RESEARCH

Marieke Roskam

Sichtweisen von Sechstklässlern auf multiplikative Strukturen im Sinne eines Bausteinkonzepts

Eine qualitativ-empirische Studie

Springer Spektrum

Sichtweisen von Sechstklässlern auf multiplikative Strukturen im Sinne eines Bausteinkonzepts

Marieke Roskam

Sichtweisen von Sechstklässlern auf multiplikative Strukturen im Sinne eines Bausteinkonzepts

Eine qualitativ-empirische Studie

Springer Spektrum

Marieke Roskam
Institut für Mathematik
Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Oldenburg, Deutschland

Dissertation an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg,
Oldenburg, 2019
Disputation am: 06.11.2019
Erstprüferin: Prof. Dr. Astrid Fischer
Zweitprüfer: Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf, Beisitz: Prof. Dr. Boris Vertman

Die vollständigen Transkripte können bei der Autorin eingesehen werden.

ISBN 978-3-658-29681-0 ISBN 978-3-658-29682-7 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-29682-7

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen Personen danken, die mich bei der Fertigstellung dieser Arbeit unterstützt und begleitet haben.

Mein größter Dank gilt meiner Doktormutter Prof. Dr. Astrid Fischer für die wertvolle Beratung und die ausgezeichnete Betreuung während meiner Promotionszeit. Mit ihren tiefgehenden Analysen hat sie mein Projekt von Anfang an unterstützt und maßgeblich zur Weiterentwicklung beigetragen. Außerdem danke ich ihr für das sorgfältige und kritische Lesen meines Manuskriptes. Ich habe die inhaltlichen Diskussionen, Ratschläge und Anregungen als sehr bereichernd empfunden und durfte viel von ihr lernen. Vielen Dank!
Prof. Dr. Ralph Schwarzkopf danke ich für die anregenden und konstruktiven Hinweise sowie die stets hilfsbereite Betreuung als Zweitgutachter, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.
Den Mitgliedern meiner Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik an der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg danke ich für ihre Unterstützung. Ein besonderer Dank gilt Dr. Birte Specht, die stets ein offenes Ohr für mich hatte und meine Forschung mit ehrlichem Interesse begleitet hat. Außerdem danke ich Dr. Anna-Lena Barkley und Paul Gudladt für viele anregende Diskussionen und die herzliche Aufnahme und Einführung in die Arbeitsgemeinschaft.

Mein Dank gilt auch allen Lehrkräften, die mir die Möglichkeit zur Erprobung meines Unterrichtskonzepts boten und denjenigen, die den Unterricht durchführten sowie allen Schülerinnen und Schülern, die aktiv an meinen empirischen Untersuchungen mitgewirkt haben. Sie haben mir in den Interviews durch ihre Offenheit und Neugierde interessante Einsichten in ihre Lernwege ermöglicht.
Ebenso möchte ich meiner Familie meinen Dank aussprechen für die moralische Unterstützung, für die Geduld und weiterführenden Impulse. Insbesondere danke ich meinen Eltern, Karin und Hajo Roskam, weil sie mich auf meinem bisherigen Lebensweg stets unterstützt und ermutigt haben, eigene Ideen und Ziele umzusetzen. Darüber hinaus gilt meiner Schwester, Annika Roskam, ein spezieller Dank, die mich ermuntert und bestärkt hat diesen Weg einzuschlagen. Außerdem danke ich Jörn Boll für seine Mithilfe zur Fehlersuche. Abschließend gilt ein besonderer

Dank meinem Partner, Barnim Grüneberg, der mir stets mit Rat du Zuspruch zur Seite stand.

Vielen Dank!

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung ... 1
2 Theoretische Einordnungen ... 5
2.1 Multiplikative Strukturen im Mathematikunterricht ... 5
2.1.1 Darstellungen und Darstellungswechsel ... 6
2.1.2 Abstraktes Denken ... 12
2.1.3 Theorien zur Entwicklung mathematischen Denkens ... 15
2.1.4 Bezüge zur Algebra ... 22
2.1.5 Ausgewählter Forschungsstand ... 33
2.1.6 Zusammenfassung und Bezug zum Forschungsprojekt ... 49
2.2 Mathematisches Begründen in der Schule ... 51
2.2.1 Verhältnis zwischen Argumentieren, Begründen und Beweisen ... 52
2.2.2 Begründungsformen ... 60
2.2.3 Herausforderungen für Schülerinnen und Schüler beim Begründen ... 64
2.2.4 Aktueller Forschungsstand ... 68
2.2.5 Zusammenfassung und Bezug zum Forschungsprojekt ... 79
2.3 Unterrichtsplanung ... 81
2.3.1 Lerntheoretische Annahmen ... 82
2.3.2 Lehrtheoretische Annahmen ... 85
2.4 Forschungsfragen ... 86
3 Methodologie und Methodik ... 89
3.1 Anforderungen an die Studie und Grundentscheidungen ... 89
3.2 Didaktische Rekonstruktion ... 92
3.2.1 Komponenten der didaktischen Rekonstruktion ... 94
3.2.2 Folgerungen für die vorliegende Studie ... 95
3.3 Design-based Research ... 96
3.4 Interviews als qualitative Methode ... 99
3.5 Methode des lauten Denkens ... 102
4 Design der Studie ... 105
4.1 Ablauf der Studie ... 105
4.1.1 Zyklen der Untersuchung ... 105
4.1.2 Entstehungskontext des Datenmaterials ... 109
4.2 Fachliche Klärung ... 111

4.2.1 Curriculare Vorgaben ... 111
4.2.2 Vorstellungen zur Multiplikation ... 113
4.2.3 Vielfache und Teiler ... 116
4.2.4 Primzahlen und Primfaktorzerlegung ... 119
4.3 Konzeptionelle Überlegungen für die Lernumgebung und erste empirische Erprobung ... 122
4.3.1 Zahlen als Produkte ... 123
4.3.2 Pilotierung ... 128
4.3.3 Transformationseigenschaften der Primfaktorzerlegung ... 131
4.3.4 Begründungen für Teilbarkeitsbeziehungen ... 134
4.4 Konzeption der Interviewleitfragen ... 139
5 Analyseverfahren ... 143
5.1 Auswertungsmethodik ... 143
5.1.1 Analyseinstrument in Anlehnung an die Theorie der konzeptuellen Felder ... 143
5.1.2 Analyseinstrument in Anlehnung an die qualitative Inhaltsanalyse ... 148
5.2 Analyseprozess und exemplarische Analysen ... 152
5.2.1 Rekonstruktion von Gedankengängen ... 154
5.2.2 Prozess der Analyse der Sichtweisen zum multiplikativen Strukturverständnis und zur Logikauffassung nach der Rekonstruktion von Gedankengängen ... 157
5.2.3 Exemplarische Analyse von Zusammenhängen zwischen der Logikauffassung und dem Strukturverständnis ... 159
5.2.4 Exemplarische qualitative Inhaltsanalyse eines Schülerdokuments ... 161
6 Ergebnisse ... 163
6.1 Sichtweisen auf multiplikative Strukturen ... 163
6.1.1 Zerlegen in (kleinste) Bausteine ... 164
6.1.2 Konstruieren mit (kleinsten) Bausteinen ... 167
6.1.3 Umsortieren mit (kleinsten) Bausteinen ... 169
6.2 Logikauffassungen und Argumentationsmuster ... 171
6.2.1 Logikauffassungen ... 171

