
17.2	Normalkontakt ohne Adhäsion.	230
17.2.1	Eingliedrige Profilvorgabe – Potenzfunktion.	231
17.2.2	Der Sonderfall des flachen zylindrischen Stempels.	232
17.2.3	Superpositionsprinzip und mehrgliedrige Profilvorgabe.	232
17.3	Normalkontakte mit Adhäsion gemäß verallgemeinerter JKR-Theorie	233
17.4	Die Abbildung von Spannungen	237
	Literatur	238
<b>18</b>	<b>Anlage 2: Exakte Lösungen in drei Dimensionen für den Tangentialkontakt rotationssymmetrischer Körper</b>	<b>241</b>
	Literatur	245
<b>19</b>	<b>Anlage 3: Ersetzung der Materialeigenschaften mit Radoks Methode der Funktionalgleichungen</b>	<b>247</b>
19.1	Einführung	247
19.2	Die Fundamentallösung für das linear viskose Materialmodell	247
19.3	Die Fundamentallösung für das linear viskose, inkompressible Materialmodell.	251
19.4	Die Anwendung der Reduktionsmethode auf ein allgemeines lineares viskoelastische Materialmodell	251
19.5	Vereinfachung: das inkompressible, viskoelastische Materialmodell	254
19.6	Vereinfachung: Approximation der Relaxationsfunktionen durch diskrete Modelle.	255
	Literatur	255
<b>20</b>	<b>Anlage 4: Bestimmung des 2D Leistungsspektrums aus 1D Scans</b>	<b>257</b>
20.1	Einführung	257
20.2	Definitionen	257
20.3	Zusammenhang des 1D- und des 2D-Leistungsspektrums	258
20.4	1D und 2D Leistungsspektren für zufällig raue, selbst-affine Oberflächen	260
	Literatur	261
	<b>Sachverzeichnis</b>	<b>263</b>

Valentin L. Popov und Markus Heß

---

## 1.1 Zielsetzung des Buches

Das Ziel des Buches ist die Beschreibung der *Methode der Dimensionsreduktion* in der Kontaktmechanik und Reibung. Kontakte zwischen dreidimensionalen Körpern treten in verschiedensten technischen Anwendungen auf. Ihre analytische und numerische Simulation ist daher von großer Bedeutung. Aus mathematischer Sicht werden Kontakte durch Integralgleichungen mit gemischten Randbedingungen beschrieben, wobei im Allgemeinen weder die Spannungsverteilung noch die Verschiebungen der Oberfläche oder die Form des Kontaktgebietes bekannt sind [1]. Umso erstaunlicher ist es, dass sich eine große Zahl von klassischen Kontaktproblemen auf eindimensionale Modelle von Kontakten mit einer passend definierten, linearen Winklerschen Bettung abbilden lässt! Damit meinen wir, dass die Ergebnisse des eindimensionalen Modells mit denen des dreidimensionalen Originals *exakt* übereinstimmen. Nach dieser Abbildung werden die Lösungen kontaktmechanischer Probleme solchermaßen *trivialisieren*, dass zu ihrer Durchführung keine speziellen Kenntnisse erforderlich sind außer Grundkenntnissen der Algebra und der Analysis.

Die gesunde Intuition eines Fachmanns in der Kontaktmechanik hält die Möglichkeit einer solchen *exakten* Abbildung eines dreidimensionalen Problems mit weitreichenden Wechselwirkungen auf eine banale eindimensionale Winklersche Bettung mit unabhängigen Elementen (Federn oder Feder-Dämpfer-Kombinationen) schlichtweg für unmöglich. Aber auch die feinste Intuition muss sich mit mathematischen Fakten abfinden: Es wurde für breite Klassen von Kontaktproblemen streng mathematisch bewiesen, dass die eindimensionalen Abbildungen ein exaktes Ergebnis für echte dreidimensionale Kontaktprobleme liefern [2, 3]. Dieses Buch stellt für interessierte Leser die nötigen Beweise zur Verfügung.

Wie jedes Modell, hat auch die Methode der Dimensionsreduktion ihr spezifisches Anwendungsgebiet. Es gibt Aufgaben, die mit der Methode exakt gelöst werden

und solche Gebiete, wo die Methode nicht exakt ist, aber eine sehr gute Näherung darstellt. Selbstverständlich existieren aber auch Grenzen, über die die Anwendbarkeit nicht hinausgeht. Exakt werden mit der Methode der Dimensionsreduktion z. B. Normal- und Tangentialkontakte mit *beliebigen rotationssymmetrischen* Körpern abgebildet. Bereits an dieser Stelle könnte ein Einwand lauten: Das mag wohl sein, aber die Kontaktprobleme mit rotationssymmetrischen Körpern sind auch in der dreidimensionalen Kontaktmechanik gelöst. Die Methode der Dimensionsreduktion bringt also nichts Neues! Dem können wir grundsätzlich zustimmen, nur ist dieser Reichtum von exakten dreidimensionalen Lösungen in hunderten von Originalpublikationen über die jahrhundertlange Entwicklung der Kontaktmechanik gestreut. Die Autoren des Buches beschäftigen sich professionell mit der Kontaktmechanik. Und trotzdem müssen wir zugeben, dass es auch uns Monate und Jahre gekostet hat, um alle nötigen Lösungen herauszufinden und zusammenzutragen. Die Methode der Dimensionsreduktion stellt aber diesen Kenntnisreichtum aktuell und vorbehaltlos, hier und jetzt, in einer einfachen Form jedem Ingenieur zur Verfügung. Es stimmt also: Für rotationssymmetrische Körper bringt die Methode der Dimensionsreduktion *nichts Neues*, sie gibt nur exakt die dreidimensionalen Ergebnisse wieder und stellt somit eine Art Taschenausgabe der Kontaktmechanik dar.

