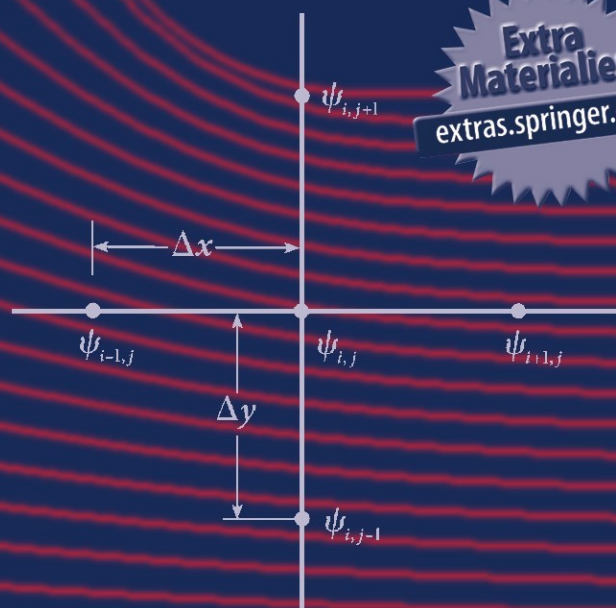


Helmut Martin

Numerische Strömungssimulation in der Hydrodynamik

Grundlagen und Methoden



**Extra
Materialien**
extras.springer.com

Numerische Strömungssimulation in der Hydrodynamik

Helmut Martin

Numerische Strömungssimulation in der Hydrodynamik

Grundlagen und Methoden

 Springer

Helmut Martin
Zur Schafstränke 15
01705 Freital
Deutschland
helmut.martin@tu-dresden.de

Ergänzendes Material zu diesem Buch finden Sie auf <http://extra.springer.com>.

ISBN 978-3-642-17207-6 e-ISBN 978-3-642-17208-3

DOI 10.1007/978-3-642-17208-3

Springer Heidelberg Dordrecht London New York

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2011

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Das Buch wendet sich an Ingenieure und Studenten, die einen Einstieg in die numerische Strömungssimulation in der Hydrodynamik suchen und über eine Grundausbildung in Hydromechanik und Ingenieurmathematik verfügen.

Nach einem kurzen Überblick über die Methoden der numerischen Strömungssimulation werden im Teil I Grundlagen und Grundgleichungen der Strömungsmechanik formuliert, während im Teil II ausgewählte Methoden, wie die Finite-Element-Methode, das Galerkin-Verfahren, die Finite-Volumen-Methode und Finite-Element-Methode anhand von Beispielen aus der Hydrodynamik erläutert werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Finite-Element-Methode, die aus den mathematischen Formulierungen der Differentialgleichungen abgeleitet werden kann und sich daher für einen Einstieg in die numerische Strömungssimulation am besten eignet.

Bei der Darstellung der numerischen Methoden wird keine Vollständigkeit angestrebt. Es wird vielmehr versucht, durch die Auswahl der Methoden und Beispiele sowie durch eine ausführliche Beschreibung der Zusammenhänge mit vielen Zwischenschritten eine „aufsteigende Wissenslinie“ darzustellen. Es wird empfohlen, im Anschluss an einzelne Kapitel des Teiles I die entsprechenden Methoden und Beispiele des Teiles II zu studieren.

Dem Buch wurden vier lauffähige Programme beigelegt, mit denen Beispiele im Buch gelöst und bearbeitet werden können. Die Programme ermöglichen den Einstieg in die numerische Strömungsmechanik mit einer modernen Programmiersprache zu verbinden.

Die Programme stehen dem Leser in der Download-Plattform unter <http://extras.springer.com> zur Verfügung.

Der Autor dankt Herrn Dipl.-Inf. André Martin für die umfassende Unterstützung bei der Erstellung der beigelegten Programme.

Dem Springer-Verlag sei für die Unterstützung sowie für die freundliche und hilfsbereite Zusammenarbeit gedankt.