6.2.2 Argumentationsmuster ... 172
6.3 Lernverlauf am Fallbeispiel: Schülerin Henrike ... 175
6.3.1 Begründungsaussage B1 ... 175
6.3.2 Begründungsaussage B2 ... 181
6.3.3 Zusammenfassung ... 183
6.4 Zusammenhänge zwischen der Logikauffassung und dem Strukturverständnis ... 187
6.4.1 Vom Zerlegen zum Zerlegen ... 188
6.4.2 Vom Zerlegen zum Konstruieren ... 189
6.4.3 Vom Zerlegen zum Zerlegen und Konstruieren (isoliert) ... 189
6.4.4 Vom Zerlegen zum Umsortieren ... 189
6.4.5 Vom Konstruieren zum Konstruieren ... 190
6.4.6 Vom Konstruieren zum Umsortieren ... 190
6.4.7 Vom Umsortieren zum Konstruieren und vom Umsortieren zum Umsortieren ... 191
6.4.8 Zusammenfassung ... 191
6.4.9 Ausnahmen ... 192
6.5 Herausforderungen ... 192
6.6 Bedeutung für die Unterrichtspraxis ... 197
6.7 Rückschau auf die Forschungsfragen ... 200
7 Zusammenfassung und Ausblick ... 211
Literaturverzeichnis ... 215

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Das epistemologische Dreieck nach STEINBRING 16
Abb. 2: Modell zum Verhältnis zwischen Argumentieren, Begründen und Beweisen 58
Abb. 3: Wechselseitige Abhängigkeit von langfristiger und konkreter Unterrichtsplanung 81
Abb. 4: Schematische Übersicht zur Wissensorganisation 83
Abb. 5: Übersicht der Forschungsfragen zur Erforschung von Schülerdenkprozessen im arithmetischen Kontext des konzipierten Mathematikunterrichts in der vorliegenden Studie................ 87
Abb. 6: Übersicht der Unterforschungsfragen zur Entwicklung von Mathematikunterricht 88
Abb. 7: Das Modell der didaktischen Rekonstruktion...................................... 93
Abb. 8: Zyklus der fachdidaktischen Entwicklungsforschung im Dortmunder Modell 99
Abb. 9: Zyklischer Ablauf des Design-based Research in der vorliegenden Studie.. 106
Abb. 10: Wochenübersichten über den Zeitraum der einzelnen Datenerhebungen mit Phasen des Unterrichts (ohne Datenerhebungen) sowie Phasen der Erhebungen 109
Abb. 11: Zeitlich-sukzessiver Prozess 114
Abb. 12: Links: Räumliche Anordnung zweier Mengen, die jeweils aus drei Plättchen besteht und somit 2·3 erfasst; Rechts: Punktefeld, welches spaltenweise gedeutet: 4·3 und zeilenweise interpretiert: 3·4 darstellt 114
Abb. 13: Zerlegungsbäume für die Zahl 20 121
Abb. 14: Mögliches Tafelbild (TB1) zur Einstiegsphase auf linker Tafelhälfte, in kursiv: zeitweiser (optionaler) Tafelanschrieb 124
Abb. 15: Mögliches Tafelbild (TB2) nach der Sicherungsphase I 126
Abb. 16: Mögliches Tafelbild (TB3) nach der Sicherungsphase II 127
Abb. 17: Mögliches Tafelbild zur Einstiegsphase, in fett: farbige Hervorhebungen an der Tafel 132

Abb. 18: Mögliches Tafelbild zur ersten Sicherungsphase, in fett: farbige Hervorhebungen an der Tafel ... 133
Abb. 19: Mögliches Tafelbild nach der Einstiegsphase in der Tafelmitte ... 136
Abb. 20: Mögliches Tafelbild nach der Sicherungsphase I ... 137
Abb. 21: Schülerlösung mit Beispielen (links) und mit ‚…' als Platzhalter (rechts) ... 140
Abb. 22: Zusammenspiel Auffassungen-in-Aktion und Theoreme-in-Aktion beim Ablauf einer epistemischen Handlung ... 147
Abb. 23: Ablauf der gewählten qualitativen Inhaltsanalyse ... 151
Abb. 24: Grafische Darstellung beider Spannungsfelder zur Logikauffassung ... 171
Abb. 25: Begründungskontexte zu den gewählten Zeitpunkten ... 187
Abb. 26: Übersicht von Herausforderungen, die während der Interviews aufgetreten sind ... 194
Abb. 27: Individuelle Darstellung mehrschrittiger Gleichheitsketten (links) und Vermischung verschiedener Darstellungsformen (rechts) zur Argumentation der Aussage B2 ... 196

1 Einleitung

Ein zentrales Element für die Mathematik stellen *Strukturen* dar, insbesondere die Entwicklung und Förderung eines ‚Struktursinns'. In der Fachliteratur zur Didaktik der Algebra wird die Ausbildung eines solchen Struktursinns vielfach betont. Es gibt viele Arbeiten, welche Schwierigkeiten der Algebra betonen, insbesondere beim Erkennen und im Umgang mit Strukturen (siehe beispielsweise HOCH und DREYFUS, 2004, 2010). Die Fachdidaktik ist sich darüber einig, dass für das Erfassen und den Umgang mit Strukturen in der Algebra ein hohes Maß an Abstraktion erforderlich ist. Darüber hinaus gibt es viele Ansätze, insbesondere im Primarbereich, um algebraisches Denken bereits in der Arithmetik anzubahnen. Hierbei wird vor allem in additiven arithmetischen Kontexten und anhand von konkreten Objekten gearbeitet (siehe beispielsweise SÖBBEKE, 2005, LÜKEN, 2012 oder KUHNKE, 2013). Der vorliegende Forschungsansatz reiht sich ebenfalls in prä-algebraische Überlegungen ein, unterscheidet sich jedoch im Abstraktionsgrad des gewählten Kontextes zum Arbeiten mit Strukturen. Hier steht der multiplikative Zusammenhang im Fokus. Multiplikative Strukturen werden gemäß einem Bausteinkonzept aufgefasst, dessen ‚Grundbausteine' die Primzahlen darstellen, und eine Deutung von Produkten mit mehreren Faktoren wird notwendig. Hier wird abstrakteres Denken benötigt. Im Gegensatz hierzu können additive Strukturen noch als konkrete Objekte interpretiert werden: Zum Beispiel können Anzahlen von Steinen für eine Mauer konkret am Gegenstand abgezählt werden. Multiplikative Strukturen sind von solch einer gegenständlichen Betrachtungsweise losgelöst. Sie setzen sich aus den additiven Strukturen zusammen und sind somit strukturell komplexer. So kann das Produkt ‚3·4' oder ‚2·3·3' zwar noch als Summe von Rechtecken oder mit Punktefeldern anschaulich dargestellt werden, sobald aber weitere Faktoren hinzukommen, wird eine gegenständliche Deutung problematisch.