Dazu möchten wir hinzufügen, dass viele Kontaktprobleme mit rotationssymmetrischen Körpern zwar „im Prinzip“ gelöst sind, ihre aktuelle Anwendung sich aber extrem schwierig gestaltet, wenn es sich z. B. um dynamische Kontakte handelt. Auch hier kommt die Methode der Dimensionsreduktion zur Hilfe, denn aufgrund ihrer trivialen Formulierung lässt sie sich sehr leicht analytisch oder numerisch implementieren und stellt auch ein bequemes „Denkwerkzeug“ zur Verfügung.

Ein zweites großes Anwendungsfeld der Methode ist der Kontakt von rauhen Oberflächen. Auf diesem Gebiet können mit der Reduktionsmethode nicht alle Probleme gelöst werden, sondern *nur* die, die mit Kräften und relativen Verschiebungen zu tun haben. Hierzu gehören solche Größen wie Kontaktsteifigkeit, aber auch elektrische oder Wärmeleitfähigkeit und Reibungskräfte. Das Anwendungsgebiet ist also begrenzt, aber sehr breit und umfasst viele Problemstellungen von großer Bedeutung für das Ingenieurwesen. Auf dem Gebiet der Kontaktmechanik rauher Oberflächen gibt es keine exakten analytischen Lösungen, sodass wir zur Verifikation auf den Vergleich mit dreidimensionalen numerischen Lösungen angewiesen sind. Da wir die Methode der Dimensionsreduktion vor allem als ein Ingenieurwerkzeug verstehen, war es für uns sehr wichtig, ihre Anwendbarkeit sicherzustellen. Dafür wurden am Fachgebiet Systemdynamik und Reibungsphysik der Technischen Universität Berlin umfangreiche dreidimensionale Simulationen von rauhen Kontakten mit elastischen [4] und viskosen [5] Medien durchgeführt. Dabei haben wir das gesamte Spektrum von möglichen rauhen Oberflächen untersucht, die vom „weißen Rauschen“ bis zu glatten einzelnen Kontakten reichen (s. [Kap. 10](#)). In dieser gesamten Spanne der Oberflächenarten funktioniert die Methode entweder (asymptotisch) exakt oder mit sehr guter Näherung. Auch hierfür stellt das Buch Beweise zur Verfügung.

*Außerhalb* der Anwendbarkeit der Methode liegt die Abbildung der realen Kontaktfläche, welche mit der Methode der Dimensionsreduktion nur für sehr kleine Kontakte, nicht aber im allgemeinen Fall abbildbar ist [6].

Mit diesem Buch wollen wir die aus unserer Sicht extrem einfache, elegante und wirkungsvolle Methode vor allem den Praktikern vorstellen. Wir sind sicher, dass sie in der Zukunft einen direkten Zugang zu numerischen Simulationsmethoden finden wird.

Die künftige Hauptanwendung der Methode sehen wir nicht auf dem Gebiet, wo sie exakte Ergebnisse liefert, sondern auf dem Gebiet der Kontaktmechanik und Reibung von rauen Oberflächen. Der wichtigste Vorteil der Methode ist ihre enorme Schnelligkeit aufgrund der Eindimensionalität und der Unabhängigkeit der Freiheitsgrade. Sie erlaubt daher eine direkte Simulation von mehrskaligen Systemen, bei der sowohl die makroskopische Systemdynamik als auch die mikroskopische Kontaktmechanik in einem Modell vereint sind.

