Heinz Klaus Strick

Mathematik ist wunderschön

Noch mehr Anregungen zum Anschauen und Erforschen

für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren

Springer

Mathematik ist wunderschön

Heinz Klaus Strick

Mathematik ist wunderschön

Noch mehr Anregungen zum Anschauen und Erforschen für Menschen zwischen 9 und 99 Jahren

2., korrigierte und ergänzte Auflage

Springer

Heinz Klaus Strick
Leverkusen, Deutschland

ISBN 978-3-662-61681-9 ISBN 978-3-662-61682-6 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-662-61682-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Einbandabbildung: deblik, Berlin

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann
Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorwort

> Ich verstehe, dass die Mathematik, wenn man sich nicht für sie begeistert, kalt und sinnlos erscheinen kann. Ihre Schönheit erschließt sich nur den geduldigeren Schülern.
> (Maryam Mirzakhani, iranische Mathematikerin, 1977–2017)

Diese Aussage der 2017, im Alter von nur 40 Jahren verstorbenen Mathematik-Professorin der Stanford University, die 2014 als erste Frau mit der Fields-Medaille ausgezeichnet wurde, soll Sie, liebe Leserin, lieber Leser, durchaus ermuntern, das vorliegende Buch nicht nur durchzublättern, sondern *mit Geduld* durchzuarbeiten.

Mathematik ist schön, sogar *wunderschön.* Doch das merkt man vielleicht erst, wenn man Mathematik *macht,* also sich mit mathematischen Problemen *auseinandersetzt.* Daher bietet dieses Buch die Gelegenheit, verschiedene Bereiche der Mathematik kennenzulernen.

Die Frage, warum Mathematik schön ist und was an der Mathematik schön ist, muss jeder für sich selbst beantworten. Ich bin jedenfalls sicher, dass die Leserinnen und Leser auch in diesem Band mindestens ein Thema, einen konkreten Sachverhalt, ein Bild finden werden, von dem sie sagen werden: *Das ist schön!*

Es freut mich sehr, dass ich nach dem Buch *Mathematik ist schön* bereits jetzt einen zweiten Band präsentieren kann, der ähnliche Ziele wie der erste Band verfolgt und in gleicher Weise strukturiert ist. Die zahlreichen positiven Rückmeldungen zum ersten Band haben mich darin bestärkt, meine Leserinnen und Leser von der Schönheit der Mathematik zu überzeugen:

- faszinierende, farbige Grafiken nutzen, um die Neugier zu wecken,
- Sachverhalte möglichst beispielgebunden verdeutlichen und auf allzu viele formale Beweise verzichten,
- auch eher unbekannte mathematische Sachverhalte aufgreifen – auch Themen, für die heute nur sehr selten Platz im Schulunterricht ist,
- und stets ausreichend Gelegenheit geben, eigene Gedanken zu entwickeln: *Anschauen, Nachdenken, Ausprobieren, Variieren, Recherchieren, Wundern.*

Diesem Motto folgen auch die von mir erstellten immerwährenden Kalender im DIN-A3-Format, die ich zugunsten von *Friedensdorf International* in Oberhausen verkauft habe (www.mathematik-ist-schoen.de).

Spielerisch, durch eigenes Ausprobieren, kann man sich Kap. 3 (über einfache Parkettierungen der Ebene) nähern, aber auch Kap. 1 (über Mobiles). Eigentlich sind Mobiles ja leicht zu basteln, wenn man das Hebelgesetz beachtet; aber die Anzahl der möglichen Mobiles steigt ziemlich schnell an, je mehr Kugeln man aufhängen möchte. In Kap. 3 geht es u. a. um die Parkettierung mit regelmäßigen Dreiecken und Polyamonds sowie um die Parkettierung mit regelmäßigen Sechsecken und Polyhexes. Dass man eine Ebene (oder Teile davon) mit *quadratischen* Bausteinen und Polyominos auslegen kann, wurde in Kap. 5 von *Mathematik ist schön* untersucht.

In Kap. 2 dieses Buches wird das Thema *konvergente Reihen* (vgl. Kap. 8 von *Mathematik ist schön*) fortgesetzt und mit der *harmonischen Reihe* eine sehr langsam *divergierende* Reihe vorgestellt, deren Eigenschaft verblüffende Konsequenzen hat.

Selbst wenn die Schulzeit lange zurückliegt, erinnert man sich zumindest im Prinzip daran, dass es Inkreise und Umkreise für Dreiecke gibt – heutzutage ist hierfür in den Lehrplänen kaum noch Platz, erst recht nicht für die Frage, wie das bei Vierecken (oder gar bei Fünfecken, Sechsecken, …) aussieht. Auf alle solche Fragen kann Kap. 4 nicht eingehen, wohl aber Hinweise darauf geben, was es da zu entdecken gibt. In gewisser Weise findet das Kapitel seine Fortsetzung in Kap. 8, wo es um kürzeste Wege in Dreiecken, Vierecken, … geht – doch auch diese beiden Kapitel können unabhängig voneinander gelesen und erarbeitet werden.

Viele haben Schwierigkeiten mit der Bruchrechnung; erfahrungsgemäß sind die meisten Kinder und Jugendlichen froh, wenn das Rechnen mit Brüchen abgelöst wird durch das Rechnen mit Dezimalzahlen – doch auch hier kann es Schwierigkeiten geben, wenn die Dezimalzahlen periodisch sind. In Kap. 5 geht es darum, diese Zusammenhänge zu verstehen und hier wirklich wunderbare Strukturen zu entdecken. Und wenn dann der Umgang mit Brüchen (wieder) leichter fällt, kann man sich in Kap. 6 in die Welt der alten Ägypter versenken und staunen, welche Konsequenzen deren besondere Art mit Brüchen zu rechnen hatte. Hier ist die mathematische Forschung noch lange nicht bei allen aufgetretenen Fragen zu abschließenden Ergebnissen gekommen; die Leserinnen und Leser haben genügend Gelegenheiten zum Knobeln …

Auch in diesem Buch werden einige mathematische Paradoxien vorgestellt; in Kap. 7 geht es um Spiele mit besonderen Würfeln, mit Glücksrädern und mit Münzen, über deren Eigenschaften man sich nur wundern kann. Dass uns überhaupt der Umgang mit Vorgängen schwer fällt, bei denen der Zufall eine Rolle spielt, wird in Kap. 12 angesprochen. Hier und in einigen anderen Themenfeldern gibt es noch viel zu entdecken – auch in diesem Buch hat der Platz wieder nicht ausgereicht.

Immerhin wird diesmal der goldene Schnitt ausdrücklich und ausführlich thematisiert (Kap. 9) – und doch kann dies auch wieder nur Anregung sein, sich selbstständig weiter mit dem Thema zu beschäftigen.

