



Lothar Gaul
Christian Fiedler

Methode der Randelemente in Statik und Dynamik

2. Auflage



Springer Vieweg

Methode der Randelemente in Statik und Dynamik

Lothar Gaul • Christian Fiedler

Methode der Randelemente in Statik und Dynamik

2. korrigierte Auflage



Springer Vieweg

Lothar Gaul
Institut für Angewandte und
Experimentelle Mechanik
Bis 2006 Institut A für Mechanik
Univ. Stuttgart
Stuttgart
Deutschland

Christian Fiedler
Zürich
Schweiz

ISBN 978-3-8348-2536-0
DOI 10.1007/978-3-8348-2537-7

ISBN 978-3-8348-2537-7 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnetet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg
© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1997, 2013
Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags.
Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefrei und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe
Springer Science+Business Media
www.springer-vieweg.de

Vorwort

Drei Dekaden einer stürmischen Entwicklung der Randelementmethode haben ihren Niederschlag in zahlreichen Anwenderprogrammen gefunden, die zur Lösung von Feldproblemen der Statik und Dynamik in der industriellen Konstruktion, Forschung und Entwicklung eingesetzt werden. Daraus erklärt sich der gewachsene Bedarf anwendungsbezogener Ausbildung zum Verständnis der Grundlagen der Methode. In Vorlesungen und Anwenderkursen über die Finite Elemente Methode und die Methode der Randelemente haben die Autoren das erstgenannte Gebietsdiskretisierungsverfahren dem letztgenannten gegenübergestellt, Vor- und Nachteile des Einsatzes der ersten und der zweiten Methode sowie deren Kopplung vermittelt.

Erfahrungen aus den Lehrveranstaltungen und der Grundlagenforschung zur Randelementmethode in den Ingenieurwissenschaften sind in dieses Lehrbuch eingeflossen. Auf eine Darstellung des Standes der Forschung, z. B. über Formulierung im Zeitbereich und das Zitat grundlegender, überwiegend englischsprachiger Bücher, wird verzichtet. Zahlreiche Beispiele wurden so ausgewählt, daß die Lösung auch ohne Rechenprogramm möglich ist. Die Autoren hoffen auf diesem Wege, interessierten Ingenieuren, Physikern und Mathematikern in Konstruktions-, Forschungs- und Entwicklungsabteilungen sowie Studenten dieser Fachrichtungen im Vertiefungsstudium die Grundlagen zum Verständnis der Randelementmethode auf einfache Weise zu vermitteln.

Herr Dipl.-Ing. W. Wenzel (Univ. Stuttgart) hat die Entstehung des Manuskriptes durch kritische Durchsicht und mit wertvollen Beiträgen unterstützt. Herr Liu Zhangyu (Hefei University of Technology) berechnete sorgfältig Beispiele. Beiden gilt unser besonderer Dank. Den Herausgebern sowie dem Verlag danken wir für die Förderung des Buchprojektes.

März 1996

Lothar Gaul
(Stuttgart)

Christian Fiedler
(Hamburg)

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung und Grundlagen der Randelementmethode	1
1.1 Einführung und Überblick	1
1.2 Vergleich der Randelementmethode mit der Methode der Finiten Elemente	3
1.3 Grundlagen der Randelementmethode	5
1.3.1 Techniken gewichteter Residuen	5
1.3.2 Transformation einer Differentialgleichung auf den Rand	10
1.4 Eindimensionale Beispiele	13
1.4.1 Stab unter Streckenlast	13
1.4.2 Balken unter Biegebelastung	17
1.5 Allgemeine Vorgehensweise zur BEM- Formulierung	30
2 Mehrdimensionale Probleme: Wärmeleitung	33
2.1 Die Feldgleichung der Wärmeleitung	33
2.2 Ebene Problemstellung	35
2.3 Räumliche Problemstellung	38
2.4 Randelementformulierung der Laplace-Gleichung	39
2.4.1 Schwache Form der Differentialgleichung	39
2.4.2 Transformation auf den Rand	39
2.4.3 Wahl der Fundamentallösung als Wichtungsfunktion	45
2.4.4 Randintegralgleichung des ebenen Problems	46
2.4.5 Das Prinzip der Kollokationsmethode	53
2.4.6 Beispiel zur Wärmeleitung	54
2.4.7 Berechnung der Lösung für innere Punkte	64
2.5 Randelementformulierung der Poisson-Gleichung	65
2.5.1 Berechnung von Gebietsintegralen durch Integration	66
2.5.2 Berechnung von Gebietsintegralen durch Transformation auf den Rand	68
2.5.3 Berechnen der unbekannten Randwerte	72
2.6 Orthotrope Wärmeleitung	72
2.7 Indirekte Berechnung der Hauptdiagonalelemente der Matrix H'	74