---

## 1.2 Methode der Dimensionsreduktion als Bindeglied zwischen Mikro- und Makroskala

Seit den klassischen Arbeiten von Bowden und Tabor [7] ist es allgemein anerkannt, dass die Oberflächenrauheit einen entscheidenden Einfluss auf tribologische Kontakte hat. Ohne die Rauheit hätten tribologische Kontakte völlig andere Eigenschaften. So wäre das Coulombsche Reibgesetz nicht mal annähernd gültig. Darüber hinaus wären die Adhäsionskräfte um viele Größenordnungen stärker als die, die man normalerweise in makroskopischen tribologischen Systemen beobachtet. Die Welt der atomar glatten Kontakte besitzt völlig andere Eigenschaften als die reale Welt der rauen Kontakte! Bereits in den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts wurde festgestellt, dass die Rauheit realer Oberflächen eine komplizierte, mehrskalige Struktur aufweist, die man mit dem Begriff „Fraktal“ charakterisieren kann. Viele technische Oberflächen (wie z. B. Bruchflächen, verschlissene Flächen oder Oberflächen, die durch gängige Herstellungsmethoden produziert werden) haben fraktale Eigenschaften, d. h. sie weisen Rauheit auf *allen* Skalen von der atomaren bis hin zur makroskopischen auf. Vor allem durch die Arbeiten von Archard [8] wurde klar, dass diese Fraktalität einen wesentlichen Einfluss auf die Eigenschaften realer Kontakte hat und die eigentliche Ursache für die annähernde Gültigkeit des Coulombschen Reibgesetzes ist. Kontaktmechanik und Reibung ist somit ein mehrskaliges Phänomen. Die mehrskalige Natur realer Kontakte wirft die Frage auf, mit welchen Methoden man *alle* relevanten Skalen eines dynamischen Systems berücksichtigen kann. Eine der Möglichkeiten besteht in der Aufteilung der Betrachtungsskalen in drei Bereiche: Mikro, Meso und Makro. Auf der makroskopischen Skala des Systems als Ganzes wird das System explizit mit einer der gängigen „Mono-Skalen-Methode“ (z. B. Finite Elemente) simuliert. Auf der kleinsten, mikroskopischen Skala gehen wir so vor, wie es bisher üblich war und definieren ein „mikroskopisches Reibgesetz“. Dieses kann entweder durch molekuldynamische Simulationen bestimmt werden oder auf empirischer Basis entstehen. Die Skalen zwischen „Mikro“ und „Makro“



müssen durch eine Methode überbrückt werden, welche diese Skalen mit ausreichender Genauigkeit abbildet und dabei nicht zu aufwendig ist, damit entsprechende Simulationen überhaupt durchführbar sind. Eine solche Methode könnte die in diesem Buch beschriebene Methode der Dimensionsreduktion sein.

---

### 1.3 Struktur des Buches

Die Methode der Dimensionsreduktion ist relativ neu. Das wichtigste Anliegen des Buches ist es, die Methode zunächst mal so klar und einfach zu präsentieren, dass ein breiter Kreis von Ingenieuren sowohl mit der Konstruktion der Methode als auch mit ihrer Anwendbarkeit in der Praxis bekannt gemacht wird. Diesem Ziel ist auch die Struktur des Buches untergeordnet.

Im [Kap. 2](#) werden die allgemeinen Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Methode diskutiert. Wer sich aber gleich ein Bild darüber machen möchte, was die Methode der Dimensionsreduktion ist und welche Möglichkeiten sie bietet, kann die Lektüre mit dem [Kap. 3](#) beginnen, in dem die grundlegenden Ideen und Handhabungsregeln der Methode formuliert und mit vielen Beispielen illustriert sind. Die im [Kap. 3](#) für das Normalkontaktproblem ohne Adhäsion formulierten Ideen werden im [Kap. 4](#) auf Kontakte mit Adhäsion verallgemeinert. Im [Kap. 5](#) folgt die Behandlung des Tangentialkontakts.

Die [Kap. 3](#), [4](#) und [5](#) behandeln zunächst nur axialsymmetrische Profile. Der Vorteil ist, dass man anhand dieser Profile die Funktionsweise der Methode am einfachsten verstehen und erlernen kann. Alle in diesen Kapiteln beschriebenen Methoden sind absolut *exakt*. Die rein mathematischen Beweise der Gültigkeit der Methode sind für uns sehr wichtig. Wir wollen aber einen Leser, der vor allem an der praktischen Anwendung der Methode interessiert ist, nicht gleich mit formal mathematischen Beweisen überschütten. Wer an den strengen Beweisen interessiert ist, wird sie in den Anlagen ([Kap. 17](#) und [18](#)) finden.

Auf [Kap. 6](#), das dem Rollkontakt gewidmet ist, folgt ein weiteres Kapitel, das einen zentralen Aspekt der Reduktionsmethode beschreibt: Im [Kap. 7](#) wird die Handhabung der Methode der Dimensionsreduktion bei der Anwendung auf Elastomere erläutert. Die Beweise sind wieder in eine Anlage ([Kap. 19](#)) ausgelagert. Auch bei diesem Kapitel handelt es sich um *exakte* Abbildungen von dreidimensionalen Systemen auf eindimensionale.

Neben rein mechanischen Eigenschaften kann die Methode der Dimensionsreduktion auch zur Beschreibung der elektrischen und Wärmeleitfähigkeit der Kontakte benutzt werden. Diese Aspekte werden im [Kap. 8](#) diskutiert.

In [Kap. 9](#) wird der Kontakt mit Elastomeren um Adhäsions-Effekte erweitert.