Korrekturen und Hinweise sind jederzeit willkommen.

im Januar 2011
Dresden

Helmut Martin

Inhalt

Teil I Grundlagen und Grundgleichungen der Strömungsmechanik

1 Einführung	3
2 Hydromechanische Grundlagen	7
2.1 Transportbilanz am Raumelement	7
2.1.1 Allgemeine Transportbilanz	7
2.1.2 Spezifische Transportbilanzen	9
2.2 Dynamische und kinematische Wirkungen im Strömungsraum	12
2.2.1 Normal- und Schubspannungen	12
2.2.2 Verträglichkeitsbedingungen	14
2.2.3 Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verformungszustand	16
2.2.4 Bewegungsgleichungen	20
2.2.5 Wirbelbewegung	21
2.3 Interpretation und Anwendung der Bewegungsgleichungen	23
2.4 Zweidimensionale, reibungsfreie Strömung	25
2.5 Zweidimensionale, viskose Strömung	28
2.6 Nichtstationäre Strömungen – Oberflächenwellen	30
2.6.1 Entwicklung der Grundgleichungen der Flachwassertheorie	33
2.6.2 Eindimensionale Flachwassertheorie	35
2.6.3 Einfache Welle	40
2.6.4 Wellengeschwindigkeit in einem beliebig geformten Gerinnequerschnitt	43
2.6.5 Ableitung der Saint-Venant-Gleichungen	44
3 Grundlagen der Turbulenz	49
3.1 Einführung in die Turbulenz	49
3.1.1 Kennzeichnung der Problematik	49
3.1.2 Die Entwicklung der Ansätze zur Beschreibung der turbulenten Bewegung	51
3.1.3 Diskretisierung des Strömungsgebietes	52

3.2	Mittelwerte und Schwankungsgrößen	53
3.3	Mittelung der Grundgleichungen	54
3.3.1	Ableitung der Reynoldsgleichung	54
3.3.2	Gemittelte Gleichung für den Fremdstoff- und Energietransport	55
3.3.3	Gemittelte Grundgleichungen in Tensorschreibweise	55
3.4	Tiefen-gemittelte Grundgleichungen für Strömungen mit freier Oberfläche	58
4	Turbulenzmodelle	61
4.1	Einordnung der Berechnungsmodelle – Übersicht	61
4.2	Turbulenzparameter	62
4.2.1	Wirbelviskosität	62
4.2.2	Wirbeldiffusivität	63
4.2.3	Prandtlscher Mischungsweg	63
4.2.4	Turbulente kinetische Energie	64
4.3	Das k- ϵ -Modell	64
4.3.1	Definition der Modellparameter	64
4.3.2	Modellgleichungen	65
4.3.3	Randbedingungen	66
4.3.4	Anwendungen	67
 Teil II Methoden der numerischen Strömungssimulation		
5	Einführung in den Teil II	71
6	Finite-Differenzen-Methode	73
6.1	Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung	73
6.2	Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung	75
6.3	Ungleichförmige Netze	76
6.4	Partielle Differentialgleichungen	77
6.5	Beispiel 1: Couette-Strömung mit veränderlicher Viskosität	79
6.5.1	Finite-Differenzen-Gleichung	81
6.5.2	Lösung linearer Gleichungssysteme	82
6.5.3	Vergleich der exakten Lösung mit den numerischen Ergebnissen	92
6.6	Beispiel 2: Numerische Lösung der Laplace-Gleichung	93
6.6.1	Finite-Differenzen-Formulierung	93
6.6.2	Diskretisierung	95
6.6.3	Numerische Lösung	97
6.7	Zweidimensionale viskose Strömungen	102
6.7.1	Finite-Differenzen-Formulierungen für den Vektor der Wirbelintensität	102
6.7.2	Druck-Geschwindigkeits-Formulierungen für die viskose Strömung	105

