Heinz Klaus Strick

Mathematatik ist schön

Anregungen zum Anschauen und Erforschen

für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren

Springer

Mathematik ist schön

Heinz Klaus Strick

Mathematik ist schön

Anregungen zum Anschauen und Erforschen für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren

Springer

Heinz Klaus Strick
Leverkusen, Deutschland

ISBN 978-3-662-53729-9 ISBN 978-3-662-53730-5 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-53730-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung: Dr. Andreas Rüdinger
Abbildungen: Heinz Klaus Strick. Abb. 3.2 und die Kanonenkugeln in Kapitel 16 von Stephan Meyer
Einbandabbildung: deblik, Berlin
Einbandgestaltung: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer-Verlag GmbH Deutschland
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

Nicht jeder denkt, wenn von Mathematik die Rede ist, unbedingt an etwas, an dem man sich erfreuen kann. Dabei hat die Mathematik viele spannende und durchaus auch ästhetisch ansprechende Aspekte zu bieten. In diesem Buch versuche ich einige dieser schönen Seiten der Mathematik aufzuzeigen.

Während meiner Tätigkeit als Mathematiklehrer habe ich mich immer wieder bemüht, für eine gewisse Auflockerung des Unterrichts zu sorgen. Denn auch beim spannendsten Mathematikunterricht lassen sich mühsame und trockene Phasen leider nicht vermeiden.

Für eine solche Auflockerung und Bereicherung eignen sich Fragestellungen, die man als *mathematische Spiele* bezeichnen könnte, oder auch *Knobelaufgaben,* deren Lösungswege zu verblüffenden Einsichten führen.

So können beispielsweise nach der Behandlung der Winkelsätze in der Elementargeometrie regelmäßige Sternfiguren untersucht (Kap. 1) oder regelmäßige Vielecke mithilfe von Rauten ausgelegt werden (Kap. 10). Das Auffinden des größten gemeinsamen Teilers zweier Zahlen ist unterhaltsamer, wenn man dies als Auslegen eines Rechtecks interpretiert (Kap. 3). Kopfrechnen ist nicht jedermanns Sache, aber erstaunlicherweise kann man mit nur wenigen Rechentricks interessante Strukturen in der Welt der Zahlen entdecken (Kap. 7). Quadratische Gleichungen und lineare Gleichungssysteme zu lösen, ist in der Regel nicht sehr spannend – es sei denn, man nutzt diese Verfahren, um wunderbare Figuren mit sich gegenseitig berührenden Kreisen *(Kissing Circles)* zu erforschen (Kap. 15) und sich mit der Frage der Parkettierung von Rechtecken durch lauter verschieden große Quadrate zu beschäftigen (Kap. 14).

Etliche der im Buch angesprochenen Themen richten sich an jüngere Schülerinnen und Schüler. Erfahrungsgemäß üben Fadenbilder (Kap. 6) eine große Faszination aus – auch wenn die theoretischen Hintergründe erst am Ende der Schulzeit oder sogar erst danach vermittelt werden können. Das Spielen mit Pentomino-Steinen (Kap. 5) regt zu strategisch-logischer Vorgehensweise an. Und dass sich hinter dem Wiegen mit einem festen, sehr eingeschränkten Satz von Gewichten (Kap. 9) das Rechnen im Dreiersystem verbirgt, können auch schon pfiffige 10-Jährige verstehen. Bereits in den ersten Schuljahren lernen Kinder Flächeninhalte einfacher geometrischer Figuren zu bestimmen; umso größer ist dann das Erstaunen, dass es auch ganz anders geht: Auf einem

Koordinatensteckbrett braucht man nur die Gitterpunkte auf dem Rand und im Innern zu zählen (Kap. 11).

Sich mit schöner Mathematik zu beschäftigen, kann aber auch bedeuten, dass man sich farbige Muster anschaut oder eigene Muster entwirft. Muster aus bunten Steinen (Kap. 2) untersuchte man schon vor 2500 Jahren. Beim Färben von Kreisringen (Kap. 4) und gleich großen Teilflächen regelmäßiger Vielecke (Flächenaufteilungen, Kap. 8) kann man die eigene Fantasie entfalten und vielleicht sogar neue Muster entdecken.

Am Ende des Buches stehen zwei umfangreichere Kapitel über die Herleitung von Potenzsummenformeln (Kap. 16) und zum Satz des Pythagoras (Kap. 17). Sie machen deutlich, wie im Laufe der Jahrhunderte immer wieder neue Ideen zu einem Thema entwickelt wurden.

Für weitere Themen war leider kein Platz mehr in diesem Buch. Mir ist bewusst, dass eine Auswahl auch anders hätte aussehen können. (Wer beispielsweise den „Goldenen Schnitt“ vermisst: Zumindest ein bisschen davon findet sich in Kap. 3 und in Kap. 13.)

Die Kapitel sind durchweg unabhängig voneinander lesbar. Für den Einstieg in die einzelnen Themen wurde ein möglichst einfacher Zugang gewählt; dafür werden keine oder nur geringe Voraussetzungen aus dem Schulunterricht benötigt.

Es ist ein wichtiges Anliegen des Buches, dass viele junge Menschen den Weg zur Mathematik finden und zugleich jene Leser, deren Schulzeit schon einige Zeit zurückliegt, sich wieder erinnern und Neues entdecken. Hierbei sollen die zahlreichen Hinweise auf weitere Informationsmöglichkeiten im Internet sowie auf weiterführende Literatur helfen. Die „Lösungen“ zu den in den einzelnen Abschnitten eingestreuten *Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen* werden auf der Internetseite des Verlags veröffentlicht:

http://www.springer.com/de/book/9783662537299.

Das Buch wurde für alle geschrieben, die Freude an der Mathematik haben oder verstehen möchten, warum das Buch diesen (für manchen vielleicht provokanten) Titel trägt. Es richtet sich auch an Lehrkräfte, die ihren Schülerinnen und Schülern zusätzliche oder neue Lernmotivation geben wollen.

Auch wenn in jedem Kapitel Sätze, Regeln und Formeln grafisch besonders hervorgehoben sind, sich also die typischen Elemente eines Mathematikbuches wiederfinden, ist dies kein Lehrbuch der Mathematik. Beweise von Sätzen erfolgen in den meisten Fällen nur beispielgebunden – die zugrunde liegenden Ideen zu vermitteln war mir stets wichtiger, als die formalen Schlüsse aufzuzeigen.

Die Fülle an Grafiken in diesem Buch soll dazu anregen, eigene Ideen zu den dargestellten Objekten zu entwickeln:

Anschauen, Nachdenken, Ausprobieren, Variieren, Recherchieren, Wundern.

Unter diesem Motto standen und stehen auch die von mir erstellten immerwährenden Kalender im DIN A3-Format, die ich seit einigen Jahren zugunsten von *Friedensdorf International* in Oberhausen verkaufe (www.mathematik-ist-schoen.de).