Gleiches gilt für die regelmäßigen Körper, die im Mittelpunkt von Kap. 10 stehen – ausgehend von den Netzen, die man benötigt, um diese Körper zu basteln, wird dort weiter erläutert, wie man diese Körper zeichnen kann, welche Zusammenhänge zwischen der Anzahl der Ecken, Kanten und Flächen bestehen und einiges mehr.

Kap. 11 über Monsterkurven und Fraktale ist etwas anders aufgebaut als die übrigen Kapitel: Da erfahrungsgemäß der Umgang mit den selbstähnlichen Strukturen der geometrischen Gebilde nicht leicht fällt, wurde hier eine ausführlichere, schrittweise Darstellung gewählt.

Die zwölf Kapitel des Buches sind durchweg unabhängig voneinander lesbar. Zumindest beim Einstieg in die einzelnen Themen wurde ein möglichst einfacher Zugang gewählt; dafür werden keine oder nur geringe Voraussetzungen aus dem Schulunterricht benötigt. Absichtlich wurde darauf verzichtet, den einzelnen Kapiteln jeweils eine Zusammenfassung voranzustellen. Dies hat einen einfachen (und hoffentlich überzeugenden) Grund: Das Interesse an einem Thema (und die Einsicht, dass ein Sachverhalt als schön empfunden wird) kann sich erst dann entwickeln, wenn man sich in das betreffende Thema „eingelesen" hat.

Es ist ein wichtiges Anliegen auch dieses Buches, dass viele junge Menschen den Weg zur Mathematik finden und dass die Leserinnen und Leser, deren Schulzeit schon einige Zeit zurückliegt, sich wieder erinnern und Neues entdecken können. Die „Lösungen" zu den eingestreuten *Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen* werden auf der Internet-Seite des Verlags veröffentlicht (http://www.springer.com/de/book/9783662558300).

Auch wenn in jedem Kapitel Sätze, Regeln und Formeln grafisch besonders hervorgehoben werden, also die typischen Elemente eines Mathematikbuches enthalten sind, ist dies kein *Lehrbuch der Mathematik*. Beweise von Sätzen erfolgen in den meisten Fällen nur beispielgebunden – die zugrundeliegenden Ideen zu vermitteln, war mir stets wichtiger, als die formalen Schlüsse aufzuzeigen.

Wie in *Mathematik ist schön* sollen auch in diesem Band die Literaturhinweise am Ende eines Kapitel und am Ende des Buches Anregungen für eine weitere Beschäftigung mit den angesprochenen Themen geben; insbesondere die Wikipedia-Beiträge (in deutscher, englischer und französischer Sprache) zu einzelnen Themen und die darin enthaltenen Literaturhinweise haben sich als hilfreiche Informationsquellen erwiesen.

Erfreulicherweise konnte ich in der 2. Auflage des Buches – neben den wenigen notwendigen Korrekturen – einige Ergänzungen vornehmen; insbesondere möchte ich hier die Erweiterungen in Kap. 5 (Dualbrüche), Kap. 9 (Parkettieren mit goldenen Dreiecken, Penroses-Puzzles) und Kap. 12 (Geburtstagsparadoxon, Sammelbilderproblem, 1/e-Gesetz) nennen.

Am Ende der Arbeit an diesem Buch bedanke ich mich herzlich bei all denen, die mich bei der Vorbereitung und Umsetzung des Buchprojekts unterstützt haben,

- bei meiner Frau, die es auch diesmal geduldig ertrug, dass ich mich immer wieder in die schöne Welt der Mathematik vertiefte,
- bei Wilfried Herget, der wieder zahlreiche Vorschläge machte, Formulierungen meiner Texte verständlicher zu gestalten,
- bei Georg Obermeier, der auf Stellen im Manuskript hinwies, die möglicherweise irritieren könnten,
- bei Hans Walser, durch dessen Hinweise und Veröffentlichungen ich auch diesmal etliche Anregungen für dieses Buch erhielt,
- bei Manfred Stern† und Peter Gallin, die mich wieder durch konstruktiv-kritische Anmerkungen unterstützten,
- bei Volker Pöhls, Helmut Mertes und vielen anderen für ihre Anregungen zur 2. Auflage,

und nicht zuletzt bei Andreas Rüdinger, Iris Ruhmann und Carola Lerch vom Springer-Verlag, die auch dieses Buch ermöglichten.

Heinz Klaus Strick

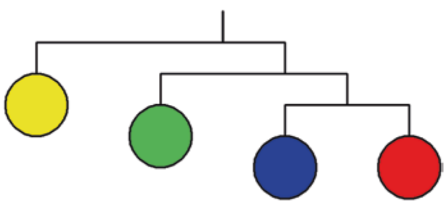
Inhaltsverzeichnis

Im Gleichgewicht

1

„Gebt mir einen Hebel, der lang genug ist, und gebt mir einen Punkt, wo ich sicher stehen kann,
dann kann ich die Erde mit einer Hand bewegen.“

(Archimedes, griechischer Mathematiker und Physiker, 287–212 v. Chr.)



In diesem Kapitel werden Mobiles betrachtet, die aus einer oder mehreren Stangen, aus Fäden und einer unterschiedlichen Anzahl von gleichen (= gleich großen, gleich schweren) Kugeln bestehen.

Dabei werden einige vereinfachte Bedingungen hinsichtlich des Aufbaus der Mobiles angenommen:

- Die Kugeln werden an den Enden einer Stange aufgehängt.
- Das Gewicht der Aufhängung (Stange und Fäden) kann gegenüber dem Gewicht der Kugeln vernachlässigt werden.

H. K. Strick, *Mathematik ist wunderschön,* https://doi.org/10.1007/978-3-662-61682-6_1

1.1 Das Hebelgesetz – Mobiles mit gleichen Kugeln

In der Physik bezeichnet man einen starren Körper (z. B. eine Stange), der sich um einen Punkt drehen lässt, als **Hebel.** Der Hebelarm ist dann der Abstand des Drehpunkts zu einem „Ende“ des Hebels. Wirkt auf das Ende eines Hebels eine Kraft, z. B. das Gewicht eines dort aufgehängten Körpers, dann dreht sich der Hebel. Das Produkt aus Hebelarm und der wirkenden Kraft nennt man daher **Drehmoment.**

Die Stange eines Mobiles ist ein solcher Hebel. Die Abstände zwischen dem Aufhängepunkt der Stange und den beiden Enden der Stange sind die Hebelarme. Hängt man eine Kugel an einem Ende der Stange auf, dann dreht sich die Stange; hängt man eine Kugel am anderen Ende der Stange auf, dann dreht sich die Stange in der entgegengesetzten Drehrichtung. Bei Drehmomenten kommt es also auch auf die Drehrichtung an; den Unterschied der Drehrichtungen drückt man durch unterschiedliche Vorzeichen aus.