6.7.3	Eindimensionale viskose Strömung in einem Strömungskanal mit veränderlichem Querschnitt	105
6.7.4	Beispiel 3: Viskose Strömung in einer konischen Rohrleitung	108
6.8	Instationäre eindimensionale Strömungen	115
6.8.1	Grundgleichungen für eine beliebige Querschnittsform	115
6.8.2	Numerische Lösung mit der Charakteristikentheorie	117
6.8.3	Explizite Finite-Differenzen-Methode	119
6.8.4	Implizite Finite-Differenzen-Methode	121
6.8.5	Lösung durch parametrische Gruppierung	124
6.8.6	Beispiel 4: Instationäre Wasserbewegung in einem Kanalabschnitt	128
7	Galerkin-Methode	133
7.1	Kennzeichnung der Methode	133
7.2	Beispiel 5: Geschwindigkeitsprofil der zähen Spaltströmung mit der Galerkin-Methode	134
8	Finite-Volumen-Methode	141
8.1	Beschreibung der Finite-Volumen-Methode	141
8.2	Beispiel 5: Diffusion	142
8.3	Diskrete Gebietszerlegung zur Bildung der Kontrollvolumina	145
8.4	Dualität der Voronoi- und der Delaunay-Zerlegung	146
8.5	Voronoi-Region als Kontrollvolumen	148
8.6	Approximation der Integration der Grundgleichungen	149
8.6.1	Diffusionsterm	149
8.6.2	Advektionsterm	150
8.7	Numerische Stabilität	151
9	Finite-Element-Methode	153
9.1	Diskretisierung	153
9.2	Ansatz- und Gewichtsfunktionen	155
9.3	Beispiel 5: Ermittlung des Geschwindigkeitsprofils der zähen Spaltströmung mit der Finite-Element-Methode	156
10	Hinweise zu den Visual C#-Programmen	163
Anhang		165
Anhang 1:	Störungsverfahren zur Entwicklung der Flachwassergleichungen	165
Anhang 2:	Thomas-Algorithmus	170
Anhang 3/1:	Tabelle der Werte der Stromlinien-Funktion im Beispiel 2	171
Anhang 3/2:	Tabelle der Werte der Stromlinien-Funktion im Beispiel 2	172
Anhang 4:	Verlauf der Stromlinien im Beispiel 2	173
Anhang 5:	Druckkoeffizienten C_p im Beispiel 2	174

Anhang 6/1: Variablen nach dem 1. Iterationsschritt im Beispiel 3	175
Anhang 6/2: Variablen nach dem 15. Iterationsschritt im Beispiel 3	176
Anhang 7/1: Anfangswerte der Variablen im Beispiel 4	177
Anhang 7/2: Ergebnisse und Wasserspiegellage im Kanal nach 15,7 s im Beispiel 4	178
Literatur	179
Sachverzeichnis	181

Symbolverzeichnis

(Es werden nur bevorzugt verwendete Symbole zusammengestellt)

a_x, a_y, a_z (m/s ²)	Komponenten der Massenbeschleunigung
v_x, v_y, v_z (m/s)	Geschwindigkeitskomponenten (v_1, v_2, v_3)
w_x, w_y, w_z (s ⁻¹)	Komponenten des Wirbelvektors
$\vec{a}$	Massenbeschleunigung
$\vec{r}$	Ortsvektor
$\vec{v}$	Geschwindigkeitsvektor
$\vec{w}$	Wirbelvektor
β (–)	volumetrischer Ausdehnungskoeffizient
γ (rad)	Winkeländerung
δ	Diffusität (Konstante) c/ρ
ε (–)	Dehnung
ε (m ² /s)	Wirbelviskosität
ε (m ² /s)	Dissipationsrate
η (Pa s)	dynamische Viskosität
λ (–)	Widerstandszahl
μ (–)	Querdehnungszahl
ν (m ² /s)	kinematische Viskosität
ρ (kg/m ³)	Dichte
σ (N/m ²)	Normalspannung
τ (N/m ²)	Schubspannung
Φ (m ² /s)	Potenzialfunktion
Γ (m ² /s)	Wirbeldiffusität
Γ	auf die Geschwindigkeit bezogene Transportgröße durch eine Fläche
A (m ²)	Fläche
c	Konstante im Fick'schen Gesetz
C	skalare Größe des Fremdstoffes (z. B. Konzentration)
e (–)	Volumendilatation
E (N/m ²)	Elastizitätsmodul
F (N)	Kraft