2.8 Konzentrierte Wärmequellen	74
2.9 Substrukturtechnik	75
2.10 Beispiel: Orthotrope Wärmeleitung und Gebietskopplung	77
3 Anwendungen der BEM in der Elastomechanik	83
3.1 Grundlagen der Kontinuumsmechanik	83
3.1.1 Kinematik der Verformung	83
3.1.2 Bilanzgleichungen der Kontinuumsmechanik	93
3.1.3 Das Stoffgesetz	100
3.1.4 Lamé-Navier-Gleichungen	101
3.2 Integralformulierung der Bewegungsgleichung	104
3.2.1 Vorbemerkung	104
3.2.2 Schwache Form der Bewegungsgleichung	104
3.2.3 Inverse Form der gewichteten Gleichung	106
3.2.4 Somigliana-Identität, Verschiebungintegralgleichung	109
3.3 Übergang zur Randintegralgleichung	112
3.4 Numerische Implementierung der Randintegralgleichung	115
3.4.1 Ortsdiskretisierung	116
3.4.2 Diskretisierung der Randlösung	118
3.4.3 Aufbau des Gleichungssystems mit der Kollokationsmethode	120
3.5 Beispiel: Berechnung im Frequenzbereich	123
3.5.1 Lamé-Navier Gleichungen in Zylinderkoordinaten	123
3.5.2 Symmetriebedingungen	124
3.5.3 Näherungslösung des Feldproblems	125
3.5.4 Anpassung an Randbedingungen	127
3.5.5 Statischer Fall	131
3.5.6 Eindimensionaler Fall	132
3.5.7 Vergleich BEM – analytische Lösung	132
4 Numerische Integration	137
4.1 Quadraturformeln	137
4.2 Eindimensionale Integration	137
4.2.1 Rechteckverfahren	137
4.2.2 Sehnentrapezformel	138
4.2.3 Simpsonregel	139
4.2.4 Vergleich der Verfahren	140
4.2.5 Gaußsche Quadraturformeln	141
4.2.6 Ermittlung von Gauß-Quadraturformeln	144
4.3 Mehrdimensionale Integration	152
4.4 Singuläre Integration	156
4.4.1 Schwach singuläre Integration	156
4.4.2 Stark singuläre (Cauchy-singuläre) Integration	161

Anhang A Fundamentallösungen	169
Anhang B Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung	191
Literatur	193
Sachverzeichnis	195

Notation

Verwendet wird die Einsteinsche Summationskonvention, bei der über doppelt vorkommende Indizes summiert wird. So ist die Spur einer $(n \times n)$ Matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}]$

$$\sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}. \quad (1)$$

Das Skalarprodukt zweier Vektoren

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \quad \text{und} \quad \vec{b} = \sum_{j=1}^3 b_j \vec{e}_j \quad (2)$$

mit den Koordinaten a_i, b_j und den orthonormierten Basisvektoren \vec{e}_i, \vec{e}_j lautet

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = a_i b_j \delta_{ij} = a_i b_i = a_i b_i = a_i b_i \quad (3)$$

unter Verwendung des Kronecker-Symbols

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \quad (4)$$

Das zugeordnete Vektorprodukt ergibt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \vec{e}_i \quad (5)$$

mit dem Permutationssymbol ϵ_{ijk} , das für gerade Permutationen (123, 231, 312) den Wert 1, für ungerade Permutationen (132, 321, 213) den Wert -1 und sonst den Wert 0 annimmt. Das Matrizenprodukt $\mathbf{AB} = \mathbf{C}$ zweier Matrizen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ und $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ ist die Matrix \mathbf{C} mit den Elementen

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj}, \quad (6)$$

wobei die Summation über k die Gleichheit der Spaltenzahl von \mathbf{A} mit der Zeilenzahl von \mathbf{B} fordert. Faßt man die Vektoren $\mathbf{a} = \{a_i\}$ und $\mathbf{b} = \{b_i\}$ als $(n \times 1)$ Matrizen auf, so kann man für das Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} \quad (7)$$

schreiben. Transponiert man \mathbf{b} , so folgt

$$\mathbf{C} = a \mathbf{b}^T = \vec{a} \otimes \vec{b} \quad (8)$$

mit den Elementen $c_{ij} = a_i b_j$.

1.1 Einführung und Überblick

Bei der Konzeption und Auslegung technischer Bauteile spielt die numerische Simulation heute oft eine wesentliche Rolle, da einerseits Experimente oftmals zu kostspielig oder aber technisch nicht durchführbar sind, andererseits in der Computerwelt rasende Fortschritte erzielt werden. Um Experimente zu ergänzen oder sogar zu ersetzen, müssen die Simulationsverfahren einer Reihe hoher Anforderungen genügen. Die wesentliche Forderung besteht darin, dass die Berechnung auf effizientem Weg möglichst genaue Ergebnisse liefert, d.h. das reale System, seine Belastung und seine Reaktion auf diese Belastung möglichst genau widerspiegelt.