Hängt man an einem der beiden Enden der Mobilestange ein Gewichtsstück auf, z. B. eine Kugel, dann bezeichnet man diesen Hebelarm als *Lastarm,* das Gewichtsstück als Last. Um den Hebel ins Gleichgewicht zu bringen, muss man am anderen Ende der Stange eine (Gegen-)Kraft aufwenden; dieser Hebelarm ist der *Kraftarm.*

Ein Mobile ist ein Hebel im Gleichgewicht. Was man als Last und was man als Kraft ansieht, spielt dabei keine Rolle. Auf die Kugeln eines Mobiles wird durch die Erdanziehung eine Kraft ausgeübt; diese hängt von der Masse der Kugeln ab.

Damit ein Mobile im Gleichgewicht ist, muss eine einfache Bedingung erfüllt sein:

Regel

DasHebelgesetz

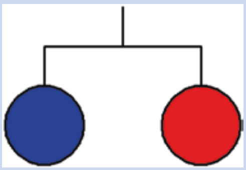
Ein Hebel ist im Gleichgewicht, wenn die Summe der Drehmomente gleich null ist.

Besteht der Hebel aus einer Stange, die an einem Faden aufgehängt ist, dann muss also gelten:

Kraft × Länge des Kraftarms = Last × Länge des Lastarms ◄

Dieses Gesetz wurde bereits von Archimedes von Syrakus (287–212 v. Chr.) formuliert und von ihm in zahlreichen seiner technischen Erfindungen angewandt.

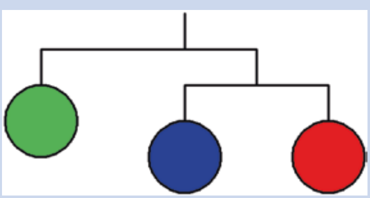
Beispiel: Mobile mit zwei Kugeln
Wenn ein Mobile mit zwei gleichen Kugeln gebaut werden soll, dann müssen die Kugeln im gleichen Abstand vom Aufhängepunkt des Mobiles aufgehängt werden.



Beispiel: Mobile mit drei Kugeln
Für Mobiles mit drei gleichen Kugeln gibt es – bis auf Spiegelung – nur eine Möglichkeit des Aufbaus, denn die Anzahl von drei Kugeln kann nur auf eine Art aufgeteilt werden: $3 = 1 + 2$

Man könnte es auch so sagen: Die Zahl 3 lässt sich – bis auf Vertauschung – nur auf eine Art als Summe von zwei positiven ganzzahligen Summanden darstellen.

Hängt man also am linken Ende einer Stange *eine* Kugel auf, dann wird am rechten Ende das oben abgebildete 2er-Mobile befestigt. Da rechts das doppelte Gewicht hängt, muss dort der Abstand zum Aufhängepunkt halb so groß sein wie der Abstand auf der linken Seite, damit das Mobile insgesamt im Gleichgewicht ist. Die obere Stange muss also im Verhältnis 2:1 unterteilt werden (zwei Drittel zu einem Drittel der Gesamtlänge der oberen Stange).



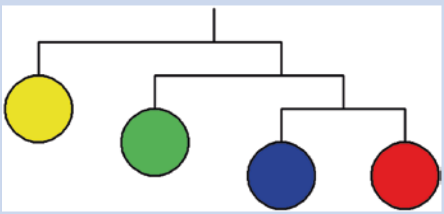
Im Folgenden werden Aufhängungen, bei denen das Mobile oder einzelne Teile eines Mobiles nur gedreht sind, nicht berücksichtigt.

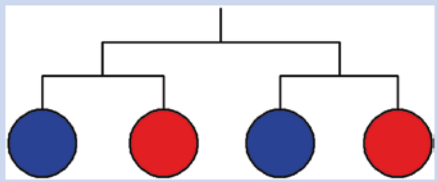
Beispiel: Mobile mit vier Kugeln

Mobiles mit vier gleichen Kugeln können auf zwei Arten gebastelt werden, denn die Zahl 4 lässt sich auf zwei Arten als Summe zweier positiver ganzer Zahlen notieren: $4 = 1 + 3$ und $4 = 2 + 2$. Dazu verwendet man also entweder das 3er-Mobile und bringt dies durch eine weitere Kugel ins Gleichgewicht, oder man baut das Mobile aus zwei 2er-Mobiles zusammen.

Im ersten Fall (Typ (4.1), vgl. Abb. links) muss das Gewicht der einen Kugel links das Gewicht der drei Kugeln rechts ausgleichen. Die obere Stange muss daher im Verhältnis 3:1 unterteilt werden (drei Viertel zu einem Viertel der Gesamtlänge der oberen Stange).

Im zweiten Fall (Typ (4.2), vgl. Abb. rechts) erfolgt die Aufhängung der oberen Stange in der Mitte.





Beispiel: Mobile mit fünf Kugeln

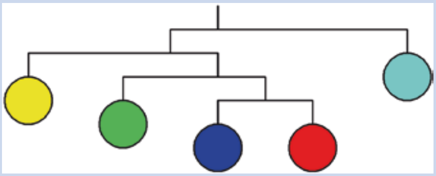
Dass es für Mobiles mit fünf gleichen Kugeln drei Möglichkeiten gibt, kann man sich analog überlegen: Die Zahl 5 lässt sich auf zwei Arten als Summe von zwei positiven ganzen Zahlen schreiben: $5 = 1 + 4 = 2 + 3$.

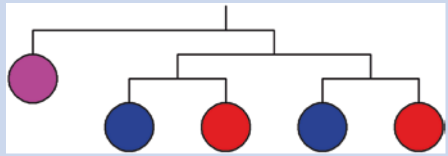
Die erste Zerlegung $(1 + 4)$ bedeutet, dass man eines der beiden 4er-Mobiles und eine einzelne Kugel ins Gleichgewicht bringt, und die zweite Zerlegung $(2 + 3)$ bedeutet, dass man entsprechend das 2er-Mobile und das 3er-Mobile geeignet verwendet.

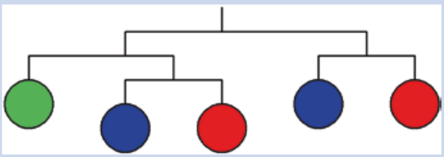
Also ergeben sich insgesamt drei Arten von Mobiles mit fünf gleichen Kugeln:

- Typ (5.1): $5 = 1 + (1 + 3)$ und
- Typ (5.2): $5 = 1 + (2 + 2)$ sowie
- Typ (5.3): $5 = 2 + 3$.

Die Aufhängung der oberen Stange muss dabei entsprechend durch Unterteilung im Verhältnis 4:1 (Typ 5.1 und Typ 5.2) bzw. 3:2 (Typ 5.3) erfolgen.