$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	Erdbeschleunigung
$G \text{ (N/m}^2\text{)}$	Schubmodul
$h \text{ (m)}$	Wassertiefe
I	tiefengemittelter Wärme- oder Stofffluss
$k \text{ (m}^2\text{/s}^2\text{)}$	Größe der turbulenten kinetischen Energie, bezogen auf die Einheit der Masse
$l_m \text{ (m)}$	Mischungsweglänge
$p \text{ (N/m}^2\text{)}$	Flüssigkeitsdruck
q_s	mittlerer Wärmefluss bzw. Stofffluss durch die Oberfläche
$Q \text{ (m}^3\text{/s)}$	Durchfluss
$r_{hy} \text{ (m)}$	hydraulischer Radius
$S \text{ (-)}$	Sohlgefälle
$S_R \text{ (-)}$	Energieliniengefälle
$t \text{ (s)}$	Zeit
$T \text{ (s)}$	Zeitdauer
$U \text{ (m)}$	benetzter Umfang
$u, v, w \text{ (m)}$	Verschiebungskomponenten
$V \text{ (m}^3\text{)}$	Volumen
$x, y, z \text{ (m)}$	Koordinatenrichtungen
$z_b \text{ (m)}$	geodätische Höhe über Bezugshorizont
$Cr \text{ (-)}$	Courantzahl
$Ne \text{ (-)}$	Neumannzahl
$Pe \text{ (-)}$	Pecletzahl
$Re \text{ (-)}$	Reynoldszahl

Teil I

**Grundlagen und Grundgleichungen
der Strömungsmechanik**

Kapitel 1

Einführung

Die Strömungssimulation hat in den letzten Jahrzehnten eine grandiose Entwicklung genommen, die auf die immer leistungsfähiger werdende Computertechnik, auf die Ausgestaltung und Erweiterung der numerischen Lösungsmethoden sowie auf die Fortschritte in der Turbulenzmodellierung zurückzuführen ist. Während vor ca. 20 Jahren noch Programme zur Lösung der 3-dimensionalen Eulergleichungen geschrieben wurden, steht heute eine Reihe von erprobten und robusten Programmpaketen zur Verfügung, mit der die auf ein spezielles hydrodynamisches Problem angewandten Erhaltungssätze ausgewertet werden können. Einfache Probleme können auf Highend-PCs in wenigen Minuten gelöst werden, während komplizierte 3D-Probleme mitunter selbst auf Großrechnern kaum zu lösen sind.

Die Basis aller Methoden der numerischen Strömungsmechanik ist die Diskretisierung der mathematischen Formulierungen der Erhaltungssätze und ihrer Randbedingungen auf einem Rechengitter. Dabei haben sich folgende Lösungsmethoden bewährt:

- Finite-Differenzen-Methode (FDM)
- Finite-Volumen-Methode (FVM)
- Finite-Elemente-Methode (FEM)
- Spektral-Elemente-Methode (SEM)
- Lattice-Boltzmann-Methode (LBM)
- Smoothed-Particle Hydrodynamics (SPH)
- Boundary Element Method (BEM)

Trotz großer Fortschritte in der experimentellen Erforschung und theoretischen Beschreibung der turbulenten Strömungen, die insbesondere seit dem ersten von Ludwig Prandtl im Jahre 1925 formulierten Turbulenzmodell- der Mischungsweg-Hypothese- erreicht wurden, gibt es bei der numerischen Strömungssimulation der turbulenten Strömungen noch viele offene Fragen. Entweder verwendet man sehr feine Rechengitter wie bei der Direkten Numerischen Simulation (DNS) oder man verwendet mehr oder weniger empirische Turbulenzmodelle, bei denen neben numerischen Fehlern zusätzliche Modellierungsfehler auftreten.

Die Erfahrung mit Turbulenzmodellen hat gezeigt, dass die algebraischen und Reynoldsspannungsmodelle im Allgemeinen realistischere Ergebnisse liefern als

Wirbelviskositätsmodelle. Die dabei erzielten Verbesserungen müssen jedoch mit größeren numerischen Schwierigkeiten und Instabilitäten erkaufte werden, so dass nach wie vor die Wirbelviskositätsmodelle eine dominierende Stellung einnehmen.

Trotz der gekennzeichneten Probleme sind die Fortschritte in der numerischen Strömungssimulation (Computational Fluid Dynamics) evident. Die Strömungssimulation liefert Erkenntnisse über Strömungsvorgänge, die experimentell nicht oder nur mit großem Aufwand gewonnen werden können. Sie reduziert Entwicklungskosten und ermöglicht die notwendige Versuchstechnik zielgerichtet zu handhaben.