Ausgehend vom realen technischen System wird zunächst eine Abbildung der Wirklichkeit auf ein Modell durchgeführt, wobei entweder bekannte physikalische Gesetze oder, wenn diese nicht zur Verfügung stehen, Versuche, Beobachtungen und Messreihen herangezogen werden. Bekannte Methoden der Modellbildung sind, abhängig von der Aufgabenstellung, das Verfahren der Mehrkörpersysteme sowie die kontinuierliche Modellierung. Die dem Modell zugrundeliegenden Differentialgleichungen lassen sich jedoch nur in den einfachsten Fällen analytisch lösen. Für komplexe Aufgabenstellungen sind numerische Verfahren erforderlich. Hier haben sich in vielen Bereichen der Technik Finite-Elemente-Verfahren und in jüngerer Zeit auch Randelementverfahren (Boundary Element Methods, im folgenden kurz BEM genannt) durchgesetzt. Eine abschließende physikalische Interpretation und kritische Bewertung des gewonnenen Ergebnisses liefert schließlich die gesuchte Ingenieurlösung. Diese Vorgehensweise ist in Abb. 1.1 [29] noch einmal zusammenfassend dargestellt.

Das vorliegende Buch folgt der Vorgehensweise, indem für die verschiedenen Problemstellungen zunächst die theoretischen Grundlagen bereitgestellt werden. Dies erscheint gerade für die Anwendung der Randelementmethode unverzichtbar zu sein, da diese Methode eine weitaus größere analytische Vorarbeit voraussetzt als beispielsweise die

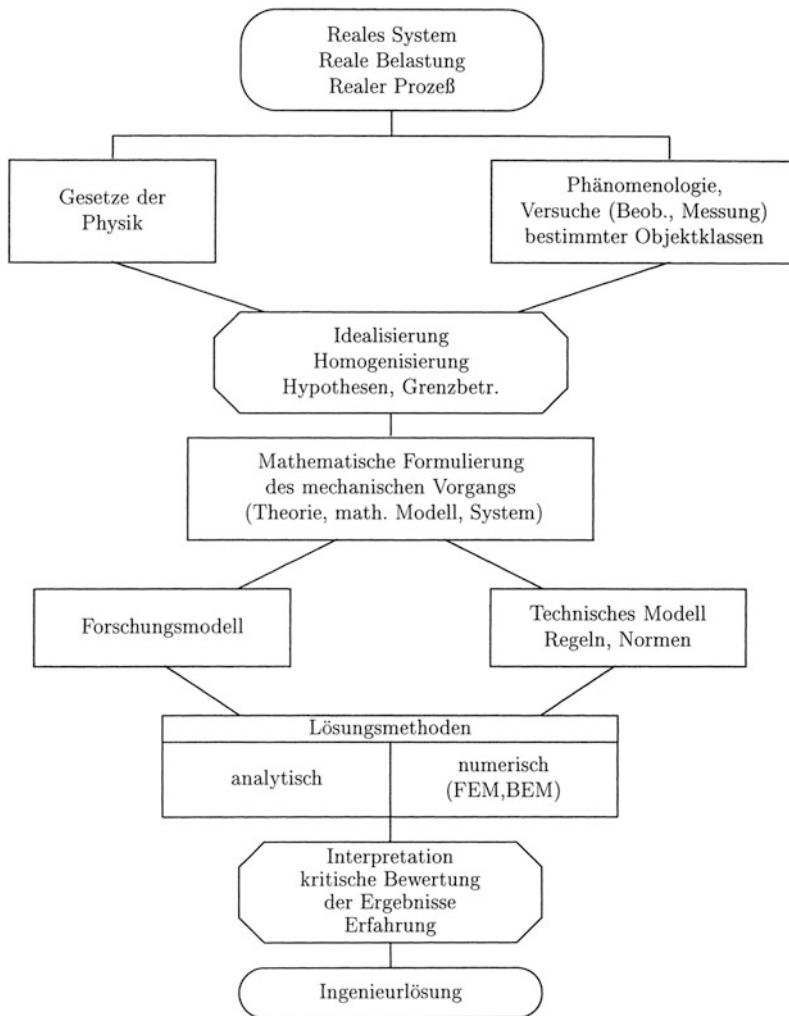


Abb. 1.1 Einbettung der Berechnung in die Ingenieraufgabe

Finite-Elemente-Methode. Orientiert an den einzelnen Problemstellungen sollen dann wesentliche Merkmale und Vorgehensschritte in der Randelementmethode erarbeitet, angewandt und ausgebaut werden. Dabei steht immer wieder der Vergleich der numerischen mit der analytischen Lösung an. Werden im ersten Kapitel, nach einer Vorstellung der Grundlagen, einfache eindimensionale Probleme, wie die Belastung eines eindimensionalen Stabes betrachtet, so soll in den folgenden Kapiteln die Methode auf die Laplace-Gleichung der Wärmeleitung sowie die Lamé-Naviersche Gleichung der Elastizitätstheorie übertragen werden. Einer Betrachtung der numerischen Quadratur wird ein eigenes Kapitel gewidmet, da es dabei um eine wesentliche Problematik der Randelementmethode handelt.