Dass die meisten Grafiken mithilfe der Programmiersprache LOGO erstellt wurden, mag auf Kritik stoßen, da die mit dieser Software erreichbare grafische Auflösung sicherlich nicht optimal ist. Ausschlaggebend für die Entscheidung waren neben der Lizenzfrage meine eigenen positiven Unterrichtserfahrungen mit dem Konzept einer Programmiersprache, die ihr Erfinder Seymour Papert *(Mindstorms)* sogar für die Grundschule geeignet hielt.

In den letzten Jahren hatte ich das Vergnügen, mich in jedem Monat neu mit einer Mathematikerin oder einem Mathematiker beschäftigen zu dürfen, um dann durch ein Kalenderblatt an diese(n) zu erinnern (www.spektrum.de: *Der Mathematische Monatskalender).* Wenn man sich mit den Erkenntnissen und Ideen längst verstorbener Gelehrter auseinandersetzt, kommt man oft aus dem Staunen nicht heraus. Ich hoffe, dass es mir in diesem Buch auch gelungen ist, eine Reihe dieser wunderbaren, leider oft in Vergessenheit geratenen Einsichten wieder ins Bewusstsein zu rücken. Hierzu gehören insbesondere auch die Entdeckungen der Mathematiker des islamischen Kulturkreises. Während meiner Übersetzungsarbeit an Len Berggrens *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam* (Mathematik im islamischen Mittelalter, Springer 2011) hat sich auch für mich eine bis dahin unbekannte Welt geöffnet.

Ich habe mich bemüht, durch die Literaturhinweise in jedem Kapitel und am Ende des Buches genügend Anregungen für eine weitere Beschäftigung mit den angesprochenen Themen zu geben. Erfreulicherweise hat die Qualität der deutschen Wikipedia-Beiträge (und der darin enthaltenen Literaturhinweise) in den letzten Jahren deutlich zugenommen. Manchmal werden sie von der englisch- bzw. französischsprachigen Version noch übertroffen; daher sind auch diese Quellen genannt. Im Einzelnen ist es mir nicht mehr möglich anzugeben, durch welche Veröffentlichungen ich selbst welche Anregungen erhalten habe. In den vergangenen Jahrzehnten habe ich eine große Zahl von Büchern durchgearbeitet, deren Titel mit den Vokabeln

Recreations, Challenging Problems, Excursions, Adventures …

beginnen. Meistens habe ich sie unter dem Gesichtspunkt durchgesehen, ob sie Anregungen für den „normalen" Unterricht, für Arbeitsgemeinschaften oder für Wettbewerbsaufgaben enthielten.

Am Ende der Arbeit an diesem Buch möchte ich mich herzlich bei all denen bedanken, die mich bei der Vorbereitung und Umsetzung des Buchprojekts unterstützt haben:

- bei meiner Frau, die es geduldig ertrug, dass ich mich immer wieder in die schöne Welt der Mathematik vertiefte,
- bei Wilfried Herget, der zahlreiche Vorschläge machte, Formulierungen meiner Texte verständlicher zu gestalten, und Argumentationslücken aufdeckte (die ich jetzt hoffentlich gefüllt habe),
- bei Manfred Stern, der akribisch meine Texte durchschaute und vor allem auch dank seiner Fremdsprachenkompetenz dabei half, Fehler zu vermeiden,

- bei Peter Gallin, der mich durch seine konstruktiv-kritischen Anmerkungen auf Schwachstellen aufmerksam machte,
- bei Hans Walser, durch dessen unfassbar kreative Veröffentlichungen ich immer wieder Anregungen für dieses Buch erhielt,
- und nicht zuletzt bei Andreas Rüdinger und Carola Lerch vom Springer Verlag, die dieses Buch erst ermöglichten.

Leverkusen, Deutschland Heinz Klaus Strick

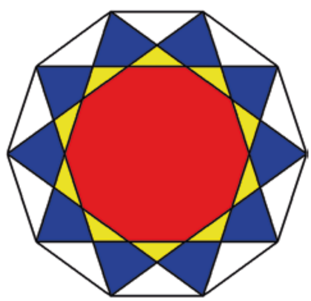
Inhaltsverzeichnis

Regelmäßige Vielecke und Sterne

1

Drei Dinge sind uns aus dem Paradies geblieben:
Sterne, Blumen und Kinder.

(Dante Alighieri, 1265–1321,
italienischer Dichter und Philosoph)



1.1 Eigenschaften regelmäßiger Sterne

Regelmäßige Sterne entstehen dadurch, dass man Eckpunkte von regelmäßigen Vielecken nach einer gewissen Vorschrift miteinander verbindet.

Eine solche Vorschrift kann wie folgt lauten:

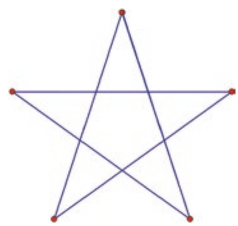
Verbinde einen Eckpunkt des n-Ecks mit dem k-nächsten Eckpunkt (im Uhrzeigersinn).

H.K. Strick, *Mathematik ist schön,* DOI 10.1007/978-3-662-53730-5_1

Beispiel: 5-zackiger Stern

Für $n = 5$ und $k = 2$ bedeutet dies: Verbinde jeden Eckpunkt eines regelmäßigen 5-Ecks mit dem zweitnächsten Eckpunkt (im Uhrzeigersinn). Es entsteht so ein regelmäßiger 5-zackiger Stern.

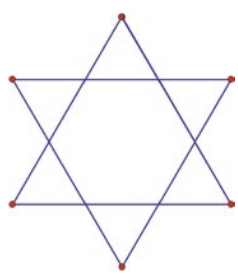
Weitere 5-zackige Sterne existieren nicht, denn für $n = 5$ und $k = 3$ erhält man den gleichen Stern. Statt jeden Punkt mit dem 3-nächsten Punkt im Uhrzeigersinn zu verbinden, kann man den Punkt auch mit dem 2-nächsten Punkt im Gegenuhrzeigersinn verbinden.



Beispiel: 6-zackiger Stern

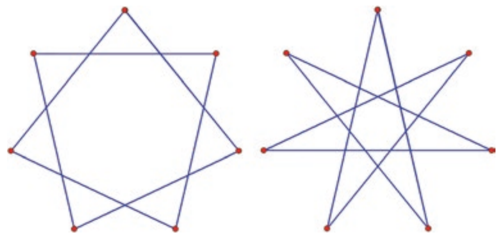
Auch für $n = 6$ existiert nur ein Typ. Er besteht aus 2 gleichseitigen 3-Ecken, denn $2 \cdot 3 = 6$.

Nummeriert man die Eckpunkte des n-Ecks im Uhrzeigersinn mit P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, dann ergeben sich 2 Streckenzüge: $P_0 - P_2 - P_4 - P_0$ und $P_1 - P_3 - P_5 - P_1$, also mit entweder geradem oder mit ungeradem Index.



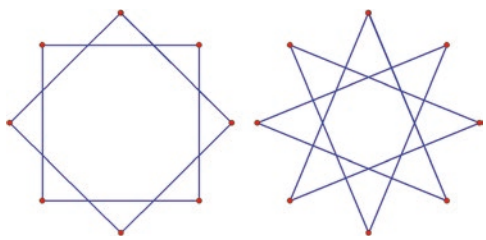
Beispiel: 7-zackige Sterne

Für $n = 7$ gibt es zwei verschiedene Sterne, nämlich für $k = 2$ und für $k = 3$. Bei genauem Hinschauen sieht man, dass der 7-zackige Stern für $k = 2$ auch im Innern des Sterns für $k = 3$ entsteht (außerdem ein regelmäßiges 7-Eck).