Die Kernidee der Studie besteht darin, ein Unterrichtskonzept zur Ausbildung eines ‚Prä-algebraischen Struktursinns' zu entwickeln und zu erproben. Das Unterrichtskonzept soll zum algebraischen Denken in der Arithmetik anregen und sich von konkreten Anschauungen ablösen, um prä-algebraisches Denken in abstrakterer Form anzuregen.

M. Roskam, *Sichtweisen von Sechstklässlern auf multiplikative Strukturen im Sinne eines Bausteinkonzepts*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-29682-7_1

Hierfür ist es notwendig Schülerdenkprozesse im Kontext von abstrakteren Strukturen zu erforschen. Somit besteht ein Forschungsinteresse darin, Einblicke in Denkprozesse von Schülerinnen und Schülern und ihre Sichtweisen auf abstraktere Strukturen zu erhalten, um Rückschlüsse für die Entwicklung von Mathematikunterricht zu ziehen. Um jedoch solche Schülerdenkprozesse zu erforschen, müssen Kontexte geschaffen werden, in denen die Schülerinnen und Schüler zu dieser Art Denkprozesse angeregt werden. Dies geschieht in der vorliegenden Arbeit durch Lernumgebungen zu multiplikativen Strukturen. Das heißt, die Analyse von Denkprozessen und die Entwicklung von Unterricht stehen im Wechselspiel zueinander. Die Identifikation von Defiziten und Fehlvorstellungen der Lernenden werden in der vorliegenden Studie nicht fokussiert, sondern es geht darum das Potenzial von subjektiven und individuellen Vorstellungen aufzuzeigen. Es werden Lernangebote unter konstruktivistischer Auffassung konzipiert und im Unterricht erprobt. Für die Analyse von Denkprozessen der Lernenden werden Gedankengänge rekonstruiert und interpretiert. Die aufgezeigten Denkweisen bieten somit neue Anknüpfungspunkte zur Weiterentwicklung von Unterrichtskonzeptionen und leisten einen Beitrag zur fachdidaktischen Unterrichtsentwicklung. Im Folgenden wird ein Überblick über den inhaltlichen Aufbau der Arbeit gegeben.

Im *ersten Kapitel* werden theoretische Grundlagen betrachtet. Der Theorieteil gliedert sich in drei Hauptabschnitte, welche für die vorliegende Studie von Relevanz sind. Zuerst (siehe Kapitel 2.1) werden Theorien zur Entwicklung mathematischen Denkens fokussiert. Eine besondere Rolle spielt dabei das abstrakte Denken. Hierzu werden theoretische Überlegungen zu Darstellungen aufgezeigt, da nur durch Darstellungen ein Zugang zu mathematischen Objekten möglich ist. Darüber hinaus werden Herausforderungen in der Algebra diskutiert, die auch im Forschungskontext der vorliegenden Arbeit auftreten. Der erste Hauptabschnitt schließt mit der Darlegung eines ausgewählten Forschungsstands im Bereich des Entwickelns eines (algebraischen) Struktursinns und zeigt Beziehungen und Anknüpfungspunkte für die vorliegende Studie auf. Die ersten Forschungsfragen werden untergeordnet zur ersten Hauptfrage: *Wie strukturieren Sechstklässler im arithmetischen Kontext multiplikative Ausdrücke?* entwickelt. Im zweiten Hauptabschnitt des ersten Kapitels (siehe Kapitel 2.2) wird das Begründen näher betrachtet. Die Begriffe ‚Argumentieren', ‚Begründen' und ‚Beweisen' werden ins Verhältnis zueinander gesetzt und Begründen wird als Oberbegriff festgesetzt. In dieser Arbeit hat das Begründen zwei Hauptfunktionen: Zum einen werden Begründungen von Lernenden gefordert, um Denkweisen von Schülerinnen und Schülern sichtbar zu machen und eine Rekonstruktion zu ermöglichen. Zum anderen wird das Begründen als lernförderlich erachtet, da es zur tiefen Auseinandersetzung mit fachlichen Inhalten anregt. Darüber hinaus werden verschiedene Begründungsformen dargestellt und hinsichtlich ihrer Relevanz für das Forschungsprojekt untersucht. Nachfolgend werden Herausforderungen und der Nutzen von Begründungen im Mathematikunterricht dargelegt und gegenübergestellt. Der zweite Hauptabschnitt des Theorieteils schließt ebenfalls mit einer Darlegung des ausgewählten Forschungsstands von Herausforderungen beim Begründen sowie von Unterrichtsideen für die Entwicklung von Begründungskompetenzen. Auf dieser Grundlage werden für die Studie weitere Forschungsfragen untergeordnet zu der Hauptforschungsfrage: *Inwieweit nutzen Sechstklässler die multiplikativen Strukturen in ihrer Begründung?* entwickelt. Der dritte Theorieteil (siehe Kapitel 2.3) fasst Annahmen für die Entwicklung und Planung von Unterricht zusammen und bildet damit eine lern- und lehrtheoretische Grundlage für die Konzeption der Unterrichtseinheit in der vorliegenden Arbeit. Der Theorieteil schließt mit einem vierten Abschnitt (siehe Kapitel 2.4), welcher eine Übersicht der Forschungsschwerpunkte und Forschungsfragen aufzeigt.

Im *zweiten Kapitel* werden methodologische Fragestellungen und methodische Grund-entscheidungen erläutert. Es wird dargelegt, welches Untersuchungsdesign gewählt wurde und welche Vor- und Nachteile eine Interviewstudie bietet. Der Aufbau der Studie orientiert sich am Design-based Research Konzept und gliedert sich somit in unterschiedliche Zyklen. Jeder Zyklus besteht aus konstruktiven Anteilen (konzeptionelle Überlegungen für Unterrichtsplanungen) sowie rekonstruktiven Anteilen (Analyse von rekonstruierten Gedankengängen). Außerdem wird das Modell der didaktischen Rekonstruktion vorgestellt, welches einen Rahmen für die Unterrichtsplanung in den einzelnen Zyklen der Studie bildet.