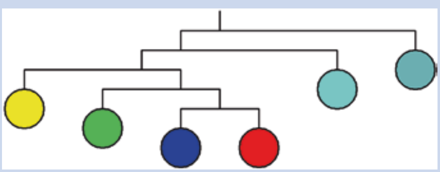


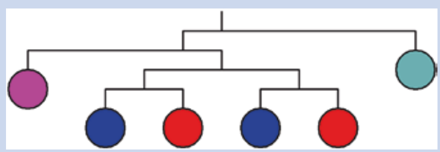


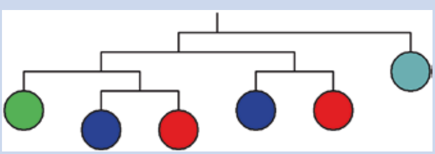
Hinweis: Da sich die Mobiles einfach drehen können, ist in den vorangehenden und folgenden Grafiken jeweils nur eine mögliche Momentaufnahme der Mobiles abgebildet.

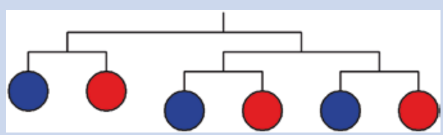
Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

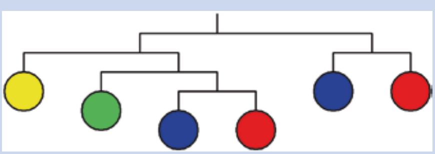
A 1.1: Erläutern Sie: Für Mobiles aus sechs gleichen Kugeln gibt es die folgenden sechs Möglichkeiten der Aufhängung. Welche Mobiles mit einer kleineren Anzahl von Kugeln werden dabei miteinander kombiniert?

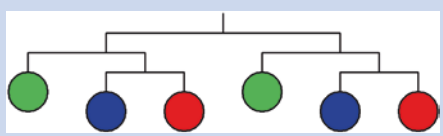












Herausfinden der zugrunde liegenden Gesetzmäßigkeit

Beim Zusammenstellen von Mobiles mit einer größeren Anzahl von Kugeln verwendet man stets Bauteile aus Mobiles mit einer kleineren Kugelzahl. Die Anzahl der Möglichkeiten, ein Mobile aus k Kugeln zu basteln, hängt also von der Anzahl der Möglichkeiten ab, Mobiles mit 2, 3, 4, …, $k-1$ Kugeln zusammenzusetzen.

Beispiel: Mobile mit sieben Kugeln

Die Zahl 7 lässt sich wie folgt als einfache Summe schreiben: $7=1+6=2+5=3+4$.

- Die erste Zerlegung $(1+6)$ bedeutet, dass man eines der (sechs) möglichen 6er-Mobiles und eine einzelne Kugel ins Gleichgewicht bringt,
- die zweite Zerlegung $(2+5)$, dass man das 2er-Mobile und eines der (drei) möglichen 5er-Mobile verwendet, und
- die dritte Zerlegung $(3+4)$, dass man das 3er-Mobile mit einem der (zwei) möglichen 4er-Mobiles kombiniert.

Bezeichnet man die Anzahl der möglichen Mobiles mit k gleichen Kugeln allgemein mit m_k, dann haben wir bisher herausgefunden:

$$m_2 = 1, m_3 = 1, m_4 = 2, m_5 = 3 \text{ und } \mathrm{m}_6 = 6.$$

Zusätzlich kann man noch $m_1 = 1$ für die Anzahl der möglichen Mobiles mit einer Kugel schreiben.

Mithilfe dieser Bezeichnungen ergibt sich:

$$m_7 = m_1 \cdot m_6 + m_2 \cdot m_5 + m_3 \cdot m_4 = 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 11,$$

d. h., es gibt elf Möglichkeiten, ein Mobile aus sieben gleichen Kugeln zu basteln.

Beispiel: Mobile mit acht Kugeln

Die Zahl 8 lässt sich wie folgt als Summe von zwei Summanden schreiben:

$8=1+7=2+6=3+5=4+4$

- Die erste Zerlegung $(1+7)$ bedeutet, dass man die (elf) möglichen 7er-Mobiles und eine Kugel ins Gleichgewicht bringen muss,
- die zweite Zerlegung $(2+6)$, dass man das 2er-Mobile und eines der (sechs) möglichen 6er-Mobiles verwendet,
- die dritte Zerlegung $(3+5)$, dass man das 3er-Mobile mit einem der (drei) möglichen 5er-Mobiles kombiniert.

Bei der Zerlegung 4+4 muss beachtet werden, dass drei verschiedene Kombinationen der beiden 4er-Mobiles möglich sind: (4.1) – (4.1), (4.1) – (4.2) und (4.2) – (4.2).

Die Kombination (4.2) – (4.1) stimmt mit der Kombination (4.1) – (4.2) überein.

Es gilt also: $m_8 = m_1 \cdot m_7 + m_2 \cdot m_6 + m_3 \cdot m_5 + 3 = 1 \cdot 11 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 3 + 3 = 23$, d. h., es gibt 23 Möglichkeiten, ein Mobile aus acht Kugeln zu basteln.

Analog ergibt sich für

- $k = 9$ Kugeln

$$m_9 = m_1 \cdot m_8 + m_2 \cdot m_7 + m_3 \cdot m_6 + m_4 \cdot m_5 = 1 \cdot 23 + 1 \cdot 11 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 46.$$

Dass die jeweiligen Typ-Anzahlen miteinander multipliziert werden müssen, kann man sich mithilfe einer Kombinationstafel verdeutlichen.

Beispiel: Mögliche Kombinationen von Mobiles mit unterschiedlicher Kugelanzahl
Um die Anzahl der möglichen 9er-Mobiles zu bestimmen, die aus 4er- und 5er-Mobiles zusammengesetzt sind, betrachte man eine Kombinationstafel.

In der folgenden Tabelle sind die $m_4 \cdot m_5 = 2 \cdot 3 = 6$ Kombinationsmöglichkeiten dargestellt.

	(5.1)	(5.2)	(5.3)
(4.1)	+	+	+
(4.2)	+	+	+

- $k = 10$ Kugeln

Wie im Fall $k = 8$ muss der Sonderfall beachtet werden, dass dabei auch zwei Mobiles mit gleicher Kugelanzahl kombiniert werden.

Beispiel: Mögliche Kombinationen von Mobiles mit gleicher Kugelanzahl
An der folgenden Kombinationstafel ist ablesbar, dass eine Kombination der drei Typen (5.1), (5.2) und (5.3) miteinander nur auf $1+2+3$ Arten möglich ist.