Die Kapitel, die den axialsymmetrischen Profilen gewidmet sind, sollen bei weitem nicht nur als eine Vorbereitung von komplizierteren Themen angesehen werden:

Axialsymmetrische Profile treten in der Technik sehr oft auf und sind von herausragender eigenständiger Bedeutung. Und dennoch liegt das Hauptanliegen der Methode in der Beschreibung von fraktalen rauen Oberflächen, mit der sich [Kap. 10](#) im Detail beschäftigt. Auch dieses Kapitel gehört zum Kern des Buches. Anders als bei axialsymmetrischen Profilen ist hier eine Verifikation der beschriebenen Methoden durch einen Vergleich mit analytischen Lösungen nicht möglich, da die letzteren nicht bekannt sind! Im Fall der rauen Oberflächen sind wir daher dem Weg eines Vergleichs mit numerischen Lösungen von entsprechenden dreidimensionalen Problemen gefolgt.

Im [Kap. 11](#) wird die Reibungssimulation mittels der Methode der Dimensionsreduktion begründet und veranschaulicht. Die [Kap. 12](#), [13](#), [14](#) und [15](#) dienen gleichzeitig als Fallstudien und Darbietungen zu wichtigen allgemeinen Themen. So wird im [Kap. 12](#) illustriert, dass auch die dynamischen Tangentialkontakte mit der Methode der Dimensionsreduktion exakt abgebildet werden. [Kap. 13](#) erläutert die wichtige Idee der „Hybridmodelle“. Bereits im vorhergehenden [Abschn. 1.2](#) haben wir argumentiert, dass es Bedarf gibt, zwischen der makroskopischen Systemdynamik und dem mikroskopischen Reibgesetz eine explizite, mehrskalige Kontaktmechanik einzuschleiben. Der mittlere Bereich wird von der Methode der Dimensionsreduktion übernommen. Damit aber die gesamte Konstruktion funktioniert, muss noch die Kopplung an die makroskopische Systemdynamik auf einer Seite und die Kopplung an die Mikroskala auf der anderen Seite gewährleistet werden. Im [Kap. 13](#) wird die Kopplung an die Makroskala beschrieben und mit einem Beispiel hinterlegt. Ein weiteres Fallbeispiel folgt im [Kap. 14](#). Einige Ideen zur Kopplung an die Mikroskala werden im [Kap. 15](#) besprochen. Das Thema ist aber noch weitgehend offen.

Da die Methode der Dimensionsreduktion vor allem ein praktisches Ingenieurwerkzeug ist, haben wir uns im [Kap. 16](#) erlaubt, einige Fragen hinsichtlich potenzieller Erweiterung und Vereinfachung der praktischen Anwendung der Methode zu diskutieren. Dabei haben wir uns auch in solche Gebiete gewagt, wie etwa plastische Deformation und Bruch, Beschreibung von nicht isotropen und nicht zufällig rauen Oberflächen oder von heterogenen Stoffen. Mit dem Kapitel möchten wir zeigen, dass die Methode der Dimensionsreduktion durchaus ein sehr großes Entwicklungspotential hat.

---

## Literatur

1. Popov, V.L.: Contact Mechanics and Friction. Physical Principles and Applications, 362 S. Springer (2010)
2. Heß, M.: Über die exakte Abbildung ausgewählter dreidimensionaler Kontakte auf Systeme mit niedrigerer räumlicher Dimension. Cuvillier-Verlag, Göttingen (2011)
3. Heß, M.: On the reduction method of dimensionality: the exact mapping of axisymmetric contact problems with and without adhesion. *Phys. Mesomech.* **15**, 264–269 (2012)
4. Pohrt, R., Popov, V.L., Filippov, A.E.: Normal contact stiffness of elastic solids with fractal rough surfaces for one- and three-dimensional systems. *Phys. Rev. E* **86**, 026710 (2012)

5. Kürschner, S., Popov, V.L.: Penetration of self-affine fractal rough rigid bodies into a model elastomer having a linear viscous rheology. *Phys. Rev. E* **87**, 042802 (2013)
6. Popov, V.L.: Method of reduction of dimensionality in contact and friction mechanics: a linkage between micro and macro scales. *Friction* **1**(1), 41–62 (2013)
7. Bowden, F.P., Tabor, D.: *The Friction and Lubrication of Solids*. Clarendon Press, Oxford (1986)
8. Archard, J.F.: Elastic deformation and the laws of friction. *Proc. R. Soc. A* **243**, 190 (1957)

---

# Separation der elastischen und der Trägheitseigenschaften in dreidimensionalen Systemen

# 2

Valentin L. Popov und Markus Heß

---

## 2.1 Einführung

Bei einer breiten Klasse von „typischen tribologischen Systemen“ gibt es eine Reihe von Eigenschaften, die eine wesentliche Vereinfachung des Kontaktproblems ermöglichen und auf diese Weise eine schnelle Berechnung von mehrskaligen Systemen gestatten. Diese vereinfachenden Eigenschaften, von denen in der Reduktionsmethode Gebrauch gemacht wird, sind:

- I. Separation der elastischen und der Trägheitseigenschaften in dreidimensionalen Systemen
- II. Eine enge Analogie zwischen dreidimensionalen Kontakten und bestimmten eindimensionalen Problemen.