Die numerische Strömungssimulation ist daher in der technischen und industriellen Entwicklung eine etablierte Methode, die in den letzten Jahrzehnten zunehmend auch auf dem Gebiet des Wasserbaues für die Vorausberechnung von Strömungsvorgängen und ihre Auswirkungen bei unterschiedlichen Randbedingungen herangezogen wird.

Zurzeit lassen sich in dieser Hinsicht zwei Entwicklungsrichtungen erkennen:

1. das große Gebiet der Simulation der Gerinneströmungen, die meistens als 1D- oder 2D-Modelle auf der Grundlage der Flachwasser- bzw. der de-Saint-Venant-Gleichungen erfolgen
2. Simulation von Strömungsprozessen mit komplizierten Randbedingungen, die meistens als 3D-Modelle auf der Grundlage der Navier-Stokes- bzw. Reynolds-gleichungen und der Turbulenzmodelle ausgeführt werden.

Mit der Simulation von Gerinneströmungen können vor allem hydraulisch-hydrologische Fragestellungen bearbeitet werden. Dabei zeichnet sich ab, dass das Modell der instationären Grundgleichungen mit anderen Modellen, wie z. B. mit Steuerungsstrategien von Betriebsanlagen, Sedimenttransportmodellen, Bruch-szenarien von Stauwänden, Modellen für die Beeinflussung der Strömung durch Buhnen und Krümmungen, Gezeitenmodellen, ökologische Modellkomponenten und „decision support systems“, verbunden wird.

Bemerkenswert ist, dass durch die Kombination des Grundmodells mit implementierten Niederschlag-Abfluss-Modellen und einer Online-Korrektur durch nachgeführte Messwerte sowie mit Steuerstrategien und Optimierungsmodule optimierte Betriebsstrategien für den Echtzeitbetrieb entwickelt werden können. Solche Modelle eignen sich auch besonders als Trainings- und Schulungssimulatoren, um kritische Systemzustände erfolgreich zu beherrschen.

Bei der 3D-Simulation der Strömungsprozesse auf der Grundlage von Erhaltungsgleichungen und Turbulenzmodellen wird das sog. $k-\epsilon$ -Modell vermutlich am meisten verwendet. Dabei stellt die Simulation der freien Wasseroberfläche immer noch eine spezielle Herausforderung dar. Gegenwärtig ist zu beobachten, dass die Strömungs- und Turbulenzmodelle in den einzelnen Fachbereichen für ausgewählte Strömungsprobleme weiterentwickelt und mit anderen Modellkomponenten kombiniert werden.

Weitere Fortschritte auf dem Gebiet der Strömungssimulation sind durch eine weitere Erhöhung der Rechenleistung zu erwarten, die z. B. durch massiv parallele

Systeme erreicht werden kann. Dabei werden Teile des Berechnungsgitters bestimmten Prozessoren zugewiesen, die diese Abschnitte gleichzeitig bearbeiten und über eine Prozessorenkommunikation über die Zwischenergebnisse benachbarter Prozessoren unterrichtet werden.

Der Einstieg in die numerische Strömungssimulation erfordert die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen mathematischen Formulierungen der Erhaltungssätze und deren Randbedingungen in den numerischen Lösungsmethoden, die nicht immer für ein untersuchtes Problem zu identischen Ergebnissen führen. Für die Interpretation der Ergebnisse können daher Sensitivitätsanalysen und besondere Erfahrungen erforderlich sein.

Im Buch werden im Teil I die grundlegenden Erhaltungssätze teilweise in unterschiedlichen mathematischen Formulierungen zusammengestellt und interpretiert. Im Teil II werden einzelne Lösungsmethoden behandelt. Dabei wird der Schwerpunkt auf die Finite-Differenzen-Methode gelegt, die sich für den Einstieg in die numerischen Lösungsmethoden gut eignet. Die Methoden werden anhand von Beispielen erläutert.