	(5.1)	(5.2)	(5.3)
(5.1)	+	+	+
(5.2)	+	+	
(5.3)	+		

Somit gilt:

$$m_{10} = m_1 \cdot m_9 + m_2 \cdot m_8 + m_3 \cdot m_7 + m_4 \cdot m_6 + (1+2+3) = 1 \cdot 46 + 1 \cdot 23 + 1 \cdot 11 + 2 \cdot 6 + 6 = 98$$

Aus den bisher betrachteten Beispielen ergibt sich, dass zwei Fälle zu unterscheiden sind:

- Das Mobile besteht aus einer ungeraden Anzahl k von Kugeln.
- Das Mobile besteht aus einer geraden Anzahl k von Kugeln.

Falls die Anzahl der Kugeln gerade ist, also $k = 2 \bullet s$ $(s \in \mathrm{N})$, dann gibt es $1+2+3+\ldots+m_s$ mögliche Kombinationen der m_s verschiedenen Typen von Mobiles aus s gleichen Kugeln.

Für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen 1, 2, 3, …, n gilt bekanntlich die Summenformel,

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1),$$

vgl. z. B. Formel (2.1) in *Mathematik ist schön*.

Daher gilt beispielsweise im Falle eines Mobiles mit *zehn* gleichen Kugeln:

$$m_{10} = m_1 \cdot m_9 + m_2 \cdot m_8 + m_3 \cdot m_7 + m_4 \cdot m_6 + \frac{1}{2} \cdot m_5 \cdot (m_5 + 1)$$

Regel

Anzahl der möglichen Mobiles aus *k* gleichen Kugeln

Die Anzahl m_k der möglichen Mobiles aus k gleichen Kugeln kann aus den Anzahlen $m_1 = 1$ und $m_2 = 1$ wie folgt schrittweise berechnet werden:

- Ist k eine ungerade Zahl, also $k = 2 \cdot s + 1$, dann ist $m_{2s+1} = m_1 \cdot m_{2s} + m_2 \cdot m_{2s-1} + m_3 \cdot m_{2s-2} + \ldots + m_s \cdot m_{s+1}$.
- Ist k eine gerade Zahl, also $k = 2 \cdot s$, dann ist $m_{2s} = m_1 \cdot m_{2s-1} + m_2 \cdot m_{2s-2} + m_3 \cdot m_{2s-3} + \cdots + m_{s-1} \cdot m_{s+1} + \frac{1}{2} \cdot m_s \cdot (m_s + 1)$. ◀

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
m_k	1	1	1	2	3	6	11	23	46	98	…

Übrigens: Gibt man die ersten Glieder der Zahlenfolge, also 1, 1, 1, 2, 3, 6, 11, 23, 46, 98, in eine Suchmaschine ein, dann findet diese als erste Quelle die ***O**n-Line **E**ncyclopedia of **I**nteger **S**equences*®, kurz OEIS, mit der folgenden Information: Bei dieser Folge handelt es sich um die *Wedderburn-Etherington numbers*. OEIS ist eine 1964 vom australisch-amerikanischen Mathematiker Neil J. A. Sloane gegründete Datenbank mit über 250.000 Zahlenfolgen aus ganzen Zahlen (https://oeis.org).

Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.2: Weisen Sie nach, dass es möglich ist, die Anzahl m_k der möglichen Mobiles für $k = 3$ bzw. $k = 4$ Kugeln auch mithilfe der Formel aus dem o. a. Satz zu berechnen.

A 1.3: Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Mobiles aus 11 und aus 12 gleichen Kugeln mithilfe der o. a. Formeln.

A 1.4: Untersuchen Sie, für welche Anzahl k von Kugeln die Anzahl m_k der möglichen Mobiles größer ist als 1000 [1.000.000].

A 1.5: Statt die Mobiles zu zeichnen, kann man sie wie folgt mithilfe eines speziellen Zeichens, z. B. „o", und Klammern () symbolisch darstellen. (Wofür stehen die Klammern?)

$k = 2$:(oo) $k = 3$:(o(oo)) $k = 4$:(o(o(oo))) oder ((oo)(oo))

Stellen Sie auf diese Weise die möglichen Typen von Mobiles mit $k = 5$, 6, 7, 8 Kugeln dar.

1.2 Mobiles mit einer unterschiedlich großen Anzahl von gleichen Kugeln

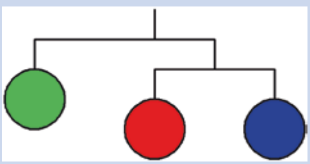
In diesem Abschnitt sollen noch Mobiles betrachtet werden, an deren Fäden *mehrere* gleiche Kugeln aufgehängt werden können. Dabei beschränken wir uns auf Mobiles mit nur *drei* Aufhängemöglichkeiten.

Das Mobile mit der kleinsten Anzahl an Kugeln ist das bereits in Abschn. 1.1 betrachtete Mobile mit drei Kugeln.

Beispiel: Mobile mit drei gleichen Kugeln

Drei gleiche Kugeln können nur auf *eine* Art an einem Mobile mit drei Aufhängungen montiert werden. Die Längen von Last- und Kraftarm

- stehen in der Abbildung im Verhältnis 2:1 (obere Stange) und 1:1 (untere Stange).

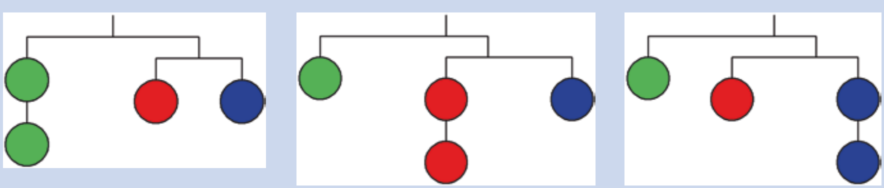


Beispiel: Mobiles mit vier gleichen Kugeln

Vier gleiche Kugeln können auf *zwei* Arten an einem Mobile mit drei Aufhängungen montiert werden. Die Längen von Last- und Kraftarm

- stehen in der Abbildung links beide im Verhältnis 2:2,
- stehen in der mittleren Abbildung im Verhältnis 3:1 (obere Stange) und 1:2 (untere Stange).

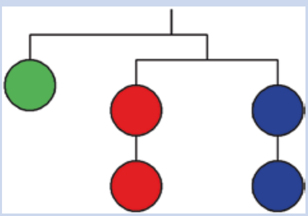
Das Mobile in der Abbildung rechts stimmt bis auf die Färbung der Kugeln (und der Drehung) mit dem Mobile in der Mitte überein; daher wird eine solche Variation im Folgenden weggelassen.

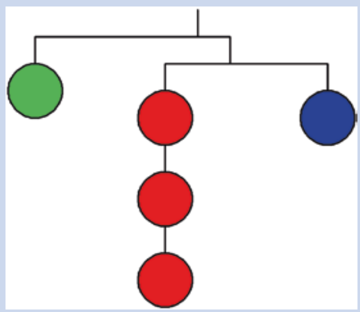


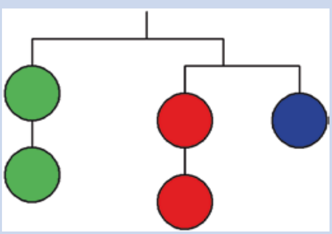
Beispiel: Mobiles mit fünf gleichen Kugeln
Fünf gleich große Kugeln können auf *vier* Arten an einem Mobile mit drei Aufhängungen montiert werden.