Die erste Eigenschaft wird in diesem Kapitel besprochen, während der zweiten weitere Kapitel gewidmet sind. Die erste Eigenschaft kann in Form von drei Sätzen formuliert werden:

- (a) Für ausreichend kleine Geschwindigkeiten können Deformationen als quasistatisch behandelt werden;
- (b) Die potentielle Energie und somit die Kraft-Verschiebungsverhältnisse sind *lokale* Eigenschaften, die nur von der Konfiguration des Kontaktgebietes, nicht aber von der Form und Größe des Körpers als Ganzes abhängen;
- (c) Die kinetische Energie dagegen ist eine „globale Eigenschaft“, die nur von der Form und Größe des Körpers als Ganzes, nicht aber von der Konfiguration der Mikrokontakte abhängt.

Die drei aufgezählten Eigenschaften sind in vielen makroskopischen tribologischen Systemen erfüllt. Unten betrachten wir sie einzeln im Detail.

## 2.2 Quasistationarität

Die Separation der elastischen und der Trägheitseigenschaften gilt nur unter der Bedingung, dass die charakteristische Beanspruchungszeit  $T$  eines Kontaktgebietes viel größer ist, als die Zeit, die elastische Wellen im Kontinuum benötigen, um eine Strecke von der Größenordnung des Durchmessers  $D$  des Kontaktgebietes zurückzulegen:

$$T > D/c, \quad (2.1)$$

wobei  $c$  die Schallgeschwindigkeit ist. Beispielsweise sind für einen Rad-Schiene-Kontakt Kraftänderungen mit der charakteristischen Zeit größer als  $T = 1 \text{ cm} / (5 \cdot 10^3 \text{ m/s}) = 2 \cdot 10^{-6} \text{ s}$  (bzw. Frequenzen kleiner 500 kHz) als quasistatisch zu betrachten. Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Deformation in der Nähe des Kontaktgebietes praktisch dieselbe wie im statischen Kontakt. Das gilt dann natürlich auch für die Kontaktkräfte.

Genügt die charakteristische Zeit einer noch stärkeren Bedingung

$$T > R/c, \quad (2.2)$$

wobei  $R$  die Größe des Gesamtsystems ist, so bewegen sich alle Teile des Kontinuums, mit Ausnahme eines kleinen Volumens in der Nähe des Kontaktes, als starrer Körper. Die Bedingung (2.2) bedeutet mit anderen Worten, dass die charakteristische Kontaktzeit viel größer ist als die Periode der Grundschwingung des Systems. Für einen Rad-Schiene-Kontakt ist diese Bedingung für Frequenzen unterhalb von ca. 2 kHz erfüllt.

Wenn wir bei dem Beispiel eines rollenden Rades bleiben, dann kann die charakteristische Kontaktzeit mit  $T \approx D/v$  abgeschätzt werden, wobei  $v$  die Fahrgeschwindigkeit ist. Die Bedingung für die Quasistationarität des Kontaktes bedeutet dann einfach

$$v < c. \quad (2.3)$$

Bei einem rauen Kontakt mit charakteristischer Wellenlänge  $\lambda$  ist die charakteristische Zeit  $T \approx \lambda/v$ , so dass die Bedingung für die Quasistationarität viel einschränkender ist:  $\lambda/v > D/c$  oder

$$v < c \frac{\lambda}{D}. \quad (2.4)$$

In den meisten tribologischen Systemen haben wir es mit Bewegungen von Bauteilen zu tun, deren Relativgeschwindigkeit (z. B. bei einem Zug von der Größenordnung 50 m/s) um viele Größenordnungen kleiner ist als die Schallgeschwindigkeit (für Stahl ca.  $5 \cdot 10^3 \text{ m/s}$ ). Unter diesen Bedingungen kann man das Kontaktproblem selbst dann als *quasistatisch* betrachten, wenn man an Wellenlängen der Rauheit interessiert ist, die um ca. zwei Größenordnungen kleiner sind als der Durchmesser des Kontaktgebietes.

## 2.3 Elastische Energie als lokale Eigenschaft

Elastische Wechselwirkungen sind lokal in dem Sinne, dass sie sich nur in einem Volumen von der Größenordnung des Durchmessers des Kontaktgebietes abspielen und somit von der Größe und der Form des Körpers als Ganzes nicht abhängen. Untersuchen wir diese Eigenschaft etwas näher, indem wir die potentielle Energie eines deformierten Kontaktgebietes berechnen. Betrachten wir einen zylindrischen Stempel, der in den Körper um  $d$  eingedrückt wurde (Abb. 2.1).