Im *dritten Kapitel* wird der Ablauf der Studie sowie die didaktische Rekonstruktion für den Unterricht dargestellt. Dazu zählen zum einen die fachliche Klärung von Inhalten multiplikativer Strukturen und zum anderen eine erste empirische Erprobung von Unterricht, um Einsichten in Schülerdenkweisen zu gewinnen. Darüber hinaus werden konzeptionelle Überlegungen der Unterrichtseinheiten in den jeweiligen Zyklen betrachtet. Neben der didaktischen Rekonstruktion wird die Auswahl von Interviewaufgaben für die Studie dargelegt.

Das *vierte Kapitel* stellt methodische Grundlagen für die Auswertung und Analyse dar. Es werden theoretische Überlegungen in Anlehnung an die Theorie nach VERGNAUD sowie zur qualitativen Inhaltsanalyse nach MAYRING ausgeführt und exemplarische Interviewausschnitte und Schülerdokumente zur Illustration des Analysevorgehens aufgezeigt.

Ergebnisse der empirischen Analyse werden im *fünften Kapitel* vorgestellt. Es werden Sichtweisen auf multiplikative Strukturen charakterisiert, ebenso wie verschiedene Argumentationsmuster und Logikauffassungen der Lernenden. Darüber hinaus wird ein Lernverlauf am Fallbeispiel betrachtet und diskutiert. Des Weiteren werden Zusammenhänge zwischen der Struktureinsicht und der Auffassung von Begründungen der Schülerinnen und Schüler herausgearbeitet. Anschließend werden Herausforderungen dargelegt, die im Verlauf der Studie im Themenbereich der multiplikativen Strukturen aufgetreten sind und es werden Konsequenzen für den Unterricht hergeleitet. Den Abschluss des Kapitels bildet eine Zusammenfassung der zentralen Ergebnisse durch die Beantwortung der Forschungsfragen und eine Diskussion unter Berücksichtigung des dargelegten Forschungstands.

Abschließend (im *sechsten Kapitel)* werden getroffene Grundentscheidungen reflektiert und es wird ein Ausblick für mögliche anschließende Forschungsprojekte gegeben.

2 Theoretische Einordnungen

In den nachfolgenden Kapiteln werden zuerst theoretische Grundlagen im Inhaltsbereich der multiplikativen Strukturen betrachtet (siehe Kapitel 2.1). Nachfolgend werden die Begriffe Argumentieren, Begründen und Beweisen näher definiert und grundlegende theoretische Überlegungen dazu dargestellt (siehe Kapitel 2.2). Des Weiteren werden lern- und lehrtheoretische Annahmen zur Unterrichtsplanung dargelegt (siehe Kapitel 2.3). Abschließend werden die Forschungsfragen für das vorliegende Projekt in einer Übersicht zusammengefasst (siehe Kapitel 2.4).

2.1 Multiplikative Strukturen im Mathematikunterricht

Ein zentrales Anliegen im Mathematikunterricht stellt das Strukturieren und die Entwicklung eines ‚Struktursinns' dar. In der Grundschule stehen additive Strukturen und ihr Zusammenhang zur Multiplikation im Fokus. Beim Vergleich der Bildungsstandards zeigt sich, dass in der Grundschule der Bereich *Muster und Strukturen* übergeordnet inhaltsbezogen Kompetenzen zur Entwicklung eines Struktursinns[1] formuliert. Im Gegensatz dazu tritt in der Sekundarstufe I kein eigenständiger Kompetenzbereich ‚Muster und Strukturen' mehr auf und es werden in anderen Kompetenzbereichen kaum oder keine Bezüge zur Entwicklung eines Struktursinns hergestellt. Auch im niedersächsischen Kerncurriculum (NDS.KC) der Grundschule zeigt sich, dass in diesem die Ausbildung eines Struktursinns stark verankert ist[2], wohingegen im NDS.KC für den Doppeljahrgang 5 und 6 kaum Verortungen zu finden sind[3]. Die Kompetenz zur Entwicklung eines Struktursinns wird erst wieder in den Jahrgangsstufen 7 und 8 im Bereich der Algebra fokussiert. Es ist sinnvoll diese Lücke zu schließen und die Entwicklung eines Struktursinns in den Klassenstufen 5 und 6 fortzusetzen. In der vorliegenden Studie ist ein solches Unterrichtskonzept entwickelt und erprobt worden. Für die Konzeption einer anregenden Lernumgebung in den Klassenstufen 5 und 6 stellen sich

[1] An dieser Stelle wird der Begriff ‚Struktursinn' von der Autorin zunächst als ‚Blick für Strukturen' aufgefasst. Im Folgenden wird ‚Struktursinn' in Anlehnung an Definitionen von HOCH und DREYFUS (2004, 2010) näher charakterisiert.

[2] siehe beispielsweise: NDS.KC, 2017, S.9 f., S.27 f., S.30, S.33 f., S.36.

[3] siehe in Ansätzen: NDS.KC, 2015, S. 37, S. 39 oder S.42.

M. Roskam, *Sichtweisen von Sechstklässlern auf multiplikative Strukturen im Sinne eines Bausteinkonzepts*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-29682-7_2

zwei zentrale Ansprüche an die Lernumgebung: Einerseits sollen sich die Schülerinnen und Schüler mit einem interessanten und zur Ausbildung eines Struktursinns tragfähigen Thema befassen. Andererseits soll Denken angeregt werden, welches über bisheriges Denken hinausgeht und im Abstraktionsgrad[4] zunimmt. Als besonders geeignet bietet sich hierfür der Themenbereich *Umgang mit natürlichen Zahlen* an, insbesondere der Umgang mit *multiplikativen Strukturen*. Das Thema bietet einerseits Anknüpfungspunkte an die Grundschulerfahrungen, indem es auf arithmetischen Darstellungen aufbaut. Andererseits bietet es einen Kontext, der im Abstraktionsgrad gegenüber additiven Zusammenhängen zunimmt, da multiplikative Strukturen strukturell komplexer aufgebaut werden. Multiplikative Strukturen werden hierbei im Sinne eines Bausteinkonzepts aufgefasst, dessen elementare Bausteine die Primzahlen darstellen. Die Primfaktorzerlegungen bilden damit das ‚Gerüst' für natürliche Zahlen und somit steht der Umgang mit Produkten (bestehend aus mehreren Faktoren) im Fokus.
Aus diesem Grund wird zuerst die Bedeutung von Darstellungen für die Epistemologie abstrakten Denkens vorgestellt. Des Weiteren werden Theorien zur Entwicklung mathematischen Denkens betrachtet. Darüber hinaus werden Bezüge von multiplikativen Strukturen im arithmetischen Forschungskontext zur Algebra herausgearbeitet, ein ausgewählter Forschungsstand dargelegt und eine kurze Zusammenfassung sowie Beziehungen zum Forschungsprojekt aufgezeigt. Abschließend werden die ersten Forschungsfragen entwickelt.