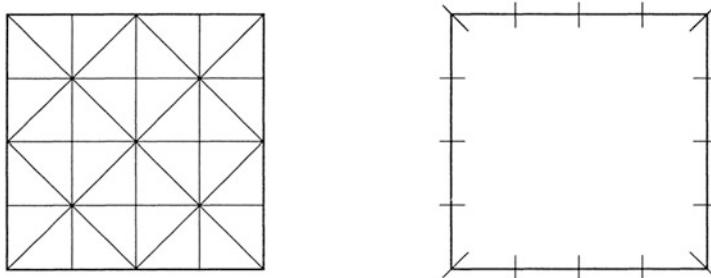


Abb. 1.2 Diskretisierung mit Finiten Elementen und Randelementen

1.2 Vergleich der Randelementmethode mit der Methode der Finiten Elemente

Wegen des Bedarfes an Lösungen komplizierter Feldprobleme im Ingenieurbereich sind in den letzten Jahrzehnten umfangreiche Programmpakete entwickelt worden, welche zumeist Finite Elemente Verfahren verwenden. Daher soll hier kurz auf die wesentlichen Merkmale und Unterschiede beider Verfahren eingegangen werden.

Ein prinzipieller Unterschied zwischen der Randelementmethode und der Finite-Elemente-Methode liegt in der Diskretisierung des zu untersuchenden Bauteils. Wie Abb. 1.2 zeigt, wird bei der Finite-Elemente-Methode das gesamte Gebiet diskretisiert, während bei der Randelementmethode nur eine Diskretisierung auf dem Rande erforderlich ist.

Bei der Randelementmethode wird die Dimension des Problems um eins reduziert, was einen wesentlich geringeren Speicherbedarf für die geringere Anzahl der Freiheitsgrade als Unbekannte des numerisch zu lösenden Gleichungssystems zur Folge hat.

Die im Vergleich mit Gebietsverfahren tiefergehende analytische Formulierung der Methode als Randintegralgleichungsverfahren mit Fundamentallösungen als Wichtungsfunktionen, welche die linearen Feldgleichungen exakt erfüllen, zahlt sich in der höheren Genauigkeit der Ergebnisse aus.

Die Randintegralgleichung wird durch Finite Elemente auf dem Gebietsrand, sogenannte Randelemente, diskretisiert. Nach dieser Algebraisierung lassen sich unbekannte Randgrößen berechnen, die den Randbedingungen genügen.

Weiterhin bietet die Randelementmethode die Möglichkeit, im Rahmen einer Nachbereitung Feldgrößen an beliebigen Punkten im Gebiet zu berechnen, und nicht nur an vorher festgelegten Knotenpunkten einer Diskretisierung.

In den Anwendungen interessieren insbesondere Ableitungen der Feldgrößen im Gebiet, z. B. Spannungen aus Verschiebungsableitungen oder Wärmeflüsse aus Temperaturgradienten. Bei der Finite-Elemente-Methode dominieren Verschiebungsverfahren, bei denen die Spannungen aus Ableitungen der Verschiebungsansätze keine befriedigende

Tab. 1.1 Vor- und Nachteile der BEM gegenüber der FEM

Vorteile	Nachteile
Nur der Rand muss diskretisiert werden	Nicht symmetrisches, vollbesetztes Gleichungssystem bei Kollokations- und Galerkin-Verfahren
Einfachere Datenaufbereitung (z. B. mit CAD-Geometriedaten)	Konstitutive Eigenschaften müssen im Gebiet homogen sein (Inhomogene Gebiete erfordern den Einsatz der Substrukturtechnik)
Hohe Genauigkeit bei Spannungskonzentrationsproblemen	Die Kenntnis sogenannter Fundamentallösungen (Greenscher Einflußfunktionen) zur Feldgleichung ist notwendig
Einfache Modellierung unendlicher und halb-unendlicher Gebiete	In der praktischen Anwendung junges Verfahren
Vorteilhafte Behandlung von symmetrischen Problemen (d. h. keine Knotenpunkte in den Symmetrieebenen)	Anwenderwissen im Umgang mit BEM-Programmen noch nicht so groß wie bei den FEM-Programmen
Gezielte Innenpunkttauswertung der Feldgrößen und deren Ableitungen	

Genauigkeit ergeben. Die Spannungsermittlung aus Integralgleichungsmethoden führt wegen der analytischen Differenzierbarkeit im Gebiet auf hohe Genauigkeit. Dies qualifiziert die Randelementmethode insbesondere für Spannungskonzentrationsprobleme.

Numerische Probleme infolge von Singularitäten bei der Berechnung von Feldgrößen und deren Ableitungen in Randnähe, in der sogenannten Grenzschicht, lassen sich mit angepaßten Formulierungen handhaben.