Beispiel: 8-zackige Sterne
Auch für $n = 8$ gibt es zwei verschiedene Sterne, nämlich für $k = 2$ und für $k = 3$.

Der 8-zackige Stern für $k = 2$ entsteht auch im Innern des Sterns für $k = 3$. Er besteht aus 2 regelmäßigen 4-Ecken (Quadraten), denn $2 \cdot 4 = 8$.



Beispiel: 9-zackige Sterne
Für $n = 9$ gibt es sogar drei verschiedene Sterne.

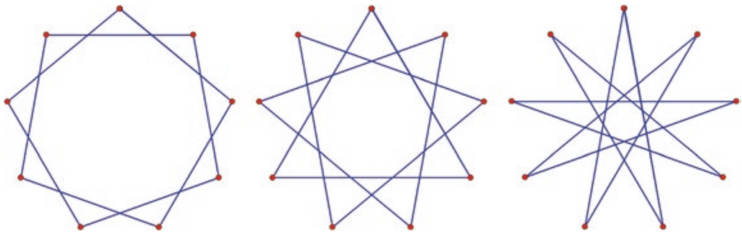
- $n = 9$, $k = 2$: Der Stern lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen:

$$P_0 - P_2 - P_4 - P_6 - P_8 - P_1 - P_3 - P_5 - P_7 - P_0$$

- $n = 9$, $k = 3$: Der Stern besteht aus 3 regelmäßigen 3-Ecken, denn $3 \cdot 3 = 9$. Innen tritt der Stern für $k = 2$ auf.
- $n = 9$, $k = 4$: Der Stern lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen:

$$P_0 - P_4 - P_8 - P_3 - P_7 - P_2 - P_6 - P_1 - P_5 - P_0$$

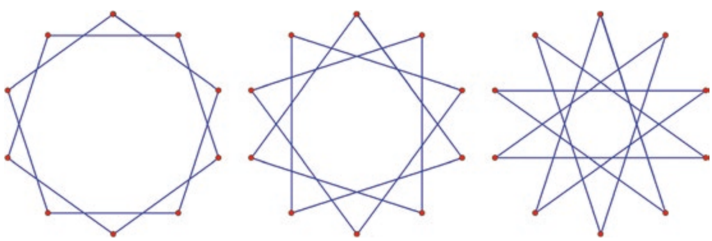
  Innen tritt sowohl der Stern für $k = 2$ als auch für $k = 3$ auf.



Beispiel: 10-zackige Sterne

Auch für $n = 10$ gibt es drei verschiedene Sterne.

- $n = 10$, $k = 2$: Dieser Stern besteht aus 2 regelmäßigen 5-Ecken, denn $2 \cdot 5 = 10$.
- $n = 10$, $k = 3$: Der Stern lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen.
- $n = 10$, $k = 4$: Dieser Stern besteht aus 2 Sternen vom Typ $n = 5$, $k = 2$. Zu diesen gehören die Streckenzüge $P_0{-}P_4{-}P_8{-}P_2{-}P_6{-}P_0$ und $P_1{-}P_5{-}P_9{-}P_3{-}P_7{-}P_1$.

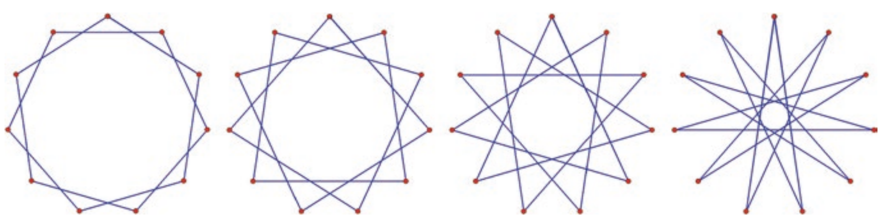


Beispiel: 11-zackige Sterne

Für $n = 11$ gibt es vier verschiedene Sterne, nämlich für $k = 2$, $k = 3$, $k = 4$ und $k = 5$.

Alle diese Sterne lassen sich als durchgehende Streckenzüge zeichnen.

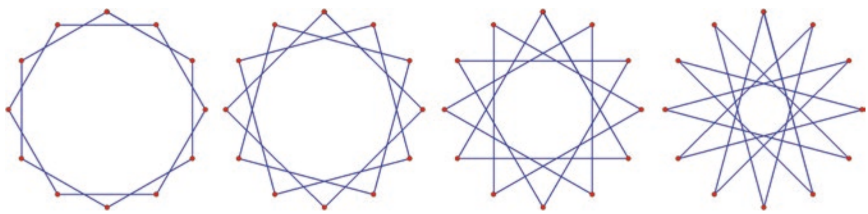
Im Innern treten jeweils alle Sterne mit kleinerem k auf.



Beispiel: 12-zackige Sterne
Für $n = 12$ gibt es vier verschiedene Sterne:

- $k = 2 : 2$ regelmäßige 6-Ecke, denn $2 \cdot 6 = 12$.
- $k = 3 : 3$ regelmäßige 4-Ecke (Quadrate), denn $3 \cdot 4 = 12$.
- $k = 4 : 4$ regelmäßige (gleichseitige) 3-Ecke, denn $4 \cdot 3 = 12$.

Nur der Stern für $k = 5$ lässt sich als durchgehender Streckenzug zeichnen.
Im Innern treten jeweils alle Sterne mit kleinerem k auf.



Folgende Eigenschaften lassen sich aus den Beispielen ablesen:

- Für jedes n, das größer ist als 4, existieren n-zackige Sterne.
- Für k kann man beliebige Zahlen einsetzen. Unterschiedliche Sternfiguren erhält man, wenn man in der Zeichenvorschrift folgende Werte einsetzt: k ist mindestens 2, bei geradzahligem n höchstens $\frac{n}{2} - 1$, bei ungeradzahligem n höchstens $\frac{n-1}{2}$.
  - Im Einzelnen gilt für ungeradzahlige n: Für $n = 5$ gibt es einen Stern für $k = 2$; für n $= 7$ gibt es zwei Sterne, nämlich für $k = 2$ und für $k = 3$; für $n = 9$ gibt es drei Sterne, nämlich für $k = 2$, für $k = 3$ und für $k = 4$; usw.
  - Im Einzelnen gilt für geradzahlige n: Für $n = 6$ gibt es einen Stern für $k = 3$; für $n = 8$ gibt es zwei Sterne, nämlich für $k = 2$ und für $k = 3$; für $n = 10$ gibt es drei Sterne, nämlich für $k = 2$, für $k = 3$ und für $k = 4$; usw.
- Bezeichnet man irgendeinen Punkt als Beginn eines Streckenzuges mit der Nummer 0, dann gehen die Streckenzüge durch die Punkte mit den Nummern $0 - k - 2k - 3k - \cdots$, und ähnlich wie bei der Uhr werden die Nummern jeweils um n verringert, wenn das Vielfache von k die Zahl n erreicht oder darüber hinausgeht.
- In jedem n-zackigen Stern sind im Innern für jedes mögliche $k > 2$ weitere n-zackige Sterne enthalten.
- Manche Sternfiguren lassen sich zeichnen, ohne dass man absetzen muss; andere bestehen aus zwei oder mehr Vielecken oder Sternfiguren. Im Einzelnen gilt:
  - Ist k ein Teiler von n, dann besteht der Stern aus k Vielecken mit e Ecken, wobei $e = \frac{n}{k}$.
  - Haben k und n den gemeinsamen Teiler g, dann setzt sich der n-zackige Stern aus g Sternen mit $\frac{n}{g}$ Zacken zusammen.