Für die Verschiebung im elastischen Körper in großer Entfernung  $r$  vom Punkt der Indentierung gilt

$$u \approx \frac{D \cdot d}{r}. \quad (2.5)$$

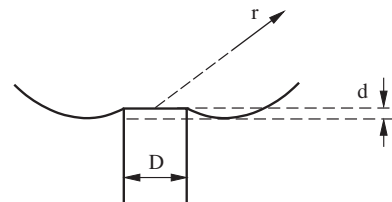
Die Deformation kann abgeschätzt werden zu  $\varepsilon \approx \frac{du}{dr} \approx -\frac{D \cdot d}{r^2}$  und die Energiedichte zu  $E \approx \frac{1}{2} G \varepsilon^2 \approx \frac{1}{2} G \frac{D^2 \cdot d^2}{r^4}$ . Für die elastische Energie ergibt sich durch Integration

$$U \simeq \int G \frac{D^2 \cdot d^2}{r^4} \pi r^2 dr = \pi G D^2 \cdot d^2 \int \frac{dr}{r^2}. \quad (2.6)$$

Dieses Integral konvergiert an der oberen Grenze (diese kann daher unendlich gewählt werden) und divergiert an der unteren Grenze. Da aber die Asymptote (2.5) nur für  $r > D$  gilt, wird die elastische Energie durch Deformationen in einem Volumen mit der linearen Abmessung von der Größenordnung  $D$  dominiert. Mit anderen Worten: Die elastische Energie ist eine lokale Größe, die nur von der Konfiguration und Deformation in der Nähe des Mikrokontaktes abhängt. Die Größe und Form des makroskopischen Körpers ist für die Kontaktmechanik dieses Problems bedeutungslos.

Diese Eigenschaft ist übrigens nicht selbstverständlich und würde zum Beispiel in zweidimensionalen Systemen nicht gelten. Im zweidimensionalen Fall hätten wir statt (2.6) das Integral  $\int dr/r$ , welches an beiden Grenzen logarithmisch divergiert. Die elastische Kontaktenergie hängt daher im zweidimensionalen Fall sowohl von der Kontaktkonfiguration als auch von der Größe und der Form des Körpers ab.

**Abb. 2.1** Flacher zylindrischer Stempel, welcher um  $d$  in einen elastischen Halbraum eingedrückt wurde



## 2.4 Kinetische Energie als globale Eigenschaft

Genau umgekehrt steht es mit der kinetischen Energie des Körpers. Zur Illustration dieser Eigenschaft betrachten wir eine Kugel, die auf einen Stempel mit dem Durchmesser  $D$  (der Kontaktradius bleibt somit konstant) mit einer Geschwindigkeit  $v$  stößt (Abb. 2.2).

Wir nehmen an, dass die Bedingung (2.2) erfüllt ist, so dass die elastische Deformation im gesamten Körper als quasistatisch betrachtet werden kann. Wählen wir als verallgemeinerte Koordinaten der Kugel die Koordinate ihres Schwerpunktes  $x$  und die Koordinate des Kontaktpunktes  $\xi$ . Die Eindringtiefe ist somit gleich

$$d = x - \xi + R. \quad (2.7)$$

Die potentielle Energie der Kugel ist eine Funktion der Eindringtiefe:

$$U = \frac{kd^2}{2} = \frac{k}{2} (x - \xi + R)^2, \quad (2.8)$$

wobei  $k = E^*D$ . Das Geschwindigkeitsfeld bei einer quasistatischen Indentierung erhält man aus (2.5) durch Ableitung der Indentierungstiefe nach der Zeit:

$$\dot{u} \approx \frac{D \cdot \dot{d}}{r} = \frac{D \cdot (\dot{x} - \dot{\xi})}{r}. \quad (2.9)$$

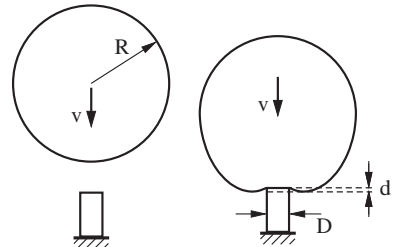
Die kinetische Energie setzt sich aus der kinetischen Energie der Schwerpunktbewegung und der kinetischen Energie der Deformation im Schwerpunktsystem zusammen:

$$K = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\rho}{2} (\dot{x} - \dot{\xi})^2 \int \left(\frac{D}{r}\right)^2 dV = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m_1}{2} (\dot{x} - \dot{\xi})^2 \quad (2.10)$$

mit

$$m_1 \approx \rho D^2 \int \left(\frac{1}{r}\right)^2 2\pi r^2 dr = 2\pi\rho D^2 R \approx m \left(\frac{D}{R}\right)^2. \quad (2.11)$$

**Abb. 2.2** Zur kinetischen Energie eines elastischen Festkörpers, welcher mit der Geschwindigkeit  $v$  auf einen starren zylindrischen Stempel trifft



Eine genauere Herleitung führt für Stoffe mit  $\nu = 1/3$  zum Ergebnis  $m_1 \approx 0.3m (D/R)^2$  (s. Aufgabe 3 zu diesem Kapitel). Zu bemerken ist, dass diese Masse die gleiche Größenordnung hat, wie die Masse eines Stabes mit dem Durchmesser  $D$  und der Länge  $R$ .

Die Separation der elastischen und der Trägheitseigenschaften und deren Genauigkeit wollen wir mit einigen konkreten dynamischen Beispielen illustrieren. Als Grundlage für die dynamische Behandlung dient die Lagrange-Funktion des Systems, die als Differenz der kinetischen Energie (2.10) und der potentiellen Energie (2.8) berechnet wird:

$$L = K - U = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m_1}{2} (\dot{x} - \dot{\xi})^2 - \frac{k}{2} (x - \xi + R)^2 = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m_1}{2} (\dot{x} - \dot{\zeta})^2 - \frac{k}{2} (x - \zeta)^2, \quad (2.12)$$

wobei wir eine neue Variable  $\zeta = \xi - R$  eingeführt haben.