Die Methode der Randelemente gibt es in vielen Varianten. Grundlegend sind die direkten Methoden von den indirekten Methoden zu unterscheiden. Die indirekten Methoden werden in diesem Buch nicht behandelt. Bei ihnen benutzt man verschiedene Fundamentallösungen mit unbekannten Belegungsdichten. Deren Intensität wird so bestimmt, dass entlang des Gebietsrandes gegebene Randwerte angenommen werden.

Einige Vor- und Nachteile der Randelementmethode gegenüber dem Finiten-Elemente-Verfahren sind in Tab. 1.1 dargestellt:

Zusammengefasst ist zu erkennen, dass die Randelementmethode eine wichtige Ergänzung der Finite-Elemente-Methode sein kann, sie aber nicht ersetzen wird.

Einige mathematische und numerische Aspekte der Randelementmethode sind in Abb. 1.3 [27] zusammenfassend dargestellt. Diese Abbildung soll einen Überblick über die Begriffe, die Vorgehensweise und die verschiedenen Verfahren in der Randelementmethode bieten, so dass eine Einordnung der Methoden und Begriffe in den Gesamtzusammenhang des Berechnungsvorgangs erleichtert wird.

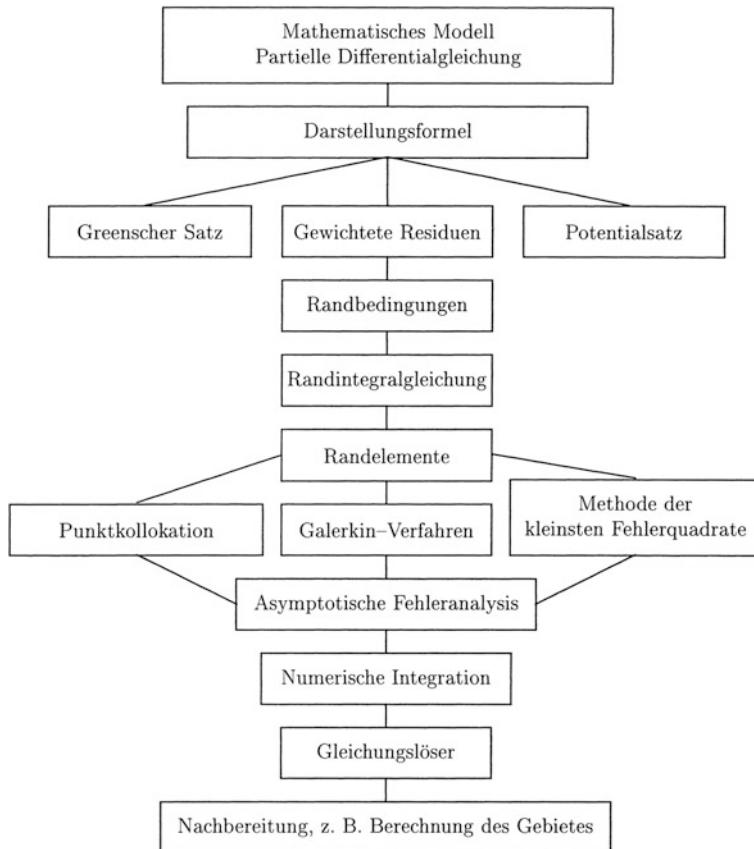


Abb. 1.3 Mathematische und numerische Aspekte der Randelementmethode

1.3 Grundlagen der Randelementmethode

Man spricht von gewichteten Residuen, wenn Lösungen von Feldproblemen nicht über die Feldgleichungen direkt, sondern im integralen Mittel über das gesamte Gebiet, gewichtet mit Test- oder Wichtungsfunktionen, ermittelt werden. Da Sonderfälle der Techniken gewichteter Residuen den Ausgang sowohl für Finite-Elemente-Formulierungen als auch für Randelemente-Formulierungen darstellen, werden sie als Grundlagen vorangestellt.

1.3.1 Techniken gewichteter Residuen

Für die Differentialgleichung

$$u'(x) + u(x) = x \quad (1.1)$$

mit der Randbedingung $\bar{u} = u(0) = 0$ soll für den Bereich $0 \leq x \leq 1$ eine Näherungslösung gesucht werden. Dabei sollen fünf verschiedene Verfahren angewandt werden, welche alle nach dem gleichen Prinzip arbeiten: Der Fehler, auch Defekt oder Residuum genannt, der durch die Näherung entsteht, soll minimiert werden.

Die strenge Lösung erfüllt die Differentialgleichung identisch, d. h.

$$u' + u - x \equiv 0. \quad (1.2)$$

Sie lautet $u = e^{-x} + x - 1$, und speziell $u(1) = 0.3678 \dots$.