– Wenn k und n zueinander teilerfremd sind, d. h., wenn sie nur die Zahl 1 als gemeinsamen Teiler haben, treten Sterne auf, die man als durchgehenden Streckenzug zeichnen kann. Umgekehrt gilt auch: Wenn ein Stern als durchgehender Streckenzug gezeichnet ist, dann sind k und n zueinander teilerfremd.

Regel

Sterne, die man als durchgehenden Streckenzug zeichnen kann

Für alle natürlichen Zahlen n, k mit $n > 4$ und $2 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$, falls n eine gerade Zahl ist, bzw. $2 \leq k \leq \frac{n-1}{2}$, falls n eine ungerade Zahl ist, existieren regelmäßige n-zackige Sterne.

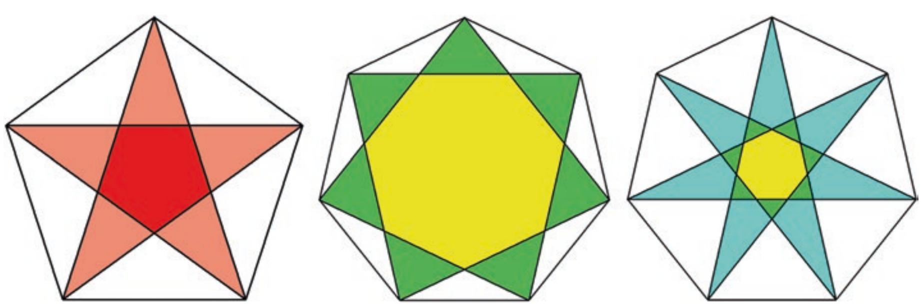
Dann und nur dann lassen sich die Sterne als durchgehenden Streckenzug zeichnen, wenn n und k zueinander teilerfremd sind.

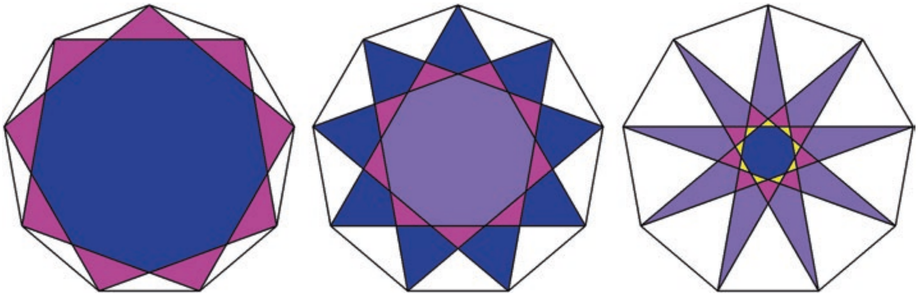
Da bei den regelmäßigen n-zackigen Sterne sowohl die Zackenanzahl n als auch der Parameter k eine wesentliche Rolle spielen, werden sie oft mit der symbolischen Schreibweise {n/k} notiert, dem sogenannten **Schläfli-Symbol** (benannt nach dem Schweizer Mathematiker Ludwig Schläfli (1814–1895), der sich insbesondere mit regelmäßigen Vielecken (Polygonen), Vielflächnern (Polyedern) und deren Verallgemeinerung in höheren Dimensionen beschäftigte).

Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.1: Beantworten Sie die folgenden Fragen für $n = 13$, $n = 15$ und für $n = 18$ (also für eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Eckpunkten): Für welche k (Mindest- und Höchstwert) erhält man einen n-zackigen Stern? Wie viele verschiedene Sternfiguren sind dies? Welche der möglichen Sternfiguren lassen sich als durchgehenden Streckenzug zeichnen, welche bestehen aus mehreren Sternen, welche aus mehreren Vielecken? Welche Punkt-Nummern treten bei den möglichen Streckenzügen auf (Beginn der Streckenzüge beim Punkt mit der Nummer 0)?

A 1.2: In den folgenden Abbildungen sind gleich große Flächenstücke jeweils gleich gefärbt. Wie hängt die Anzahl der Farben von der Art des Sterns, also von den Werten für n und k ab?





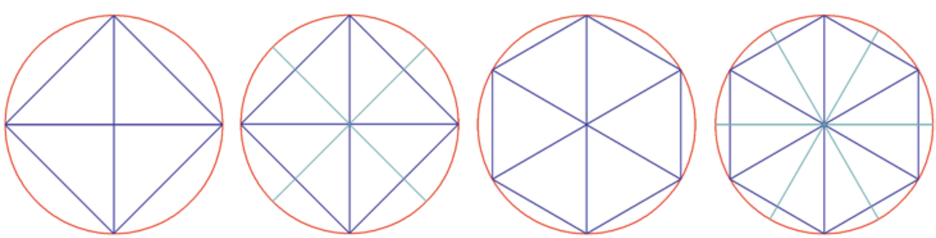
1.2 Sterne zeichnen

Um einen regelmäßigen Stern mit n Zacken zeichnen zu können, muss man wissen, wie man ein regelmäßiges n-Eck zeichnet.

Besonders einfach ist die Konstruktion eines regelmäßigen 4-Ecks (Quadrat) und die eines regelmäßigen 6-Ecks sowie der regelmäßigen Vielecke, die man jeweils durch Verdoppelung der Anzahl der Eckpunkte aus gegebenen regelmäßigen n-Ecken erhält:

- Ein regelmäßiges 4-Eck erhält man, indem man einen Kreis mit beliebig gewähltem Radius r zeichnet, irgendeinen Punkt der Kreislinie auswählt und eine Gerade durch den Mittelpunkt des Kreises zeichnet, bis die Kreislinie wieder geschnitten wird. Dann zeichnet man eine Senkrechte zu dieser Strecke durch den Mittelpunkt des Kreises und erhält zwei weitere Eckpunkte des 4-Ecks. Diese bisher eingetragenen vier Eckpunkte bilden ein Quadrat.
- Ein regelmäßiges 6-Eck erhält man, indem man einen Kreis mit beliebig gewähltem Radius r zeichnet, irgendeinen Punkt der Kreislinie auswählt und von diesem aus nacheinander Strecken der Länge r auf dem Kreis abträgt. Diese Konstruktion ist möglich, weil das regelmäßige 6-Eck aus sechs gleichseitigen Dreiecken besteht, also die Seiten des 6-Ecks genauso lang sind wie die Verbindungsstrecken der Eckpunkte mit dem Mittelpunkt des Kreises (= Radius des Kreises).