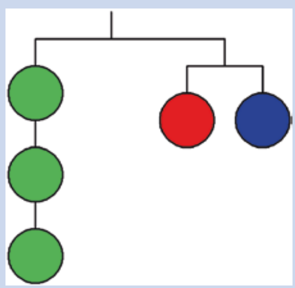
Die Längen von Last- und Kraftarm

- stehen in der ersten Abbildung im Verhältnis 4:1 (obere Stange) und 1:1 (untere Stange),
- stehen in der zweiten Abbildung im Verhältnis 4:1 (obere Stange) und 1:3 (untere Stange),
- stehen in der dritten Abbildung im Verhältnis 3:2 (obere Stange) und 1:2 (untere Stange),
- stehen in der vierten Abbildung im Verhältnis 2:3 (obere Stange) und 1:1 (untere Stange).









Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.6:

(1) Zeigen Sie, dass es sechs Möglichkeiten gibt, sechs gleiche Kugeln an einem Mobile mit drei Aufhängungen anzubringen. Fertigen Sie eine Zeichnung dieser Mobiles an.

(2) Erläutern Sie, welche Möglichkeiten es gibt, sieben gleiche Kugeln an einem Mobile mit drei Aufhängungen anzubringen.

Um allgemein herauszufinden, wie viele verschiedene Mobiles mit drei Aufhängungen und k Kugeln es gibt, verwenden wir die symbolische Schreibweise als Zahlentripel $(g\,;\,r\,;\,b)$ für diesen Mobiletyp. Dabei bezeichnet g, r, b die Anzahl der grünen, roten und blauen Kugeln.

Für diese müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:
$g+r+b=k$; g, r, $b \geq 1$ und $r \geq b$.

Die letzte Bedingung wurde in den vorangehenden Abbildungen beachtet; ebenso gut könnte aber auch die Bedingung $r \leq b$ berücksichtigt werden.

Die Mobiles mit drei Aufhängungen und k Kugeln können dann wie folgt als Zahlentripel notiert werden:

$k=3$: (1 ; 1 ; 1)
$k=4$: (1 ; 2 ; 1); (2 ; 1 ; 1)
$k=5$: (1 ; 3 ; 1); (1 ; 2 ; 2); (2 ; 2 ; 1); (3 ; 1 ; 1)
$k=6$: (1 ; 4 ; 1); (1 ; 3 ; 2); (2 ; 3 ; 1); (2 ; 2 ; 2); (3 ; 2; 1); (4 ; 1 ; 1)
$k=7$: (1 ; 5 ; 1); (1 ; 4 ; 2); (1 ; 3 ; 3); (2 ; 4 ; 1); (2 ; 3 ; 2); (3 ; 3 ; 1); (3 ; 2 ; 2); (4 ; 2 ; 1); (5 ; 1 ; 1)
$k=8$: (1 ; 6 ; 1); (1 ; 5 ; 2); (1 ; 4 ; 3); (2 ; 5 ; 1); (2 ; 4 ; 2); (2 ; 3 ; 3); (3 ; 4 ; 1); (3 ; 3 ; 2); (4 ; 3 ; 1); (4 ; 2 ; 2); (5 ; 2 ; 1); (6 ; 1 ; 1)

Der Parameter g in den Zahlentripeln $(g\,;\,r\,;\,b)$ durchläuft die natürlichen Zahlen von 1 bis $k-2$. Das Teilmobile mit zwei Aufhängungen enthält dabei mindestens $r+b=2$ rote *und* blaue Kugeln (mindestens eine Kugel von jeder Sorte) und höchstens $r+b=k-1$ rote *und* blaue Kugeln (höchstens $k-2$ rote Kugeln).

Untersucht man die Anzahl der möglichen Teilmobiles mit zwei Aufhängungen, dann findet man:

$r+b=2$: Es gibt nur eine Möglichkeit, nämlich $r=1$ und $b=1$, Kurzschreibweise: (1 ; 1).
$r+b=3$: Es gibt nur eine Möglichkeit, nämlich (2 ; 1).
$r+b=4$: Es gibt zwei Möglichkeiten, nämlich (3 ; 1) und (2 ; 2).
$r+b=5$: Es gibt zwei Möglichkeiten, nämlich (4 ; 1) und (3 ; 2).

$r+b=6$: Es gibt drei Möglichkeiten, nämlich (5 ; 1), (4 ; 2) und (3 ; 3).
$r+b=7$: Es gibt drei Möglichkeiten, nämlich (6 ; 1), (5 ; 2) und (4 ; 3).

usw.

Mithilfe der folgenden Tabellen kann man dann erschließen, wie sich die Anzahl der möglichen Mobiles mit drei Aufhängungen und k Kugeln aus den verschiedenen Kombinationen von grünen, roten und blauen Kugeln errechnet:

$k=3$	g	1	
	$r+b$	1	gesamt
	Anzahl der Möglichkeiten	1	1

$k=4$	g	1	2	
	$r+b$	3	2	gesamt
	Anzahl der Möglichkeiten	1	1	2

$k=5$	g	1	2	3	
	$r+b$	4	3	2	gesamt
	Anzahl der Möglichkeiten	2	1	1	4

$k=6$	g	1	2	3	4	
	$r+b$	5	4	3	2	gesamt
	Anzahl der Möglichkeiten	2	2	1	1	6

$k=7$	g	1	2	3	4	5	
	$r+b$	6	5	4	3	2	gesamt
	Anzahl der Möglichkeiten	3	2	2	1	1	9

$k=8$	g	1	2	3	4	5	6	
	$r+b$	7	6	5	4	3	2	gesamt
	Anzahl der Möglichkeiten	3	3	2	2	1	1	12

Als Gesamtzahl der Möglichkeiten ergibt sich

- bei einer geraden Anzahl k von Kugeln: $2 \cdot \left[1+2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\cdot k-1\right)\right]$ und
- bei einer ungeraden Anzahl k von Kugeln: $2 \cdot \left[1+2+\cdots+\frac{1}{2}\cdot(k-3)\right]+\frac{1}{2}\cdot(k-1)$.