Die Lösung der Differentialgleichung (1.1) kann auch als Potenzreihe

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (1.3)$$

dargestellt werden, sofern diese die Randbedingung $\bar{u} = 0$ erfüllt. Als Näherung wählen wir einen Teil dieser Potenzreihe und bezeichnen diese, um sie von der exakten Lösung zu unterscheiden, mit \hat{u} . Wir wählen also als Ansatzfunktion beispielsweise

$$\hat{u} = ax^2 + bx^3. \quad (1.4)$$

Wie man leicht sieht, erfüllt dieser Ansatz die gegebene Randbedingung. Es müssen nun also die Koeffizienten a und b bestimmt werden. Die Näherung \hat{u} ergibt einen Defekt oder ein Residuum $\epsilon(x)$ (vgl. mit Gl. (1.2))

$$\hat{u}'(x) + \hat{u}(x) - x = \epsilon(x) \quad (1.5)$$

oder nach Einsetzen der Ansatzfunktion

$$\epsilon(x) = 2ax + 3bx^2 + ax^2 + bx^3 - x. \quad (1.6)$$

Die Frage lautet nun also: Wie können die Koeffizienten a und b so bestimmt werden, dass das Residuum $\epsilon(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 1$ minimal wird?

1.3.1.1 Kollokationsmethode

Das Residuum wird an diskreten Punkten zu Null gesetzt, und zwar an so vielen Stellen, wie der Ansatz Koeffizienten besitzt. Da zwei Koeffizienten zu bestimmen sind, wählen wir zwei Stellen, z. B. $x = 0.5$ und $x = 1$. In das Residuum (1.6) eingesetzt, ergeben sich die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} \epsilon(0.5) &= 1.25 \cdot a + 0.875 \cdot b - 0.5 = 0 \\ \epsilon(1) &= 3 \cdot a + 4 \cdot b - 1 = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

für a und b . Daraus folgt nach Auflösen des Gleichungssystems die Näherungslösung

$$\hat{u}_1 = 0.474x^2 - 0.105x^3, \quad (1.8)$$

und speziell $\hat{u}_1(1) = 0.369$.

Mit Hilfe der Dirac-Distribution $\delta(x - \xi)$ lässt sich dieses Ergebnis verallgemeinern. Die Dirac-Distribution ist folgendermaßen definiert:

Definition 1.1 Es ist $\delta(x - \xi) = 0$ außer für $x = \xi$, wo die Dirac-Distribution so über alle Grenzen wächst, daß das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) dx = 1$$

ist.

Distributionen (lat. Verteilung), auch verallgemeinerte Funktionen genannt, können – mit etwas Vorsicht – wie gewöhnliche Funktionen behandelt werden. Für die Dirac-Distribution bedeutet dies hier, dass sie nur unter einem Integral weiterverarbeitet wird.

Satz 1.1 Die Dirac-Distribution besitzt die Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - \xi) dx = f(\xi),$$

die als Filtereigenschaft bezeichnet wird, da sie den Wert der Funktion f an der Stelle ξ herausfiltert.

Die Filtereigenschaft ist für die Randelementmethode von wesentlicher Bedeutung. In diesem Beispiel wird jedoch nur von der Möglichkeit Gebrauch gemacht, die Bestimmungsgleichungen des obigen Beispiels allgemeiner zu schreiben als

$$\int_0^1 \epsilon w_1 dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \epsilon w_2 dx = 0 \quad (1.9)$$

mit den Wichtungsfunktionen

$$w_1 = \delta(x - 0.5) \quad \text{und} \quad w_2 = \delta(x - 1). \quad (1.10)$$

1.3.1.2 Methode der Momente

Hier wird das Residuum nicht mit δ -Funktionen, sondern mit einem Satz linear unabhängiger Funktionen gewichtet. Linear unabhängig sind n Funktionen f_i in Analogie zur linearen Unabhängigkeit von Vektoren, genau dann, wenn aus $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n = 0$ stets $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ folgt.

Wählt man z. B. $w_1 = 1$ und $w_2 = x$ als Wichtungsfunktionen und setzt diese in Gl. (1.9) ein, so erhält man nach Integration die Bestimmungsgleichungen

$$\begin{aligned} 1.333a + 1.25b - 0.5 &= 0 \\ 0.9166a + 0.95b - 0.333 &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Daraus folgt nach Auflösen des Gleichungssystems die Näherungslösung

$$\hat{u}_2 = 0.483x^2 - 0.115x^3, \quad (1.12)$$

und speziell $\hat{u}_2(1) = 0.368$.

1.3.1.3 Galerkin-Verfahren

Beim Galerkin-Verfahren werden als Wichtungsfunktionen die Ansatzfunktionen selbst verwendet, es ist also $\hat{u} = aw_1 + bw_2$. In unserem Beispiel war $w_1 = x^2$ und $w_2 = x^3$. Man erhält analog zum obigen Vorgehen die Näherungslösung

$$\hat{u}_3 = 0.475x^2 - 0.107x^3, \quad (1.13)$$

und speziell $\hat{u}_3(1) = 0.368$.