2.1.1 Darstellungen und Darstellungswechsel

Darstellungen besitzen in der Mathematik eine besondere Rolle. Für das vorliegende Forschungsprojekt sind die Ausführungen DUVALs von besonderem Interesse, da die Thematik der Primzahlen auf formalen arithmetischen Darstellungen aufbaut und DUVAL Lernen und Herausforderungen im Mathematikunterricht hinsichtlich des Umgangs mit Darstellungen und Darstellungswechseln intensiv betrachtet. DUVAL führt aus, dass es zuerst notwendig ist mathematisches Denken genauer zu analysieren, um Schwierigkeiten von Lernenden im Mathematikunterricht zu untersuchen und zu beschreiben. Hierfür beschreibt er die Differenz zwischen mathematischen kognitiven Aktivitäten und denen anderer Wissensge-

[4] Für weitere Ausführung hinsichtlich abstraktem Denken siehe Abschnitt 2.1.2.

biete mithilfe von drei Charakteristika: (1) *die besondere Bedeutung von semiotischen Repräsentationen*, (2) *den paradoxen Zugang zu mathematischem Wissen* und (3) *der großen Vielfalt semiotischer Repräsentationen in Mathematik*, auf welche im Folgenden eingegangen wird. (ebd., 2006)

(1) *Die besondere Bedeutung von semiotischen Repräsentationen*:
Die Hauptfunktion symbolischer Darstellungen besteht nicht nur darin, die Darstellung als Abbildung für das mathematische Objekt selbst zu sehen, sondern in der Fähigkeit einige Zeichen[5] durch andere Zeichen zu ersetzen (ebd., S.106). Diese Eigenschaft (Zeichen durch andere zu ersetzen) bildet das ‚Herz der mathematischen Tätigkeiten' (ebd., S.107). Das heißt, mathematische Objekte können nicht nur mit Zeichen beschrieben werden und Zeichen dienen nicht nur als Mittel zur Kommunikation über mathematische Objekte, sondern ihr Nutzen besteht vor allem in der Möglichkeit symbolische Darstellungen in andere Darstellungen zu überführen. (ebd.)
Ein Beispiel aus dem Thema der multiplikativen Strukturen ist eine Primfaktorzerlegung, welche durch Zahlbeziehungen wie ‚2·2·3' beschrieben wird. Insbesondere kann dieser Zugang verändert und transformiert werden: Beispielsweise kann das Zeichen ‚2·2·3' zu ‚2·6', ‚4·3' oder ‚12' werden.
(2) *Der paradoxe Zugang zu mathematischem Wissen*:
Der einzige Zugang zum mathematischen Objekt ist ein symbolischer. Daher kann ein Zugang zum mathematischen Objekt nur über semiotische Repräsentation hergestellt werden, um mit ihm zu arbeiten. Gleichzeitig darf das mathematische Objekt aber nicht mit der semiotischen Repräsentation verwechselt werden. Dieses Paradoxon stellt eine zentrale Herausforderung im Verständnis von Mathematik dar. (ebd., S.107)
Multiplikative Strukturen können somit nur durch semiotische Repräsentationen in den Blick genommen werden: das Zeichen ‚2·2·3' bietet einen Zugang zu den multiplikativen Strukturen, darf aber selbst nicht mit ihnen verwechselt werden.

---

[5] In dieser Arbeit werden Zeichen, semiotische Repräsentationen und Symbole als Inskriptionen verstanden, welche bestimmten Konventionen folgen. Darstellungen umfassen Zeichen, Symbole und semiotische Repräsentationen. Alle drei können als Ikon interpretiert werden, welches eine Relation darstellt, oder als Index, welches auf das dahinterstehende mathematische Objekt verweist. Es wird angenommen, dass Zeichen, Symbole und semiotische Repräsentationen nicht nur materiell sein können, sondern auch Gedanken oder Gefühle beinhalten. Jedoch besitzen sie einen wahrnehmbaren Charakter. Demnach sind auch Darstellungen wahrnehmbar, aber nicht zwangsweise materiell. (in Anlehnung an DÖRFLER, 2006, S.210)

(3) *Die große Vielfalt semiotischer Repräsentationen*:
Mathematische Tätigkeiten brauchen im Gegensatz zu anderen Wissensgebieten verschiedene semiotische Systeme oder auch Kombinationen von ihnen. Eine Schwierigkeit für Lernende besteht hier vor allem in der Identifikation desselben mathematischen Objekts in verschiedenen semiotischen Systemen. (ebd., S.108) So kann ‚2·2·3‘ beispielsweise das Ergebnis ‚12‘ repräsentieren, ebenso wie ein Punktefeld mit einer Anordnung von zweimal sechs Punkten. Diese Repräsentationen stehen in diesem Fall beide für die Zahl 12 und müssen von Lernenden als solche identifiziert werden.

Aus diesen Merkmalen mathematischen Denkens ergibt sich eine zentrale Besonderheit der Mathematik vor allem durch die Beziehung zwischen Darstellung und dem eigentlich Dargestellten (dem mathematischen Objekt). Um mit mathematischen Objekten zu arbeiten, ist eine Darstellung notwendig. Das heißt, ohne eine Darstellung kann nicht mit dem Dargestellten gearbeitet werden. In diesem Sinne beschreibt SFARD (2008) Mathematik als ‚virtual reality‘- eine Realität, die außerhalb unserer Wahrnehmung liegt und nur durch Stellvertreter zugänglich wird[6]. Daher ist eine Diskussion über mathematische Objekte nur durch symbolische Stellvertreter möglich. (vgl. auch DUVAL, 2000, 2006) Aus diesem Grund benötigt eine Kommunikation von multiplikativen Strukturen Repräsentationen. In der Grundschule wird Multiplikation noch mit anschaulichen Darstellungen (häufig mit Rechtecksfeldern als wiederholte Addition) eingeführt (siehe Abschnitt 4.2.2) und in der Sekundarstufe I wird Multiplikation mit Zahlbeziehungen zugänglich. Der Zugang wird abstrakter[7]. Es stellt sich die Frage, wie mit multiplikativen Strukturen gearbeitet werden kann. Das heißt, auf welche (verschiedenen) Weisen sie dargestellt werden können, um mit ihnen zu arbeiten. Zum einen, um überhaupt einen Zugang zu multiplikativen Strukturen im Unterricht zu ermöglichen. Zum anderen, um eine Auseinandersetzung mit ihnen durch das Arbeiten mit verschiedenen Darstellungen anzuregen.

Eine weitere Herausforderung im Mathematikunterricht stellt das Erkennen einer Darstellung für etwas Dargestelltes dar. Den Grund dafür sieht SFARD (2000)

[6] Hierfür beschreibt sie beispielsweise: „Metaphorically speaking, the mission of the analyst of mathematical discourse who tries to forget her own ways with mathematical words is thus not unlike that of a hypothetical investigator of a virtual reality game who does not, herself, have access to the perceptual experiences of the players“ (SFARD, 2008, S.130).