Zeichnet man vom Mittelpunkt des Kreises jeweils eine Gerade durch die Mittelpunkte der Seiten des regelmäßigen n-Ecks, dann sind die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Kreislinie die zusätzlichen Eckpunkte für das regelmäßige $2n$-Eck. So erhält man aus dem Quadrat das regelmäßige 8-Eck, aus dem regelmäßigen 6-Eck das regelmäßige 12-Eck usw. (vgl. die folgenden Abbildungen).



Allgemein, d. h. für beliebiges n, gibt es zwei Möglichkeiten:

- Man startet mit einem Kreis mit Radius r, der um einen Mittelpunkt geschlagen wird, und zeichnet dann vom Mittelpunkt aus n-mal den Radius, wobei jedes Mal die Richtung um $360°/n$ geändert wird.
  In Abb. 1.1 sind (für $n = 7$) außer den Eckpunkten auch die Seiten des regelmäßigen n-Ecks sowie die Höhen der entstehenden gleichschenkligen Dreiecke eingezeichnet. Der n-zackige Stern entsteht, wenn gemäß der Vorschrift ein Ausgangspunkt mit dem k-nächsten Punkt verbunden und dieses Verfahren dann noch n-mal wiederholt wird.
- Alternativ kann man auch mit einer Seite des n-Ecks beginnen, zeichnet also eine Strecke der Länge s, ändert dann die Richtung, in der man sich beim Zeichnen bewegt hat, um den n-ten Teil von 360°, sodass man nach der n-fachen Wiederholung des Vorgangs insgesamt eine Drehung von 360° vollzogen hat und wieder am Ausgangspunkt der „Wanderung" angekommen ist.

Zwischen dem Kreisradius r und der Seitenlänge s des regelmäßigen n-Ecks besteht ein einfacher Zusammenhang: Je zwei benachbarte Radien und eine verbindende Seite des n-Ecks bilden ein gleichschenkliges Dreieck, das durch die Höhe h in zwei rechtwinklige Dreiecke unterteilt wird.

Für den halben Winkel am Mittelpunkt gilt daher:

$$\sin\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{s}{2r} \text{ und } \tan\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{s}{2h} \text{ sowie } \cos\left(\frac{180°}{n}\right) = \frac{h}{r}$$

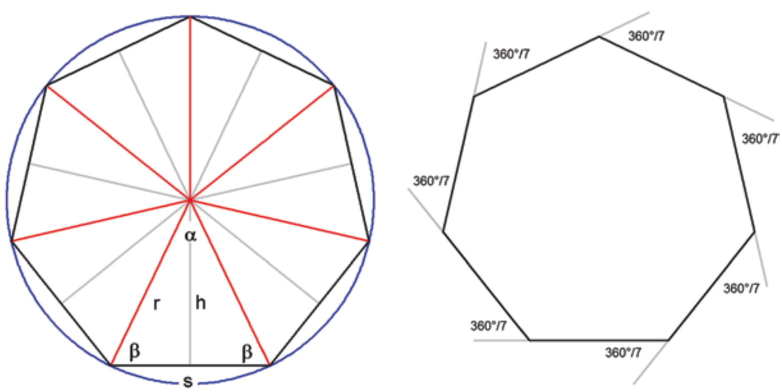


Abb. 1.1 Zwei der Möglichkeiten, ein regelmäßiges 7-Eck zu zeichnen

1.3 Diagonalen in einem regelmäßigen *n*-Eck

Bei der Untersuchung der Frage, welche n-zackigen Sterne überhaupt möglich sind, macht es Sinn, zunächst ein regelmäßiges n-Eck mit allen Diagonalen zu zeichnen und dann gemäß Vorschrift den gewünschten Streckenzug zu markieren, für den die Diagonalen benutzt werden.

Von jedem Eckpunkt eines n-Ecks aus kann man Verbindungsstrecken zu den anderen Eckpunkten einzeichnen: 2 Seiten (zu den beiden benachbarten Eckpunkten) sowie $n - 3$ Diagonalen (zu den übrigen Eckpunkten).

Die Gesamtzahl der Diagonalen in einem n-Eck ergibt sich jedoch nicht unmittelbar aus dem Produkt $n \cdot (n - 3)$, da bei dieser Zählweise jede der Strecken doppelt erfasst wird. Vielmehr gilt:

Regel

Anzahl der Diagonalen eines *n*-Ecks

Die Anzahl der Diagonalen in einem n-Eck ist gleich $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 3)$.

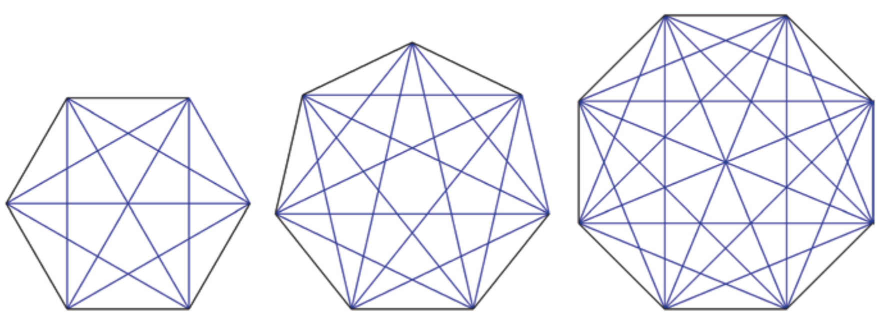
Beispiele für die Berechnung der Anzahl der Diagonalen

Ein regelmäßiges 5-Eck hat $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 2 = 5$ Diagonalen, die den regelmäßigen 5-zackigen Stern bilden.

Ein regelmäßiges 6-Eck hat $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 9$ Diagonalen, von denen jedoch 3 Diagonalen jeweils nur zum gegenüberliegenden Punkt führen, also als Streckenzug für das Zeichnen eines Sterns nicht geeignet sind. Die übrigen 6 Diagonalen bilden die jeweils 3 Seiten der beiden gleichseitigen Dreiecke.

Ein regelmäßiges 7-Eck hat $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 4 = 14$ Diagonalen, von denen jeweils 7 Diagonalen einen geschlossenen Streckenzug für den 7-zackigen Stern mit $k = 2$ bzw. $k = 3$ bilden.

Ein regelmäßiges 8-Eck hat $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$ Diagonalen, von denen jeweils 4 Diagonalen nur zum gegenüberliegenden Punkt führen, also als Streckenzug für das Zeichnen eines Sterns nicht geeignet sind. Außerdem bilden zweimal je vier Diagonalen die beiden Quadrate, aus denen Stern $\{8/2\}$ besteht, sodass noch 8 Diagonalen bleiben, die den regelmäßigen 8-zackigen Stern $\{8/3\}$ bilden.



Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.3: Bestimmen Sie für $n = 9$ bis $n = 12$ die Anzahl der Diagonalen im regelmäßigen n-Eck. Welche von diesen Diagonalen werden für das Zeichnen der n-zackigen Sterne benötigt? Verallgemeinern Sie diese Aussagen über Diagonalen und Sterne für eine gerade bzw. eine ungerade Anzahl von Ecken.