1.3.1.4 Teilgebiete-Verfahren

Hier wird das Gesamtgebiet in so viele Teilgebiete aufgeteilt, wie der Ansatz Koeffizienten besitzt, im vorliegenden Beispiel wählen wir $0 \leq x \leq 1/2$ und $1/2 < x \leq 1$. Damit erhalten wir die Bestimmungsgleichungen

$$\int_0^{1/2} \epsilon dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_{1/2}^1 \epsilon dx = 0. \quad (1.14)$$

Dies liefert die Näherung

$$\hat{u}_4 = 0.485x^2 - 0.118x^3, \quad (1.15)$$

und speziell $\hat{u}_4(1) = 0.367$.

Die Wichtungsfunktionen lassen sich in diesem Fall mit Hilfe der Heavisideschen Sprungfunktionen sehr einfach darstellen.

Definition 1.2 Die Heaviside-Funktion, auch Einschaltfunktion oder Einheitssprungfunktion genannt, ist diejenige reelle Funktion $H(x)$ einer Variablen x , die für negative Argumente den Wert Null und für positive Argumente den Wert Eins besitzt. (Für $x = 0$ findet man unterschiedliche Definitionen, dieser Wert ist jedoch i. a. nicht von Interesse.)

Damit erhält man die Wichtungsfunktionen w_1 und w_2 zu

$$w_1 = H(x - 0) - H(x - 0.5) \quad \text{und} \quad w_2 = H(x - 0.5). \quad (1.16)$$

1.3.1.5 Fehlerquadratminimierung

Bei der Fehlerquadratminimierung wird das Integral über das Quadrat des Residuums minimiert. Dieses Integral hängt nur von den Ansatzkoeffizienten a und b ab, woraus folgt, dass die partiellen Ableitungen nach den Ansatzkoeffizienten a und b verschwinden müssen. Da a und b nicht von x abhängen, können die partiellen Ableitungen auch unter das Integral gezogen werden, womit die Bestimmungsgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^1 \epsilon^2(x, a, b) dx = 2 \int_0^1 \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial a} dx = 0 \quad (1.17)$$

Tab. 1.2 Techniken gewichteter Residuen:
Wichtungsfunktionen

Verfahren	Wichtungsfunktionen
1. Kollokationsverfahren	$w_1 = \delta(x - 0.5)$ $w_2 = \delta(x - 1)$
2. Methode der Momente	$w_1 = 1$ $w_2 = x$
3. Galerkin-Verfahren	$w_1 = x^2$ $w_2 = x^3$
4. Teilgebietsverfahren	$w_1 = H(x - 0) - H(x - 0.5)$ $w_2 = H(x - 0.5)$
5. Fehlerquadratminimierung	$w_1 = \frac{\partial \epsilon}{\partial a} = 2x + x^2$ $w_2 = \frac{\partial \epsilon}{\partial b} = 3x^2 + x^3$

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_0^1 \epsilon^2(x, a, b) dx = 2 \int_0^1 \epsilon \frac{\partial \epsilon}{\partial b} dx = 0. \quad (1.18)$$

folgen. Die Wichtungsfunktionen sind also

$$w_1 = \frac{\partial \epsilon}{\partial a} \quad \text{und} \quad w_2 = \frac{\partial \epsilon}{\partial b}. \quad (1.19)$$

Die Näherung lautet

$$\hat{u}_5 = 0.478x^2 - 0.110x^3, \quad (1.20)$$

und speziell $\hat{u}_5(1) = 0.368$.

1.3.1.6 Zusammenfassung

Allen fünf Techniken ist gemeinsam, dass zur Bestimmung der Ansatzkoeffizienten ein verschwindendes gewichtetes Residuum betrachtet wurde. Allgemein lautet die Minimierungsbedingung

$$\int_0^1 \epsilon w_1 dx = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \epsilon w_2 dx = 0 \quad (1.21)$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\int_0^1 \epsilon \{w\} dx = \{0\} \quad \text{mit} \quad \{w\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}. \quad (1.22)$$

Die Wichtungsfunktionen für die 5 Beispiele sind in Tab. 1.2 zusammengefasst.

Die Methode der gewichteten Residuen hat eine sehr allgemeine Bedeutung. Finite-Element- und Randelementverfahren lassen sich aus Formulierungen mit gewichteten Residuen herleiten.

1.3.2 Transformation einer Differentialgleichung auf den Rand

Mit Hilfe der Technik des gewichteten Residuums und mehrmaliger partieller Integration gelangt man zu einer Darstellung des Problems, bei der der Operator der Differentialgleichung (Differentialoperator) nicht mehr auf die Feldfunktion u , sondern auf die Wichtungsfunktion w (oft auch als Testfunktion bezeichnet) angewandt wird. Der Operator wird auf die Testfunktion ‘gewälzt’. Wählt man dann die Wichtungsfunktion w so, dass der Differentialoperator angewandt auf w gerade die Lösung der Dgl. mit der δ -Distribution auf der rechten Seite ist, so erhält man mit Hilfe der Filtereigenschaft der δ -Distribution eine Gleichung für die Feldfunktion u , in der nur die Wichtungsfunktion w , sowie bekannte und unbekannte Randwerte auftreten. Durch Einsetzen der gegebenen Randbedingungen können dann die unbekannten Randwerte berechnet werden. Damit lässt sich schließlich der Wert der Feldfunktion u an jeder Stelle im Innern des Gebiets bestimmen.