[7] Für eine Ausführung des Begriffs ‚abstrakt‘ siehe nachfolgenden Abschnitt 2.1.2

darin, dass Darstellungen häufig mit dem mathematischen Objekt gleichgesetzt und nicht voneinander getrennt werden. Des Weiteren wird durch die fehlende Differenzierung zwischen Objekt und Darstellung der Wechsel zwischen Darstellungen erschwert, denn das mathematische Objekt in verschiedenen Darstellungen zu erkennen, ohne Bewusstsein über die Existenz des mathematischen Objekts losgelöst von einer konkreten Darstellung, stellt eine Schwierigkeit dar (ebd.). Beispielsweise kann die Beschreibung einer ‚geraden Zahl' fest an die Darstellung eines Punktefeldes gebunden sein. So kann es schwierig werden von der verbalen Sprechweise einer ‚geraden Zahl' eine arithmetische Darstellung ‚2·3·5' oder ‚2·…' zu interpretieren und das mathematische Objekt in beiden Darstellungen (das Punktefeld sowie die arithmetische Notation) zu deuten. Hier könnte für die Interpretation das Abzählen der Seiten eines Punktefeldes verwendet werden, um das Zeichen ‚2·…' im Punktefeld zu erkennen.

Um eine solche Verwechslung zu vermeiden, betont DUVAL (2006) die Relevanz von Darstellungswechseln. In seiner Theorie beschreibt er das Arbeiten in verschiedenen ‚semiotischen Registern'. Diese werden im Zuge der vorliegenden Arbeit mit ‚Darstellungsformen' gleichgesetzt. Er führt ein strukturelles mathematisches Begriffsverständnis auf das Arbeiten mit verschiedenen Darstellungen und vor allem den Darstellungswechsel zurück. Durch das Herstellen von Beziehungen zwischen verschiedenen Darstellungsformen und das Identifizieren desselben mathematischen Objekts in verschiedenen Darstellungen soll unterbunden werden, das mathematische Objekt selbst mit den Darstellungen zu verwechseln. Außerdem wird durch einen Darstellungswechsel verhindert, dass derselbe Begriff in verschiedenen Darstellungen als verschiedene Begriffe aufgefasst wird, und die Darstellungsformen werden verbunden. Falls zwischen ihnen keine Verknüpfung hergestellt wird, bezeichnet DUVAL dieses als ‚aus kleinen, isolierten Teilen bestehend' (übersetzt aus dem engl. „*compartmentalized*", ebd., S.124). Daher stellt er die Anforderung an eine Lehrkraft, nicht die am leichtesten zugängliche Darstellung für den Unterricht auszuwählen, sondern Lernende in einem Aufbau von Fähigkeiten zum Wechseln zwischen Darstellungen zu unterstützen und damit ein (tragfähiges) Begriffsverständnis auszubilden. (ebd.)

Aus diesem Grund sind verschiedene Darstellungsformen (arithmetische, verbale und geometrische) für multiplikative Strukturen im Unterrichtskonzept integriert und ihr Wechsel bei der Konzeption berücksichtigt worden. Insbesondere der Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen von multiplikativen Strukturen führt zu einem tieferen Verständnis von multiplikativen Strukturen, indem dasselbe mathematische Objekt mehrfach in verschiedenen Arten interpretiert wird. Ansätze für verschiedene Darstellungsmöglichkeiten von multiplikativen Strukturen sind im Unterrichtskonzept (siehe Kapitel 4.3) ausgeführt.

Beim Darstellungswechsel differenziert DUVAL zwei Arten: Den Wechsel innerhalb eines semiotischen Registers („*treatments*“, ebd., S.111) sowie den Wechsel zwischen verschiedenen semiotischen Registern („*conversions*“, ebd., S.112). Den Wechsel zwischen verschiedenen semiotischen Registern erachtet er als anspruchsvoller und als eine größere Herausforderung für Lernende (ebd.). Diese Einordnung scheint nicht immer zuzutreffen. Der Anspruch hängt dabei nicht nur von der Art des Darstellungswechsels ab, sondern vor allem vom Grad der Vertrautheit der verwendeten Darstellungen. Im Folgenden werden Beispiele für beide genannten Darstellungswechsel betrachtet:

- ‚Conversions‘: Eine verbale Äußerung ‚Eine Zahl ist durch zwei teilbar.‘ wird in einen arithmetischen Ausdruck ‚2·…‘ übersetzt. Allerdings kann die Äußerung auch in eine arithmetische Darstellung der Art ‚12:2=6 mit Rest: 0‘ überführt werden und je nach Vorerfahrung der Lernenden kann eine Überführung in eine solche Darstellungsform leichter sein, als der Darstellungswechsel im nachfolgenden Beispiel.
- ‚Treatments‘: Ein arithmetischer Ausdruck ‚4·3‘ wird in einen anderen arithmetischen Ausdruck ‚2·6‘ übersetzt. Bei diesem Darstellungswechsel spielt das Umdeuten einer Struktur des Ausdrucks ‚4·3‘ eine zentrale Rolle, beispielsweise könnte ‚4·3=(2·2)·3=2·2·3=2·(2·3)=2·6‘ gedeutet werden. Die einzelnen Schritte können ebenfalls je nach Kenntnisstand und Erfahrungen der Lernenden schwierig sein, da ein neuer Blick auf den arithmetischen Ausdruck eingenommen werden muss. Leichter wäre beispielsweise die Übersetzung des Ausdrucks ‚2·3‘ in eine ‚6‘, da dieser Wechsel auf Vorerfahrungen der Lernenden zurückgreift.

Zu beachten bleibt, dass aufgrund erfolgreicher Darstellungswechsel nicht automatisch auf ein mathematisches Verständnis geschlossen werden kann (siehe beispielsweise PRESMEG & NENDURADU, 2005).