Beim regelmäßigen 5-Eck haben alle Diagonalen dieselbe Länge. Verbindet man die Endpunkte einer Diagonale mit dem Mittelpunkt des Kreises, dann entsteht ein gleichschenkliges Dreieck mit Basis d und den beiden Schenkeln der Länge r. Da die Diagonalen einen Eckpunkt des regelmäßigen 5-Ecks mit dem übernächsten Eckpunkt verbinden, ist die Winkelgröße des Winkels δ am Kreismittelpunkt gleich $2 \cdot \frac{360°}{5}$, also die Winkelgröße des halben Winkels gleich $2 \cdot \frac{180°}{5} = 72°$.

Daher gilt für die Diagonalen im regelmäßigen 5-Eck:

$$\sin\left(\frac{2 \cdot 180^\circ}{5}\right) = \frac{\frac{d}{2}}{r}\,, \text{ also } d = 2r \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot 180^\circ}{5}\right).$$

Entsprechend ergibt sich allgemein für die Diagonalen in beliebigen regelmäßigen n-Ecken, die einen Eckpunkt mit dem übernächsten (also dem zweitnächsten) verbinden, als Länge d_2 für die Diagonalen:

$$d_2 = 2r \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot 180^\circ}{n}\right)$$

Bei den Diagonalen, die einen Eckpunkt mit dem drittnächsten Eckpunkt verbinden, ändert sich im gleichschenkligen Dreieck der Winkel δ am Mittelpunkt entsprechend zu $3 \cdot \frac{360°}{n}$, also der halbe Winkel zu $3 \cdot \frac{180°}{n}$. Daher gilt:

$$d_3 = 2r \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot 180°}{n}\right)$$

Formel

Länge der Diagonalen eines n-Ecks

Allgemein gilt für die Länge d_k einer Diagonalen, die einen Eckpunkt mit dem k-nächsten eines regelmäßigen n-Ecks verbindet und dem Winkel $\delta = k \cdot \frac{360°}{n}$ gegenüberliegt:

$$d_k = 2r \cdot \sin\left(\frac{k \cdot 180^\circ}{n}\right) \tag{1.1}$$

Mithilfe von Formel (1.1) kann dann die Gesamtlänge des Streckenzuges berechnet werden, der den regelmäßigen n-zackigen Stern bildet, vgl. auch Tab. 1.1 unten.

Tab. 1.1 Winkelgrößen und Streckenlängen bei regelmäßigen *n*-zackigen Sternen

Sterntyp $\{n/k\}$	Anzahl der zugehörigen Streckenzüge	Mittelpunktswinkel δ_k zur Diagonalen d_k $\delta_k = k \cdot \frac{360°}{n}$ (°)	Winkel ε in der äußeren Zacke (°)	Gesamtlänge aller Strecken des Sterns $n \cdot 2r \cdot \sin\left(\frac{k \cdot 180°}{n}\right)$
{5/2}	1	144	36	9,51 · r
{6/2}	2	120	60	10,39 · r
{7/2}	1	102,86	77,14	10,95 · r
{7/3}	1	154,29	25,71	13,65 · r
{8/2}	2	90	90	11,31 · r
{8/3}	1	135	45	14,78 · r
{9/2}	1	80	100	11,57 · r
{9/3}	3	120	60	15,59 · r
{9/4}	1	160	20	17,73 · r
{10/2}	2	72	108	11,76 · r
{10/3}	1	108	72	16,18 · r
{10/4}	2	144	36	19,02 · r
{11/2}	1	65,45	114,55	11,89 · r
{11/3}	1	98,18	81,82	16,63 · r
{11/4}	1	130,91	49,91	20,01 · r
{11/5}	1	163,64	16,36	21,78 · r
{12/2}	2	60	120	12 · r
{12/3}	3	90	90	16,97 · r
{12/4}	4	120	60	20,78 · r
{12/5}	1	150	30	23,18 · r

1.4 Zackenwinkel im regelmäßigen *n*-zackigen Stern

In den Zacken (Spitzen) der regelmäßigen *n*-zackigen Sterne treten Winkel auf, die von den Werten für *n* und *k* abhängen. Diese sind einfach zu bestimmen, wenn man den sogenannten **Kreiswinkelsatz** anwendet. Der Satz beschäftigt sich mit dem Mittelpunktswinkel (Zentriwinkel) über einer Sehne und den zugehörigen darüber liegenden Umfangswinkeln (Peripheriewinkeln). Der Satz besagt: Alle Umfangswinkel über einer Sehne sind gleich groß. Der Mittelpunktswinkel ist doppelt so groß wie die Umfangswinkel.

In Abb. 1.2 ist der symmetrische Fall des Satzes dargestellt; wie der allgemeine Beweis des Satzes geführt werden kann, entnehme man den Literaturhinweisen.

Verbindet man zwei benachbarte Eckpunkte eines regelmäßigen *n*-Ecks miteinander, dann ist der zur *n*-Eck-Seite gehörende Mittelpunktswinkel gleich $\frac{360°}{n}$; die zugehörigen Umfangswinkel sind gleich $\frac{180°}{n}$.

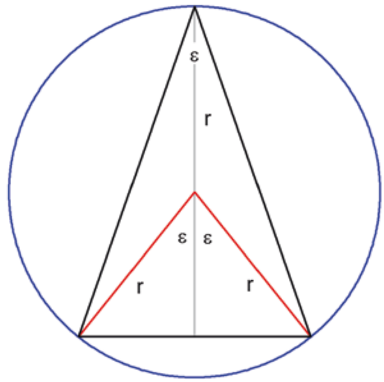


Abb. 1.2 Zusammenhang zwischen Mittelpunkts- und Umfangswinkel in einem symmetrischen Dreieck

Verbindet man einen Eckpunkt eines regelmäßigen n-Ecks mit dem übernächsten Eckpunkt, dann ist der zu dieser Diagonale d_2 zugehörende Mittelpunktswinkel doppelt so groß wie $\frac{360°}{n}$, also gleich $\frac{720°}{n}$, und die zugehörigen Umfangswinkel gleich $\frac{360°}{n}$.

Allgemein ergibt sich:

Regel

Mittelpunkts- und Umfangswinkel über einer Sehne im regelmäßigen n-Eck

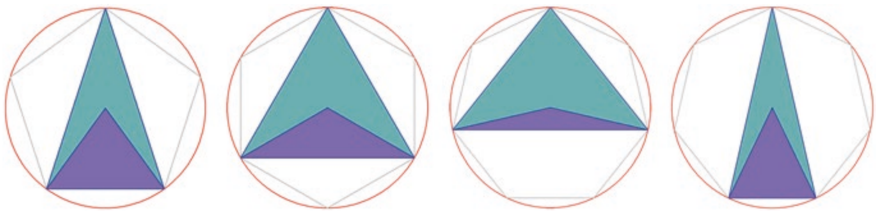
Verbindet man einen Eckpunkt eines regelmäßigen n-Ecks mit dem k-nächsten Eckpunkt, dann ist der zu dieser Diagonale d_k gehörende Mittelpunktswinkel k-mal so groß wie $\frac{360°}{n}$; die zugehörigen Umfangswinkel sind dann gleich $k \cdot \frac{180°}{n}$.