Diese Terme kann man mithilfe der Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen umformen:

$$\begin{aligned}2 \cdot \left[1+2+\cdots+\left(\tfrac{1}{2}\cdot k-1\right)\right] &= 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot k-1\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot k\right)\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(k-2)\cdot\left(\tfrac{1}{2}\cdot k\right)=\tfrac{1}{4}\cdot(k-2)\cdot k\end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned}2 \cdot \left[1+2+\cdots+\tfrac{1}{2}\cdot(k-3)\right]+\tfrac{1}{2}\cdot(k-1) &= 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(k-3)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(k-1)+\tfrac{1}{2}\cdot(k-1)\\ &= \tfrac{1}{2}\cdot(k-1)\cdot\left[\tfrac{1}{2}\cdot(k-3)+1\right]=\tfrac{1}{2}\cdot(k-1)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot(k-1)=\tfrac{1}{4}\cdot(k-1)^2\end{aligned}$$

Regel

Anzahl der möglichen Mobiles mit drei Aufhängungen aus*k*gleichen Kugeln

Für die Anzahl der möglichen Mobiles mit drei Aufhängungen aus k gleichen Kugeln gilt:

- Ist k eine ungerade Zahl, dann gibt es $\frac{1}{4} \cdot (k-1)^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(k^2 - 2k + 1\right)$ verschiedene Mobiles.
- Ist k eine gerade Zahl, dann gibt es $\frac{1}{4} \cdot (k-2) \cdot k = \frac{1}{4} \cdot \left(k^2 - 2k\right)$ verschiedene Mobiles. ◀

Anregungen zum Nachdenken und für eigene Untersuchungen

A 1.7: Überprüfen Sie die Gültigkeit der Regel für die Anzahl der möglichen Mobiles mit drei Aufhängungen, wenn $k=9$ und $k=10$, indem Sie jeweils alle diese Mobiles notieren und sie dann abzählen.

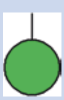
A 1.8: Die Abbildungen mit den Mobiles mit drei Aufhängungen wurden mithilfe eines einfachen Computerprogramms erstellt. Eingegeben werden drei Parameterwerte g, r, b für die Anzahl der grünen, roten und blauen Kugeln sowie ein Parameterwert s für die Stangenlänge. Beschreiben Sie den Zeichenalgorithmus mit Worten.

A 1.9: Wie in Abschn. 1.1 gezeigt wurde, gibt es zwei verschiedene Typen von Mobiles mit *vier* Aufhängungen. Untersuchen Sie analog zu den Mobiles mit drei Aufhängungen auch für diese beiden Typen, wie viele mögliche Mobiles es mit k Kugeln gibt ($k \geq 4$). Stellen Sie Regeln zur Berechnung dieser Anzahlen auf.

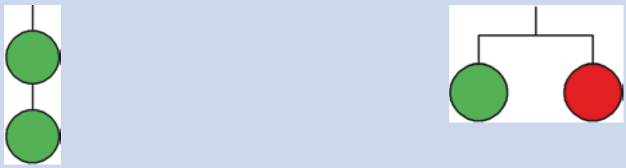
A 1.10: Untersuchen Sie, wie es sich auswirkt, wenn die in den vorangehenden Abschnitten vorgenommene Beschränkung hinsichtlich der Anzahl der Aufhängungen und der Kugeln nicht beachtet wird. Der Vollständigkeit halber sollen dabei auch die „langweiligen“ Mobiles mit nur einer Aufhängung betrachtet werden, bei denen nichts ins Gleichgewicht zu bringen ist.

Setzen Sie fort:

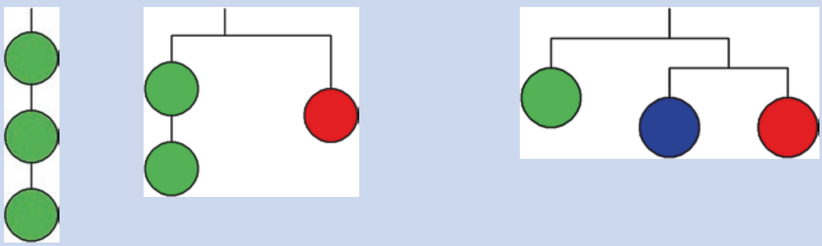
- Es gibt nur eine Möglichkeit, ein Mobile mit einer Kugel zu basteln.



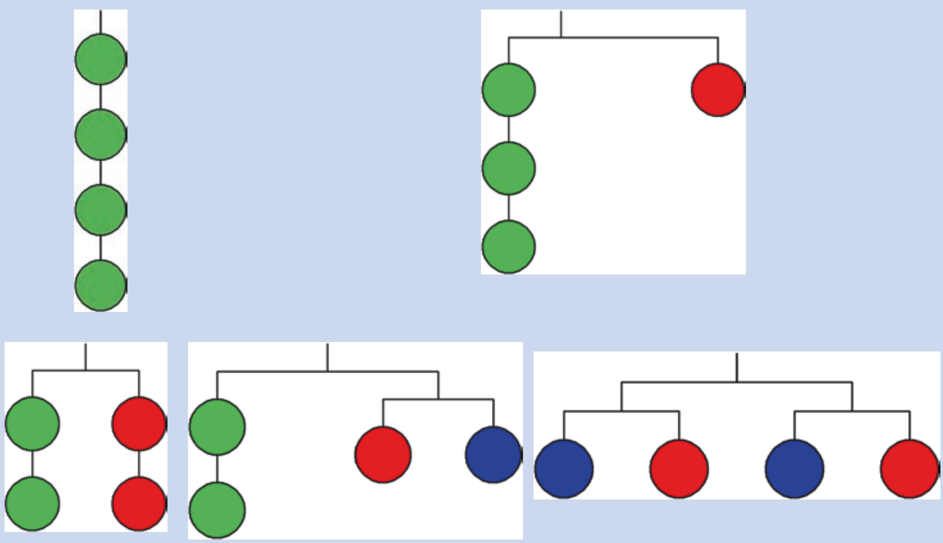
- Es gibt zwei Möglichkeiten, ein Mobile mit zwei Kugeln zu basteln.

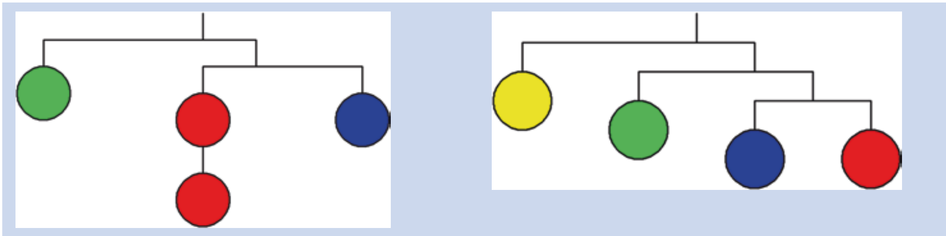


- Es gibt drei Möglichkeiten, ein Mobile mit drei Kugeln zu basteln.



- Es gibt sieben Möglichkeiten, ein Mobile mit vier Kugeln zu basteln.