Es zeigt sich, dass Darstellungen notwendig sind, um einen Zugang zu multiplikativen Strukturen zu erhalten. Des Weiteren sind Darstellungswechsel von besonderer Bedeutung zur Anregung von kognitiven Prozessen und somit auch von Lernprozessen. Die Auseinandersetzung mit verschiedenen Darstellungen desselben mathematischen Objekts und das Verknüpfen der Darstellungen untereinander führt zu einem tieferen Verständnis mathematischer Objekte. Das Beispiel zum Darstellungswechsel ‚Treatments' (S.9) zeigt, in welcher Art ein Darstellungswechsel innerhalb formaler arithmetischer Darstellung herausfordern kann.
Durch unterschiedliche Darstellungen können verschiedene Eigenschaften eines Objekts besonders hervorgehoben werden und das mathematische Objekt wird nicht mit einer Darstellung verbunden, die möglicherweise mit dem Objekt verwechselt wird. Um ein tiefes Verständnis multiplikativer Strukturen zu erzeugen, sind verschiedene Darstellungen und Darstellungswechsel im Unterrichtskonzept integriert worden (siehe hierfür Kapitel 4.3). Im Besonderen spielt eine formale arithmetische Darstellung eine zentrale Rolle im Forschungskontext, da diese Darstellung potenziell einen Zugang zu multiplikativen Strukturen bietet, welcher Beziehungen von beispielsweise Primteilern und Teilern übersichtlich und leicht strukturierbar darstellt (siehe Abschnitt 2.1.4). Eine solche Darstellung ist nicht mehr so gegenständlich und anschaulich wie Punktefelder in der Grundschule, die zur Veranschaulichung von Multiplikation verwendet werden. Auf symbolischer Ebene übernehmen Zahlen die Rolle als Repräsentant von multiplikativen Strukturen und die Interpretation von Zahlbeziehungen ist abstrakter als rechteckige Punktefelder, die Produkte mit zwei Faktoren darstellen. Multiplikation wird nicht mehr als wiederholte Addition interpretiert, sondern im Sinne eines Bausteinkonzepts. Multiplikative Strukturen bauen sich aus den additiven auf, weshalb sie strukturell komplexer und schwerer zu erfassen sind. Aus diesem Grund ist abstrakteres Denken für den Umgang mit multiplikativen Strukturen im Sinne des Bausteingedankens notwendig. Um zu klären, was es bedeutet, dass das Denken abstrakter wird, ist im nachfolgenden Abschnitt ‚abstrakt' definiert und es werden Theorien über Abstraktionsprozesse nach SFARD sowie GRAY und TALL für multiplikative Strukturen diskutiert.

2.1.2 Abstraktes Denken

> „*Hier geht es also nicht mehr um Zuordnungen zwischen Repräsentationen erster Ordnung und realen Objekten und Handlungen mit ihnen; vielmehr entsprechen die Repräsentationen zweiter und höherer Ordnung Objekten und Operationen des Denkens, die das Ergebnis von Reflexion und Abstraktheit sind und die, wie die natürlichen Zahlen, reale Objekte und Handlungen nur noch mittelbar verkörpern*.“ (DAMEROW und SCHMIDT, 2004, S.136)

Um multiplikative Strukturen (und mathematische Begriffe in diesem Kontext) zu verstehen, müssen die semiotischen Systeme zuerst interpretiert und es muss aktiv eine Bedeutung in die Darstellung konstruiert werden (vgl. beispielsweise DUVAL, 2006; STEINBRING, 2009 oder SÖBBEKE, 2005). Für die Interpretation von Darstellungen müssen Beziehungen zwischen *abstrakten* sowie schwer fassbaren mathematischen Begriffen und Strukturen hergestellt werden. Der Begriff ‚Abstraktion‘ kommt aus dem lateinischen vom Begriff ‚abstrahere‘ und bedeutet übersetzt ‚herausziehen, ziehen‘. Gemäß dieser Wortbedeutung beschreibt FISCHER (2006) Abstraktion als „*Herausziehen von bestimmten Eigenschaften von Objekten einer Menge*“ (ebd., S.10). „*Es wird dann gedanklich ein prototypisches Objekt gebildet, welches durch diese Eigenschaften charakterisiert ist, ohne dass es dem ursprünglichen Objektbereich angehören muss*“ (ebd., S.10). Insbesondere das Arbeiten mit multiplikativen Strukturen stellt eine Abstraktion für Lernende dar, da sich von den anschaulichen Vorstellungen der Multiplikation aus der Grundschule gelöst wird hin zu einer Repräsentation über Zahlbeziehungen. Aus einer solchen formalen arithmetischen Darstellung müssen bestimmte Eigenschaften gedeutet werden, um in dieser Darstellung zu arbeiten. Beispielsweise wird aus verschiedenen arithmetischen Ausdrücken ‚$2 \cdot 2 \cdot 3$‘, ‚$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$‘ sowie ‚$3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 31$‘ die Eigenschaft der Teilbarkeit durch Sechs gefolgert, indem die Sechs als prototypisches Objekt beispielsweise in ihrer Zerlegung als ‚$2 \cdot 3$‘ gebildet wird. Dann werden die Teilbarkeitseigenschaften durch zwei und durch drei aus der Menge der arithmetischen Ausdrücke herausgezogen, um die Teilbarkeit durch Sechs zu erkennen.

Für die Entstehung abstrakter mathematischer Begriffe beschreibt SFARD (1991) einen dreischrittigen Prozess, wobei verschiedene Abstraktionsebenen durchlaufen werden. Generell unterscheidet SFARD zwischen operationellem und strukturellem Verständnis mathematischer Begriffe (ebd., S.23 ff.). Nach SFARD ist zunächst ein operationaler Zugang zu mathematischen Objekten notwendig, um ein strukturelles und abstraktes Begriffsverständnis zu entwickeln (ebd., S.23 ff.). Der erste Schritt, die *Verinnerlichung* (übersetzt aus dem engl. ‚interiorization'), beschreibt eine prozessorientierte Auseinandersetzung mit mathematischen Operationen. Die Prozesse werden nach einiger Zeit durch (mentale) Repräsentationen ausgeführt ohne die Operationen erneut durchzuführen. Ein Beispiel wäre die Umdeutung von ‚4·5' zu ‚2·2·5' als Anzahl von Punkten in Rechtecksfeldern. Das Objekt ‚4·5' wird als wiederholte Addition gedeutet und in der Darstellung des Rechteckfelds bestehend aus vier Spalten und fünf Zeilen werden gleichgroße Rechtecke erzeugt, indem jedes Rechteck aus zwei Spalten und fünf Zeilen besteht. Durch die Veranschaulichung kann ‚4·5' als ‚2·5+2·5' gedeutet werden und ebenfalls als ‚2·(2·5)'. Die Deutung kann nach einiger Zeit ohne Zeichnen von Rechtecksfeldern ablaufen und mental ausgeführt werden.
Der zweite Schritt wird als *Verdichtung* (übersetzt aus dem engl. ‚condensation') betitelt und umfasst eine Input-Output-Beziehung, in welcher Prozesse als Ganzes im Fokus stehen und die eigentlichen Handlungen und ihre Details nicht mehr berücksichtigt werden. Die Verdichtung ermöglicht es schneller Prozesse zu vergleichen und zu verallgemeinern. Somit kann leichter zwischen verschiedenen Darstellungen des mathematischen Konzepts gewechselt werden. SFARD vergleicht diesen Schritt mit der Verwandlung eines wiederkehrenden Teils eines Computerprogramms hin zu einem autonomen Vorgang (ebd., S.19). Im vorherigen Beispiel stellt das Ablösen von der Vorstellung des Rechteckfelds hin zu einer Input-Output Beziehung diesen Prozess dar. Das heißt, ‚4·5' kann direkt in Primfaktoren ‚2·2·5' zerlegt werden ohne gedankliche Überlegungen am Rechteckfeld.
Sobald das mathematische Objekt vom Prozess isoliert betrachtet wird und der Lernende den Begriff als vollwertiges Objekt erfasst, ist der dritte Schritt, die *Verdinglichung* (übersetzt aus dem engl. ‚reification'), vollzogen. Im vorherigen Beispiel stellt dieses die Ablösung der ‚2·5' vom Rechenprozess dar und die Erfassung von ‚2·5' als neues Objekt für eine Zahldarstellung. In diesem Stadium kann die Verinnerlichung mathematischer Objekte auf höherer Ebene beginnen. Der Durchlauf aller drei Abstraktionsstadien startet demnach mit elementaren und