Beispiele für die Winkel in den Zacken von regelmäßigen *n*-zackigen Sternen

- Beim regelmäßigen 5-zackigen Stern liegt die Zacke „über“ einer Seite des 5-Ecks. Daher ist der Winkel ε an der Spitze halb so groß wie der Mittelpunktswinkel des regelmäßigen 5-Ecks. Da der Mittelpunktswinkel eine Winkelgröße von $\frac{360°}{5} = 72°$ hat, gilt für den Winkel in der Zacke des regelmäßigen 5-zackigen Sterns $\varepsilon = \frac{180°}{5} = 36°$, vgl. die erste der folgenden Abbildungen.
- Beim regelmäßigen 6-zackigen Stern liegt die Zacke ebenfalls „über“ einer Diagonale des 6-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem übernächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie $2 \cdot \frac{360°}{6}$, also $\varepsilon = 60°$, vgl. die zweite der folgenden Abbildungen.
- Beim regelmäßigen 7-zackigen Stern {7/2} liegt die Zacke ebenfalls „über“ einer Diagonale des 7-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem drittnächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie $3 \cdot \frac{360°}{7}$, also $\varepsilon \approx 77{,}14°$.

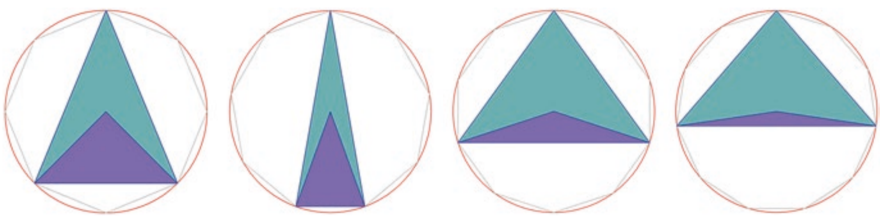
  Dagegen liegt beim Stern {7/3} die Zacke „über“ einer Diagonale des 7-Ecks, die einen Eckpunkt mit dem nächsten Eckpunkt verbindet. Daher ist der

Zackenwinkel ε halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel, nämlich halb so groß wie $1 \cdot \frac{360°}{7}$, also $\varepsilon \approx 25{,}71°$, vgl. die dritte und vierte der folgenden Abbildungen.

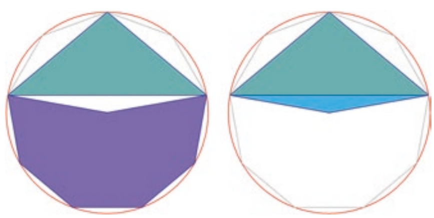


Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

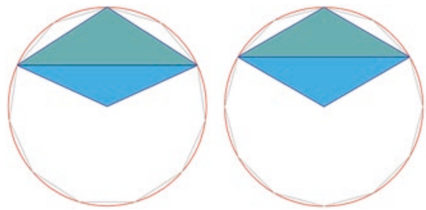
A 1.4: Überlegen Sie anhand der abgebildeten 8-, 9-, 10- bzw. 12-zackigen Sterne, welche Winkelgrößen in den äußeren Zacken der *n*-zackigen Sterne vorliegen.



A 1.5: Bei einem der regelmäßigen 9-zackigen Sterne tritt ein Mittelpunktswinkel auf, der größer als 180° ist. Erläutern Sie anhand der beiden folgenden Abbildungen, wie hier der Winkel in der Zacke berechnet wird.



A 1.6: Auch bei den folgenden regelmäßigen Sternen tritt ein Mittelpunktswinkel auf, der größer als 180° ist. Erläutern Sie jeweils, wie die Winkel in der Zacke berechnet werden.



Aufgrund der Beispiele liegt die Vermutung nahe, dass es einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Winkel ε in der äußeren Zacke und dem Mittelpunktswinkel δ_k über den Diagonalen gibt, welche die Zacke bilden, nämlich $\varepsilon = 180^\circ - \delta_\mathrm{k}$, vgl. folgende Tabelle.

Sterntyp $\{n/k\}$	Mittelpunktswinkel δ_k zu einer Diagonalen d_k	Winkel ε in der äußeren Zacke
{5/2}	144°	36°
{6/2}	120°	60°
{7/2}	102,86°	77,14°
{7/3}	154,29°	25,71°

Dass dies tatsächlich so ist, kann der Abb. 1.3 entnommen werden: Die Zacke wird durch zwei Diagonalen bestimmt, zu denen jeweils der Mittelpunktswinkel δ_k gehört. Gemäß Abschn. 1.3 berechnet sich dieser Winkel als $\delta_k = k \cdot \frac{360^\circ}{n}$. Für die beiden Basiswinkel γ der zugehörigen gleichschenkligen Dreiecke gilt wegen der Winkelsumme im Dreieck $2\gamma + \delta_k = 180^\circ$.

Da der Zackenwinkel ε aber gerade von 2γ gebildet wird, gilt die Behauptung $\varepsilon + \delta_k = 180^\circ$.

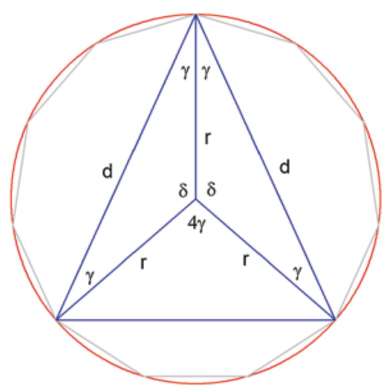


Abb. 1.3 Zur Bestimmung des Winkels $\varepsilon = 2\gamma$ in der Zacke eines regelmäßigen n-Ecks

Regel

Größe der Zackenwinkel in regelmäßigen *n*-zackigen Sternen

Für die Winkelgröße des äußeren Zackenwinkels ε eines regelmäßigen *n*-zackigen Sterns vom Typ $\{n/k\}$ gilt:

$$\varepsilon = 180° - \frac{k \cdot 360°}{n}$$

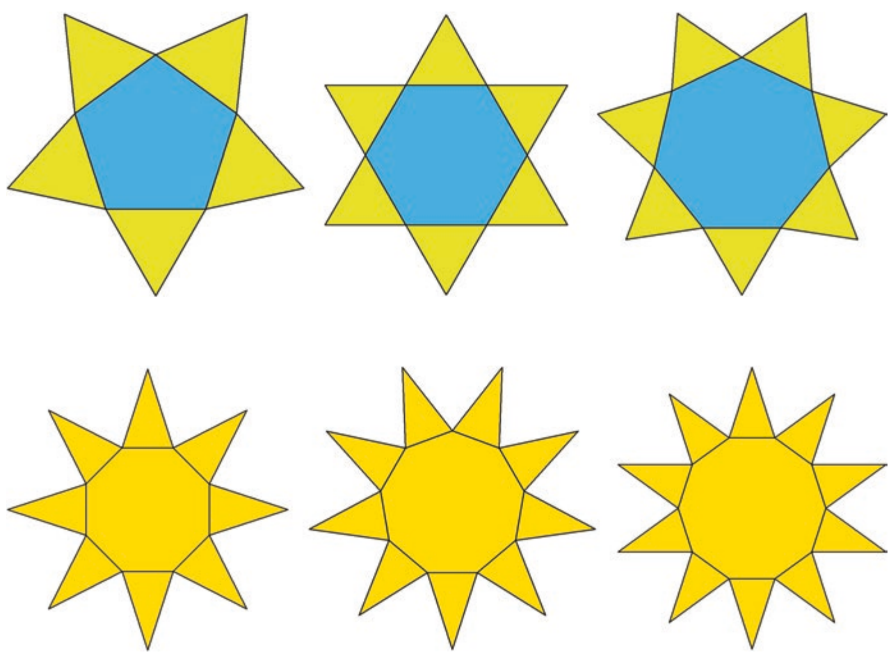
Im Innern eines Sterns vom Typ $\{n/k\}$ treten weitere *n*-zackige Sterne $\{n/m\}$ auf mit $1 < m < k$. Ganz im Innern eines regelmäßigen Sterns liegt außerdem ein regelmäßiges *n*-Eck, für dessen Innenwinkel α gilt: $7 + 9 = 16 = 4^2 = (3 + 4) + (4 + 5)\cdot$

Man kann also die Formel zur Berechnung von ε auf den Fall $k = 1$ erweitern und regelmäßige *n*-Ecke mit dem Schläfli-Symbol $\{n/1\}$ bezeichnen.

Die bisherigen Ergebnisse sind in Tab. 1.1 zusammengefasst.

1.5 Aufgesetzte *n*-zackige Sterne

Im Prinzip kann man regelmäßige *n*-zackige Sterne auch dadurch erzeugen, dass man zunächst ein regelmäßiges *n*-Eck zeichnet, auf dessen Seiten dann gleichschenklige Dreiecke gesetzt werden. In den folgenden Abbildungen wurden gleichseitige bzw. *Goldene* Dreiecke auf die Seiten eines regelmäßigen 5-, 6- und 7-Ecks aufgesetzt. (Gleichschenklige Dreiecke mit Basiswinkel 72°werden als Goldene Dreiecke bezeichnet.)



Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.7: Begründen Sie die Behauptung: Alle regelmäßigen n-zackigen Sterne vom Typ $\{n/2\}$ lassen sich als aufgesetzte n-zackige Sterne auffassen.

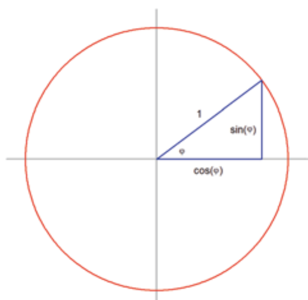
1.6 Regelmäßige *n*-Ecke in der Gauß'schen Zahlenebene

In Abschn. 1.2 wurde erläutert, wie man regelmäßige n-Ecke zeichnen kann. Für diese Zeichnungen wird kein Koordinatensystem benötigt.

In der komplexen Analysis verwendet man oft Darstellungen, bei denen man die sogenannte **Gauß'sche Zahlenebene** zugrunde legt; das ist ein zweidimensionales Koordinatensystem, in dem der Realteil einer komplexen Zahl in horizontaler Richtung und der Imaginärteil in vertikaler Richtung abgetragen wird.

Komplexe Zahlen $z = x + i \cdot y$ werden im Koordinatensystem der Gauß'schen Zahlenebene als Punkte mit den Koordinaten $(x|y)$ eingezeichnet (vgl. Abb. 1.4).

Die Punkte $(x|y)$ des Einheitskreises, also eines Kreises mit dem Radius 1 LE, erfüllen – gemäß dem Satz des Pythagoras – die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$. Bezeichnet man den Winkel zwischen dem Strahl, der zu einem Punkt des Einheitskreises führt, und der x-Achse mit φ, dann lässt sich jeder Punkt auch durch die Koordinaten $(\cos(\varphi)|\sin(\varphi))$ beschreiben.



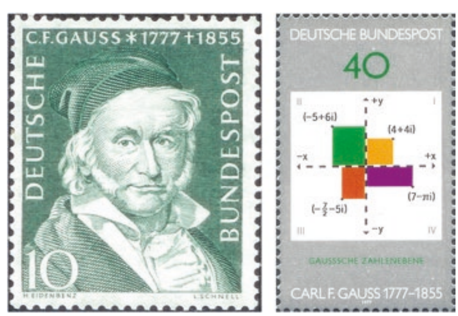


Abb. 1.4 Briefmarken der Deutschen Bundespost zu C. F. Gauß und der Gauß'schen Zahlenebene

Eine Gleichung der Form $z^n = 1$ wird als **Kreisteilungsgleichung** bezeichnet. Nach dem **Fundamentalsatz der Algebra** besitzt eine solche Gleichung genau n Lösungen in der Menge der komplexen Zahlen. In der Gauß'schen Zahlenebene bilden die Lösungen der Kreisteilungsgleichung die Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks (daher die Bezeichnung für die Gleichung).

Der im englischen Exil lebende französische Mathematiker Abraham de Moivre (1667–1754) fand heraus, dass für jede komplexe Zahl $z = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ und für jede natürliche Zahl n gilt:

Formel

Satz von Moivre

$$[\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)]^n = \cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi) \tag{1.2}$$

Daher gilt für jeden Winkel $\varphi = k \cdot \frac{360°}{n}$ mit $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$:

$$\left[\cos\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right) + i \cdot \sin\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right)\right]^n = \cos(k \cdot 360°) + i \cdot \sin(k \cdot 360°) = 1 + i \cdot 0 = 1$$

Das heißt, die n komplexen Zahlen $z_k = \cos\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right) + i \cdot \sin\left(k \cdot \frac{360°}{n}\right)$ erfüllen die Gleichung $z^n = 1$.

Formel

Lösungen der Kreisteilungsgleichung

Die n Lösungen der Kreisteilungsgleichung $z^n = 1$ haben die Form

$$z_k = \cos\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right) + i \cdot \sin\left(k \cdot \frac{360^\circ}{n}\right),$$

wobei $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Zeichnerisch findet man die n Lösungen, indem man vom Ursprung des Koordinatensystems aus n Strahlen unter dem Winkel φ mit $\varphi = k \cdot \frac{360°}{n}$ zeichnet und deren Schnittpunkte mit dem Einheitskreis bestimmt.

In besonderen Fällen kann man die Lösungen der Kreisteilungsgleichungen auch mithilfe elementarer algebraischer Methoden bestimmen, also ohne Verwendung trigonometrischer Funktionen. Dies wird an den Beispielen für $n = 3$, 4 und 5 gezeigt.

Beispiel 1: Lösung der Gleichung $x^3 = 1$

Darstellung mithilfe trigonometrischer Funktionen:

Die kubische Gleichung $z^3 = 1$ hat die drei Lösungen:

$$z_0 = \cos(0°) + i \cdot \sin(0°) = 1$$