Betrachten wir drei Fälle:

- I. *Zusammenstoß des Körpers mit einem starren, festgehaltenem Stempel.* In diesem Fall gilt während der gesamten Zeit des Stoßes  $\zeta = 0$  und die Lagrangefunktion nimmt die Form

$$L = \frac{(m + m_1)\dot{x}^2}{2} - \frac{k}{2}x^2 \quad (2.13)$$

an. Das System ist somit äquivalent zu einem starren Körper mit der Masse  $(m + m_1)$  auf einer Feder mit der Steifigkeit  $k$ , die gleich der statischen Kontaktsteifigkeit ist (Abb. 2.3). Die Massenkorrektur  $m_1$  ist von der Größenordnung  $m (D/R)^2$  und kann bei kleinen Kontaktdurchmessern vernachlässigt werden.

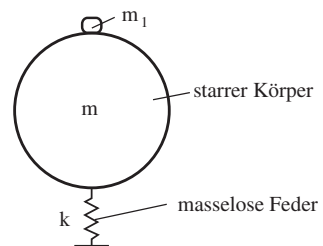
- II. *„Fußpunkterregung“.* Nehmen wir jetzt an, dass die Koordinate des Kontaktgebietes und somit auch die Koordinate  $\zeta$  eine vorgegebene Funktion der Zeit ist:  $\zeta = \zeta(t)$ . Die Lagrangefunktion ist dann gleich

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m_1}{2} (\dot{x} - \dot{\zeta}(t))^2 - \frac{k}{2} (x - \zeta(t))^2 \quad (2.14)$$

und die Lagrangegleichung für die Schwerpunktkoordinate lautet

$$(m + m_1)\ddot{x} + kx = k\zeta(t) + m_1\ddot{\zeta}(t) = \Delta F_N(t). \quad (2.15)$$

**Abb. 2.3** Ersatzmodell für den Zusammenstoß einer Kugel und einer starren Ebene





Das Beschleunigungsglied auf der rechten Seite dieser Gleichung hat die Größenordnung  $m_1 \zeta / T^2$ . In dem Gültigkeitsbereich der Bedingung (2.2) gilt

$$\frac{m_1}{T^2} \zeta < \frac{m_1 c^2}{R^2} \zeta \approx \frac{m c^2 D^2}{2R^4} \zeta = k \frac{m c^2 D^2}{2kR^4} \zeta \approx k \frac{2\pi R^3 \rho c^2 D^2}{EDR^4} \zeta = k \frac{2\pi D}{R} \zeta \ll k \zeta, \quad (2.16)$$

wobei wir von der Beziehung  $c^2 = E/\rho$  Gebrauch gemacht haben. Bei kleinen Kontaktdurchmessern kann daher der Beschleunigungsbeitrag verglichen mit dem elastischen Beitrag immer vernachlässigt werden. Wie auch im ersten Fall kann das System bei ausreichend kleinen Kontaktdurchmessern als ein starrer Körper mit der Masse  $m$ , versehen mit einer statischen Steifigkeit, modelliert werden (siehe Abb. 2.4).

III. *Freie Schwingung der Oberfläche.* Wird der Körper am Außenrand festgehalten und ein Kontaktgebiet mit dem Durchmesser  $D$  eingedrückt und freigelassen, so erhalten wir die Lagrangefunktion, indem wir in (2.12)  $x = 0$  setzen:

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\zeta}^2 - \frac{k}{2} \zeta^2. \quad (2.17)$$

Die Bewegung der Oberfläche wäre demnach eine Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega_1$ :

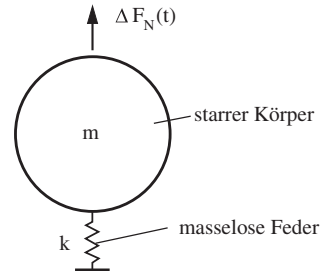
$$\omega_1^2 = \frac{k}{m_1} \approx \frac{ED}{2\pi \rho D^2 R} \approx \frac{c^2}{2\pi DR}. \quad (2.18)$$

Diese Kreisfrequenz ist aber viel größer als die Eigenkreisfrequenz des Körpers  $\omega_0^2 \approx c^2/R^2$ . Daher ist die Bedingung für die Gültigkeit der Lagrangefunktion (2.17) nicht erfüllt: Eigenschwingungen der freien Oberfläche können daher im Rahmen dieser Näherung *nicht* behandelt werden.