zählbaren Objekten hin zu komplexeren strukturellen mathematischen Beziehungen. Es kann also zuerst auch eine empirische Deutung im Fokus stehen. Für den Unterricht ist eine Entwicklung hinsichtlich einem strukturellen Begriffsverständnis wünschenswert. Allerdings muss nicht jede Verdichtung zu einer Verdinglichung führen, sondern kann auch beim regelbasierten Operieren enden. Die Erfahrung des Zerlegens der gleichen Summanden in verschiedene Anzahlen gleich großer Gruppen im obigen Beispiel zeigt die möglichen Gruppengrößen von der Anzahl der Summanden auf und somit ihre Teiler. Dann kann das Zerlegen eines Produkts gemäß Teilbarkeitseigenschaften ohne Gedanken an Addition oder die Anzahl an Summanden durchgeführt werden (regelbasiertes Operieren). Es führt nicht zu einer Verdinglichung, da hier ‚2·5' nicht als neues Zahlobjekt erfasst wird. Das heißt, ‚4·5' wird gemäß den Teilbarkeitseigenschaften von Vier und Fünf zerlegt in ‚2·2·5' und das Erfassen von ‚2·5' als neues Zahlobjekt ist nicht notwendig. (ebd.)

Eine Ergänzung zur Verdinglichung bildet das Entwicklungsmodell nach GRAY und TALL (1994, 2001). In diesem wird nun das ständige Wechselspiel zwischen Prozessen und Ergebnissen betrachtet. Zentral im Modell ist die Idee eines *Prozepts* (übersetzt aus dem engl. ‚procept'): „*When the symbols act freely as cues to switch between mental concepts to think about and processes to carry out operations, they are called procepts*" (ebd., 2001, S.67 f.). Das eingeführte Kunstwort ‚procept' setzt sich dabei aus den Begriffen ‚concept' und ‚process' zusammen. Prozeptuelles Denken wird beschrieben „*as the ability to manipulate the symbolism flexibly as process or concept, freely interchanging different symbolisms for the same object*" (ebd., 1994, S.121). Das heißt, ein Prozept beschreibt ein flexibles Umdeuten von Symbolen einerseits als Prozesse zur Durchführung von Operationen und andererseits als Ergebnis dieser Prozesse. Die Dualität zwischen Prozess und Objekt stellt eine zentrale Herausforderung algebraischen Denkens dar und wird im Abschnitt 2.1.4 näher betrachtet. Als Beispiel für prozeptuelles Denken könnte der Prozess des Zerlegens genannt werden, welcher zu einer Primfaktorzerlegung führt, zum Beispiel ‚30=2·3·5'. Die Zerlegung ‚2·3·5' wird zu einem neuen Zahlobjekt. Entsprechend umgekehrt kann aus der Konstruktion ‚2·3·5' als Handlungsauffassung die Zahldarstellung ‚2·3·5' entstehen. Ein weiterer Prozess stellt das regelkonforme Handeln dar, indem ‚2·3·5=2·(3·5)' als Rechenhandlung interpretiert wird. So kann ‚3·5' als neues Objekt und Zahldarstellung interpretiert werden oder ‚2·(3·5)' als gerade Zahl. Das flexible Umdeuten der arithmetischen

Darstellung beschreibt prozeptuelles Denken. Im Gegensatz zu SFARDs Verdinglichung wird nicht nur ein neues Objekt konstruiert, sondern es wird auch umgekehrt vom Objekt auf Prozesse geschlossen. (GRAY & TALL, 1994, 2001)

Ein relevanter Aspekt in den aufgeführten Abstraktionsprozessen besteht in der Notwendigkeit sich von den Repräsentationen als Abbild des mathematischen Objekts zu lösen und Zeichen als ‚Gestalter' (übersetzt aus dem engl. ‚creators', siehe STEINBRING, 2010, S.4) neuer mathematischer Objekte zu interpretieren, sodass mathematisches Wissen entstehen kann. (ebd.) Für das Forschungsprojekt bedeutet es, dass Darstellungen gesucht werden, die nicht nur multiplikative Strukturen repräsentieren, sondern einen Zugang ermöglichen, um mit den gewählten Darstellungen zu arbeiten und Abstraktionsprozesse auszulösen. Hierfür scheint sich eine formale arithmetische Darstellung gut zu eignen, wie es sich in den Beispielen zur Verdinglichung und zum prozeptuellen Denken gezeigt hat.
Die Entstehung mathematischen Wissens aus epistemologischer Perspektive nach STEINBRING sowie aus semiotischer Perspektive nach PEIRCE, HOFFMANN und DÖRFLER wird im nachfolgenden Abschnitt 2.1.3 hinsichtlich ihrer Relevanz für die vorliegende Arbeit diskutiert.

2.1.3 Theorien zur Entwicklung mathematischen Denkens

STEINBRING (2000) stellt Entwicklungsprozesse von mathematischem Wissen in seinem epistemologischen Dreieck dar. Er nimmt an, dass neues Wissen nicht losgelöst von individuellen Lernkontexten und Erfahrungen entwickelt wird und erst durch das Herstellen von Interpretationen zwischen Darstellungen und Referenzkontexten in sozialer Interaktion entsteht. (ebd., S.28) STEINBRING (1993) nimmt an, dass zur Entwicklung mathematischen Wissens Zeichen und Symbole notwendig und zunächst ohne Bedeutung für den Interpretierenden sind. Die Bedeutung muss aktiv in die Zeichen hineininterpretiert werden (ebd., 2009). Hierfür sind entsprechende Referenzkontexte elementar. Die wechselseitigen Beziehungen zwischen Zeichen, Begriffen und Referenzkontexten sind in nachfolgender Abbildung im epistemologischen Dreieck als „*wechselweise stützendes und ausbalanciertes System*" (ebd., 2000, S.34) dargestellt. Mathematische Begriffe wer-