1.3 Hinweise auf weiterführende Literatur

Bei **Wikipedia** findet man in deutscher (englischer, französischer) Sprache weitere Informationen und Literatur zu den Stichwörtern:

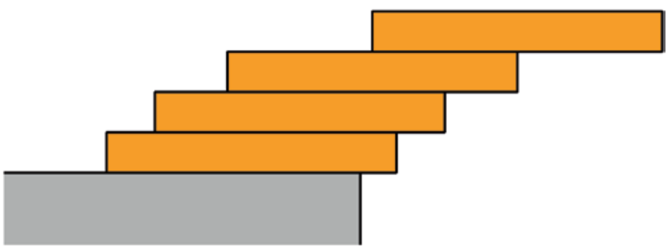
- Mobile – Kunst (Mobile – sculpture, Mobile – art)

Über alle Schranken hinaus

2

„Paradoxa des Unendlichen entstehen nur dann, wenn wir versuchen, mit unserem endlichen Geist das Unendliche zu diskutieren und letzterem diejenigen Eigenschaften zuzuordnen, die wir dem Endlichen und Begrenzten geben."

(Galileo Galilei, italienischer Physiker und Mathematiker, 1564–1642)



Jeder von uns hat schon einmal die Erfahrung gemacht, dass Türme aus aufeinandergestapelten Quadern leicht umfallen können. Im Spielzeughandel werden Geschicklichkeitsspiele angeboten, bei denen es darum geht, aus gleichartigen Quadern einen Turm zu bauen, aus dem dann nach und nach einzelne Quader herausgenommen werden sollen, bis der Turm zusammenbricht.

Kaum vorstellbar scheint daher, dass es möglich ist, einen Turm so aus gleichartigen Quadern zu errichten, dass der oberste Quader vollständig aus der Fläche herausragt, in der der unterste Quader liegt.

H. K. Strick, *Mathematik ist wunderschön*, https://doi.org/10.1007/978-3-662-61682-6_2

2.1 Stapeln von quaderförmigen Bausteinen mit Überhang

Als Quader geeignet sind beispielsweise Dominosteine oder glatte, homogene, quaderförmige Bausteine, aber auch Bücher gleichen Formats. Das Experiment kann sogar mithilfe eines gewöhnlichen Kartenspiels realisiert werden; dies ist allerdings nicht so eindrucksvoll wie mit Holzbausteinen.

Stapel aus einem Baustein

Die folgende Abbildung zeigt einen Baustein (grün), der auf einer Tischplatte (grau) als Unterlage so weit über die Kante geschoben wird, dass er gerade noch liegen bleibt, also nicht kippt und vom Tisch fällt. Dies ist im Prinzip der Fall, wenn sich der Schwerpunkt des Quaders über der Unterlage befindet: Der Baustein ist *gerade noch im Gleichgewicht,* wenn der Schwerpunkt genau über der Tischkante liegt.

Hinweis: Im Experiment wird man feststellen, dass es sehr schwierig ist, diese Grenzlage genau zu finden. Man wird also vorsichtig den Baustein so weit schieben, dass die Mitte des Quaders geringfügig links von der Tischkante liegt. Dies gilt für alle im Folgenden betrachteten Stapel mit Bausteinen.

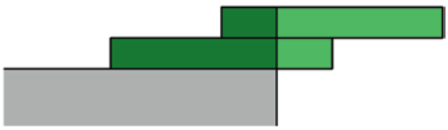
Man kann den Quader insgesamt als Hebel ansehen, dessen Drehpunkt die Tischkante darstellt (vgl. Kap. 1). Die linke und die rechte Hälfte des Quaders haben einen in der jeweiligen Mitte liegenden Massenschwerpunkt, auf den jeweils die Erdanziehungskraft wirkt (vgl. nachfolgende Grafik). Wenn die beiden Massenschwerpunkte den gleichen Abstand zum Drehpunkt haben, ist also der Quader im Gleichgewicht.

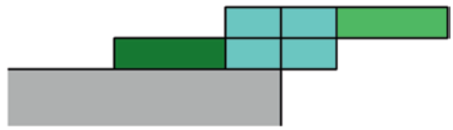
Bei den nachfolgenden Schritten soll diese eher physikalische Analyse der Situation nicht weiter verfolgt werden. Da es sich bei den verwendeten Bausteinen um homogene Körper handelt, genügt es, wenn man vereinfacht wie folgt argumentiert: Links und rechts von der Tischkante (vom Drehpunkt) erkennt man in der Abbildung gleich große Querschnittsflächen durch den Quader (dunkelgrün und hellgrün).

Wenn die verwendeten Bausteine eine Länge von 1 LE haben, dann liegen links und rechts vom Drehpunkt jeweils Teilquader der Länge $\frac{1}{2}$ LE.

Stapel aus zwei Bausteinen

Wenn man einen zweiten Baustein hinzunimmt, geht man am einfachsten wie folgt vor: Den zweiten Quader schiebt man so unter den ersten Quader, dass er rechts bündig mit der Tischkante abschließt. Dann schiebt man den gesamten Stapel aus zwei Quadern so weit nach rechts, dass die neu hinzukommende Quaderlänge von 1 LE gleichermaßen auf beide Quader sowie je zur Hälfte links und rechts von der Tischkante verteilt wird. In der rechts stehenden Grafik ist dies durch die vier gleichen hellblauen Rechtecke angedeutet.



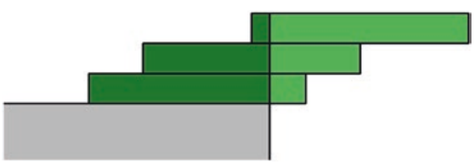


Die Längenbilanz bzgl. der Lage zur Tischkante kann dann so beschrieben werden:

Längenbilanz	Lage in Bezug auf den Drehpunkt	
	links	rechts
1. Baustein (oben)	$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$ LE	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ LE
2. Baustein (unten)	$\frac{3}{4}$ LE	$\frac{1}{4}$ LE
gesamt	1 LE	1 LE

Stapel aus drei Bausteinen

Beim dritten Baustein geht man analog vor: Man schiebt ihn so unter den vorhandenen Stapel aus zwei Quadern, dass er rechts bündig mit der Tischkante abschließt. Dann schiebt man den gesamten Stapel aus drei Quadern so weit nach rechts, dass die neu hinzukommende Länge von 1 LE gleichermaßen auf die drei Quader sowie je zur Hälfte links und rechts von der Tischkante verteilt wird (vgl. auch die Längenbilanz in der Tabelle rechts).



Längenbilanz	Lage in Bezug auf den Drehpunkt	
	links	rechts
1. Baustein (oben)	$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}$ LE	$\frac{3}{4}+\frac{1}{6}$ LE
2. Baustein	$\frac{3}{4}-\frac{1}{6}$ LE	$\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ LE
3. Baustein (unten)	$\frac{5}{6}$ LE	$\frac{1}{6}$ LE
gesamt	1,5 LE	1,5 LE