Ändert sich der Kontaktdurchmesser mit der Eindringtiefe, so muss in der Lagrangefunktion die entsprechende potentielle Energie des Kontaktes  $U(d)$  benutzt werden:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m_1(t)}{2} (\dot{x} - \dot{\zeta})^2 - U(x - \zeta), \quad (2.19)$$

**Abb. 2.4** Ersatzmodell eines instationären Kontaktes (z. B. einer rollenden Kugel auf einer rauen Unterlage)



wobei nach wie vor

$$m_1 \approx \frac{m}{2} \left( \frac{D(t)}{R} \right)^2. \quad (2.20)$$

Wie oben erläutert, kann das zweite Glied in (2.19) in dem Gültigkeitsbereich der Gl. (2.19), d. h. bei Erfüllung der Bedingung (2.2), immer vernachlässigt werden. Daraus resultiert ein Ersatzmodell, welches in Abb. 2.5 dargestellt ist.

Nun gilt unser Interesse der Verfahrensweise bei instationären Kraftwirkungen auf ein kleines Kontaktgebiet. Als Beispiel betrachten wir dazu eine raue Kugel, die auf einer ebenfalls rauhen, aber im Mittel ebenen, starren Oberfläche rollt, so dass die potentielle Energie nicht nur eine Funktion der Eindrücktiefe, sondern auch eine explizite Funktion der Zeit ist

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m_1(t)}{2} (\dot{x} - \dot{\zeta})^2 - U(x - \zeta, t). \quad (2.21)$$

Da das Rollen auf einer starren Ebene erfolgt, ist  $\zeta = 0$  und die Lagrangefunktion nimmt die Form

$$L \approx \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x, t) \quad (2.22)$$

an, wobei wir die Korrektur zur Masse vernachlässigt haben. Die zugehörige Lagrange-gleichung lautet dann

$$m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_N(x, t). \quad (2.23)$$

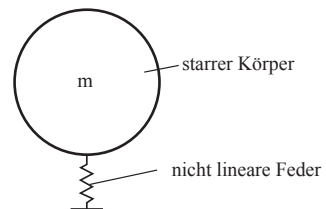
Das System ist in diesem Fall äquivalent zu einem starren Körper, auf den die zeitabhängige Kontaktkraft wirkt. Falls es möglich ist, die Kraft in einen Teil für den „glatten Kontakt“ und einen stochastischen Anteil gemäß

$$F_N(x, t) = F_{N,0}(x) + \Delta F_N(t) \quad (2.24)$$

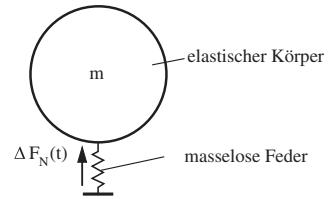
aufzuteilen, so nimmt die Bewegungsgleichung die Form

$$m\ddot{x} = F_{N,0}(x) + \Delta F_N(t) \quad (2.25)$$

**Abb. 2.5** Dynamisches Ersatzmodell für einen nicht linearen (z. B. Hertzschen) Kontakt



**Abb. 2.6** Ersatzmodell im Fall von hochfrequenten Kontaktkräften, bei denen die Bedingung (2.2) verletzt ist, aber die schwächere Bedingung (2.1) noch erfüllt



an. Diese Gleichung beschreibt eine starre Masse  $m$ , gekoppelt an die Ebene mit der nicht linearen Kontaktkraft  $F_{N,0}(x)$  unter der Wirkung der erregenden Kraft  $\Delta F_N(t)$ . Das entsprechende Ersatzmodell gleicht jenem aus Abb. 2.4, nur mit dem Unterschied, dass eine nicht lineare Feder zum Einsatz kommt.

Ist die Bedingung (2.2) nicht erfüllt, die Bedingung (2.1) aber immer noch gültig, so kann der Körper nicht mehr als eine starre Masse behandelt werden; für die Kontaktkräfte können aber nach wie vor die statischen Gleichungen benutzt werden. In diesem Fall kann ein einfaches Ersatzmodell nicht angegeben werden, da die vollständige Dynamik des elastischen Körpers zu untersuchen ist. Das Kontaktproblem bleibt aber dennoch quasistatisch und stellt eine Randbedingung für das elastische Problem dar (Abb. 2.6). Ein Beispiel einer solchen dynamischen Betrachtung ist in der Aufgabe 4 gegeben.

## Aufgaben

**Aufgabe 1:** Man bestimme die Kontaktzeit einer mit einer starren Wand zusammenstoßenden elastischen Kugel (Radius  $R$ ) (Hertz 1881, [1]).

### Lösung:

Die Annäherung der Kugel zur Wand ab dem ersten Kontakt bezeichnen wir mit  $x$ . Die potentielle Energie des Systems ist durch  $U = (8/15)E^*R^{1/2}d^{5/2}$  gegeben,<sup>1</sup> während die kinetische Energie derjenigen einer starren Masse gleich ist. Während der Stoßzeit bleibt die Energie erhalten:

$$\frac{m}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{8}{15} E^* R^{1/2} x^{5/2} = \frac{mv_0^2}{2}. \quad (2.26)$$

Die maximale Annäherung der Kugel und der Wand  $x_0$  entspricht dem Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeit  $dx/dt$  verschwindet, und ist gleich

$$x_0 = \left( \frac{15}{16} \frac{mv_0^2}{E^* R^{1/2}} \right)^{2/5}. \quad (2.27)$$

<sup>1</sup> Definitionen der Materialparameter s. nächstes Kapitel.