Betrachten wir z. B. die (inhomogene) Differentialgleichung

$$\underbrace{\frac{d^2u}{dx^2} + u}_{\mathcal{L}(u)} = -x \quad (1.23)$$

im Gebiet $0 \leq x \leq 1$ mit den Randbedingungen $u = \bar{u}$ auf dem Rande Γ :

$$\bar{u}_1 = u(x=0) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{u}_2 = u(x=1) = 0, \quad (1.24)$$

welche als homogene Randbedingungen (Null-Randbedingungen) bezeichnet werden, so ist $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} + 1$ der oben erwähnte Differentialoperator. Zur Transformation auf den Rand müssen nun folgende Schritte unternommen werden:

Schritt 1 Wichtung der Differentialgleichung mit der Testfunktion w . Diese Form wird als schwache Form der Differentialgleichung bezeichnet, weil sie nicht die exakte Lösung der Differentialgleichung verlangt, sondern nur eine Lösung, welche die Differentialgleichung *im Mittel* über dem betrachteten Gebiet erfüllt,

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2u}{dx^2} + u + x \right) w dx = 0. \quad (1.25)$$

Schritt 2 Partielle Integration ($\int u' w dx = [uw] - \int uw' dx$) des Differentialoperators so oft, wie es der Ordnung der Differentialgleichung entspricht, hier also zweimal, zunächst

$$\int_0^1 \frac{d^2u}{dx^2} w dx = \left[\frac{du}{dx} w \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dw}{dx} dx \quad (1.26)$$

und schließlich

$$\int_0^1 \underbrace{\left(\frac{d^2 w}{dx^2} + w \right) u dx}_{\mathcal{L}^*(w)} + \int_0^1 x w dx + \underbrace{\left[\frac{du}{dx} w \right]_0^1}_{[u'w]_0^1} - \underbrace{\left[u \frac{dw}{dx} \right]_0^1}_{[uw']_0^1} = 0. \quad (1.27)$$

Dabei sind $u'(0)$ und $u'(1)$ die unbekannten, d. h. noch zu ermittelnden Randwerte und $\bar{u}(0)$ und $\bar{u}(1)$ die gegebenen Randwerte. Da die Randgrößen u gegeben und u' gesucht sind, liegt ein einfaches Randwertproblem vor. Sind Randbedingungen sowohl in u als auch in u' gegeben, so spricht man von einem gemischten Randwertproblem. Man erkennt außerdem, daß für den neu entstandenen Differentialoperator $\mathcal{L}^*(w) = \mathcal{L}(w)$ gilt. Man bezeichnet den Differentialoperator dann als *selbstadjungiert*.

Schritt 3 Nun wählt man die Wichtungsfunktion $w(x, \xi)$ so, daß w gleich u^* ist, d. h. gleich der Lösung der (zugehörigen homogenen) Differentialgleichung

$$\mathcal{L}^*(u^*) = \frac{d^2 u^*}{dx^2} + u^* = \delta(x, \xi) = \delta(x - \xi) \quad (1.28)$$

wird. Dabei ist ξ der sog. Ladepunkt im Innern des Gebiets, für den Werte der Feldfunktion u berechnet werden sollen. Die Lösung von Gl. (1.28) wird *Fundamentallösung* genannt. Ist w so gewählt, dann erhält man mit der Filtereigenschaft der Dirac-Distribution

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 u^*}{dx^2} + u^* \right) u dx = \int_0^1 \delta(x, \xi) u(x) dx = u(\xi), \quad (1.29)$$

und es wird aus Gl. (1.27)

$$u(\xi) = - \int_0^1 x u^*(x, \xi) dx - \left[\frac{du}{dx} u^* \right]_0^1 + \left[u \frac{du^*}{dx} \right]_0^1, \quad (1.30)$$

wobei der letzte Term der rechten Seite verschwindet, wenn man die homogenen Randbedingungen einsetzt. Im inhomogenen Fall erhält man ein Gleichungssystem mit 2 Unbekannten für u bzw. $\frac{du}{dx}$.

Schritt 4 Als nächstes ist die Fundamentallösung zu bestimmen. Dazu betrachtet man die homogene Differentialgleichung in einem unendlich großen Gebiet *ohne Randbedingungen*. Die zu lösende Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{d^2 u^*}{dx^2} + \lambda^2 u^* = \delta(x - \xi), \quad (1.31)$$

wobei in Gl. (1.28) $\lambda = 1$ ist. Gl. (1.31) wird auch eindimensionale Helmholtz-Gleichung genannt. Die Herleitung der Fundamentallösung für dieses Problem ist zusammen mit