Kapitel 2

Hydromechanische Grundlagen

2.1 Transportbilanz am Raumelement

2.1.1 Allgemeine Transportbilanz

Für ein durchströmtes, festes Raumelement ergeben sich folgende Zusammenhänge:
In Abb. 2.1 bezeichnet

- Γ eine physikalische Größe, $\Delta\Gamma$ ihre Änderung,
- T den Transport von Γ mit der Strömung durch das Raumelement,
- D den Transport von Γ durch molekulare Diffusion,
- S die Veränderung von Γ im Raumelement durch Quellen oder Senken und
- W die Wirkungen auf die Begrenzungsflächen des Raumelementes, wenn Γ eine vektorielle Größe ist (Impuls).

Die qualitative Transportbilanz lautet für das Raumelement (Schröder 1994):

$$\Delta\Gamma = (T_{ein} - T_{aus}) + (D_{ein} - D_{aus}) + S + [W], \quad (2.1)$$

$S = 0$ für quellenfreie Vorgänge.

Die Präzisierung der Transportbilanz für das Raumelement $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ ergibt folgende Beziehungen (Abb. 2.2):

a. Transport mit der Strömungsgeschwindigkeit:

$v_X \cdot \Gamma =$ Transportgröße durch die Fläche $dz \cdot dy$

$$T_{ein} - T_{aus} = \left[-\frac{\partial}{\partial x}(v_X \cdot \Gamma) - \frac{\partial}{\partial y}(v_Y \cdot \Gamma) - \frac{\partial}{\partial z}(v_Z \cdot \Gamma) \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$T_{ein} - T_{aus} = -\nabla(\vec{v} \cdot \Gamma) \cdot dV \quad (2.2)$$

∇ bezeichnet den Nabla-Operator.

Abb. 2.1 Strömungs- und Transportvorgänge am Raumelement

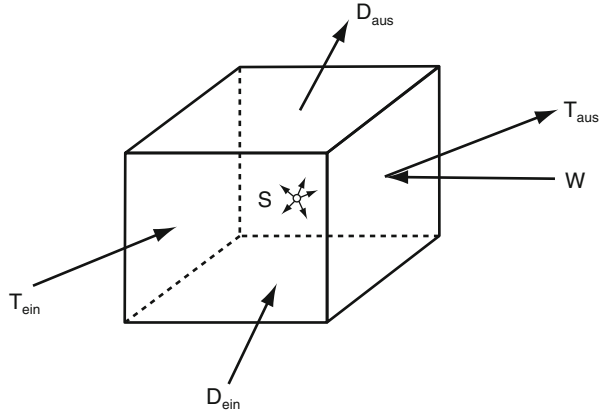
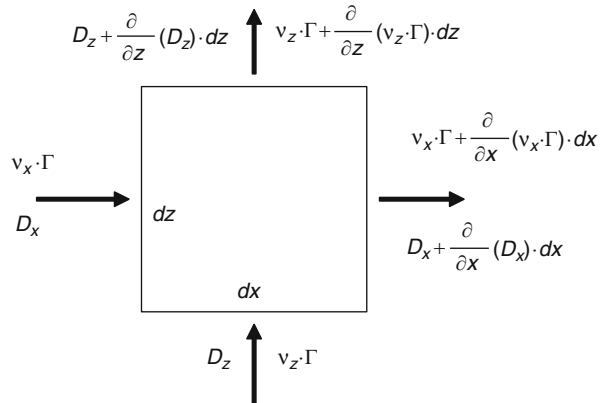


Abb. 2.2 Die differentialen Änderungen der Transportgröße ($v \cdot \Gamma$) und der molekularen Diffusion D_i in der Koordinatenrichtung i ($i = x, z$)



b. Transport durch molekulare Diffusion:

$$D_{ein} - D_{aus} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D_x - \frac{\partial}{\partial y} D_y - \frac{\partial}{\partial z} D_z \right] \cdot dx \cdot dy \cdot dz = -\nabla(D) \cdot dV. \quad (2.3)$$

Nach dem *Fickschen* Gesetz (Gradientenansatz) ist

$$D_i = -c \cdot \frac{\partial}{\partial i} \left(\frac{\Gamma}{\rho} \right) \quad \text{mit } i = x, y, z.$$

Darin bezeichnet ρ die Dichte des transportierenden Mediums und c eine Konstante. Mit diesem Ansatz ergibt sich aus Gl. (2.3):

$$-\nabla(D) = c \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\Gamma}{\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\Gamma}{\rho} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\Gamma}{\rho} \right) \right] = c \cdot \Delta \left(\frac{\Gamma}{\rho} \right). \quad (2.4)$$

Setzt man zweckmäßigerweise für den Quellen- oder Senken-Term $(-\rho \cdot S)$, so erhält man für die allgemeine Transportbilanz die Beziehung

$$\left[\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \cdot \Gamma) - c \cdot \Delta \left(\frac{\Gamma}{\rho} \right) - \rho \cdot S - [W] \right] \cdot dV = 0 \quad (2.5)$$

bzw.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \cdot \Gamma) - c \cdot \Delta \left(\frac{\Gamma}{\rho} \right) - \rho \cdot S - [W] = 0 \quad (2.6)$$

Δ bezeichnet den Laplace-Operator.

2.1.2 Spezifische Transportbilanzen

2.1.2.1 Massentransport

Für den Transport eines Fluids durch das Raumelement kann $\Gamma = \rho$, $D=0$ und $W=0$ gesetzt werden.

Damit ergibt sich aus Gl. (2.6):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \cdot \rho) = \rho \cdot S \quad \text{für eine allgemeine, instationäre Strömung,}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \cdot \rho) = 0 \quad \text{für eine instationäre, quellenfreie Strömung,}$$

$$\nabla(\vec{v} \cdot \rho) = 0 \quad \text{für eine stationäre, quellenfreie Strömung } (\nabla(\vec{v} \cdot \rho) = \operatorname{div}(\vec{v} \cdot \rho) = \rho \cdot \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \operatorname{grad} \rho),$$

$$\nabla \vec{v} = 0 \quad \text{für eine instationäre oder stationäre, quellenfreie, inkompressible Strömung } (\rho = \text{const.})$$

$$\left(\nabla \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right).$$

Die abgeleiteten Beziehungen werden auch als Kontinuitätsgleichungen bezeichnet.

2.1.2.2 Fremdstoff- und Energietransport

Zur Kennzeichnung des Fremdstofftransportes werden folgende Definitionen eingeführt:

C variable Menge des Fremdstoffes oder der Energie in der Flüssigkeit als skalare Größe (z. B. Konzentrationen, Wärme u. a.),

$\frac{c}{\rho} = \delta$ Diffusität (Konstante),

$$\Gamma = \rho \cdot C,$$

$$W = 0.$$

Mit diesen Voraussetzungen erhält man aus (2.6):

$$\frac{\partial(\rho \cdot C)}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \cdot \rho \cdot C) - c \cdot \Delta C = \rho \cdot S_c \quad (2.7)$$

S_c = Quelle oder Senke

(z. B. Wärmeenergie einer chemischen oder biologischen Reaktion).

Für Wasser als Trägerflüssigkeit ergibt sich mit $\rho = \text{const.}$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \nabla(\vec{v} \cdot C) - \delta \cdot \Delta C = S_c \quad (2.8)$$

bzw.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + C \cdot \text{div } \vec{v} + \vec{v} \cdot \text{grad } C - \delta \cdot \Delta C = S_c. \quad (2.9)$$

Mit $\nabla \vec{v} = \text{div } \vec{v} = 0$ erhält man schließlich

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } C - \delta \cdot \Delta C = S_c \quad (2.10)$$

bzw.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial C}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial C}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial C}{\partial z} - \delta \cdot \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) = S_c. \quad (2.11)$$

Die Gl. (2.10) bzw. (2.11) berücksichtigen die molekulare Diffusion, die z. B. bei allen laminaren Einleitungs- und Ausbreitungsvorgängen von Bedeutung ist. Für die Erfassung der turbulenten Diffusion werden meistens Beziehungen aus Turbulenzmodellen herangezogen (vgl. Kap. 4).

2.1.2.3 Impulstransport

Der durch das Raumelement $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ transportierte Impuls ist eine vektorielle Größe. Die Transportbilanz muss daher komponentenweise (richtungsweise) durchgeführt werden. Als Beispiel wird die z-Richtung betrachtet. Die Transportgröße ist

$$\Gamma = \rho \cdot v_z.$$

Für die resultierende Kraftwirkung auf die Hüllflächen des Raumelementes ergibt sich aus Abb. 2.3: