BestMasters

RESEARCH

Lukas Scharfe

Geometrie der Allgemeinen Relativitätstheorie

Eine Einführung aus differentialgeometrischer Perspektive

Springer Spektrum

BestMasters

Mit **„BestMasters"** zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften. Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Springer awards **"BestMasters"** to the best master's theses which have been completed at renowned Universities in Germany, Austria, and Switzerland. The studies received highest marks and were recommended for publication by supervisors. They address current issues from various fields of research in natural sciences, psychology, technology, and economics. The series addresses practitioners as well as scientists and, in particular, offers guidance for early stage researchers.

Lukas Scharfe

Geometrie der Allgemeinen Relativitätstheorie

Eine Einführung aus differentialgeometrischer Perspektive

Springer Spektrum

Lukas Scharfe
Darmstadt, Deutschland

ISSN 2625-3577 ISSN 2625-3615 (electronic)
BestMasters
ISBN 978-3-658-40360-7 ISBN 978-3-658-40361-4 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40361-4

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen und einige dankende Worte aussprechen.

Zuerst gebührt mein Dank meinen Betreuern Herr Prof. Dr. Stefan Scherer und Herr Dr. Moritz Rahn. Herr Scherer hat durch seine tatkräftige Unterstützung meines Vorhabens, eine interdisziplinäre Masterarbeit mit physikalischen und mathematischen Inhalten zu schreiben, diese Arbeit überhaupt erst ermöglicht. Die Auseinandersetzung mit dem Thema aus beiden Perspektiven war für mich eine große Bereicherung und hat mir viel Freude bereitet. Besonders bedanken möchte ich mich bei beiden Betreuern für ihr großes Engagement einer kontinuierlichen und intensiven Betreuung. Die gemeinsamen und angenehmen Treffen waren für mein eigenes Verständnis der Inhalte äußerst wertvoll und zielführend. Die Gespräche haben stets meinen Blick für die wesentlichen Inhalte und die wichtigen Details verschärft und so zu einer tieferen Auseinandersetzung geführt. Außerdem konnten einige Probleme und Unklarheiten aufgedeckt und beseitigt werden. Für die Zeit, die sich Herr Scherer und Herr Rahn während der letzten sechs Monate großzügig genommen haben, möchte ich noch einmal ausdrücklich Danke sagen.

Ich möchte auch meiner Familie und insbesondere meinen Eltern und Großeltern danken, die mir während des gesamten Studiums mit Rat und Tat zur Seite standen und mich auch weiterhin in meinen Entscheidungen unterstützen. Ich bin sehr dankbar dafür, dass sie mich alle den ganzen Weg begleiten konnten. Schließlich danke ich auch meiner Freundin Jule Wolf für ihre Unterstützung und dafür, dass sie in jeder Lebenslage für mich da ist.

Zu guter Letzt danke ich auch meinen Kommilitonen und Freunden, die das Studium zu etwas Einzigartigem gemacht haben. Durch die gemeinsame Zeit der letzten Jahre sind Freundschaften entstanden, die für mich besonders wertvoll geworden sind.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

1 Einleitung

> *Dem Zauber dieser Theorie wird sich kaum jemand entziehen können, der sie wirklich erfasst hat; sie bedeutet einen wahren Triumph der durch Gauss, Riemann, Christoffel, Ricci und Levi-Civita begründeten Methode des allgemeinen Differentialkalküls.* (Einstein, 1915)

Nicht ohne Grund wird Albert Einsteins Entwicklung der *Allgemeinen Relativitätstheorie* (ART) als eine der größten geistigen Leistungen eines einzelnen Menschen gerühmt. Nachdem ich mich im Rahmen dieser Arbeit mit Einsteins Ideen und seiner Suche nach einem relativistischen Gravitationsgesetz beschäftigen durfte, hat auch mich der Zauber seiner in sich geschlossenen Theorie in den Bann gezogen. Wenngleich es töricht wäre zu behaupten, ich hätte sie vollständig erfasst, habe ich einen Einblick in die Theorie erhalten, welcher in dieser Tiefe ohne die vorliegende Arbeit im Zuge meines Lehramtsstudiums nicht möglich gewesen wäre. Tief beeindruckt möchte ich daher den Leser[1] motivieren, die Reise durch die ART anzutreten – es lohnt sich.

Wie Einstein bereits im einleitenden Zitat bescheiden deutlich macht, waren die Arbeiten einer Reihe anderer Physiker und Mathematiker für die Formulierung seiner Theorie notwendig. So wird etwa der durch seine überragenden wissenschaftlichen Leistungen bekannte Mathematiker Carl Friedrich Gauß erwähnt, der ca. 100 Jahre vor Einstein lebte und wirkte. Auch der Mathematiker Bernhard Riemann gilt

[1] In dieser Arbeit wird aus Gründen der besseren Lesbarkeit das generische Maskulinum verwendet. Die gewählte männliche Form bezieht sich immer zugleich auf weibliche und anderweitige Geschlechteridentitäten.

Zitat von Albert Einstein aus dem Jahr 1915. Siehe [Ein15b, S. 779].

L. Scharfe, *Geometrie der Allgemeinen Relativitätstheorie*, BestMasters,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40361-4_1

bis heute als einer der bedeutendsten Mathematiker und legte mit seinem Habilitationsvortrag *„Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“* in Göttingen den Grundstein für die nach ihm benannte Riemann'sche Geometrie. Diese wurde später von Mathematikern wie Christoffel, Ricci und Levi-Civita weiter ausgebaut und stellt heute ein Teilgebiet der Differentialgeometrie dar. Während Gauß unter anderem durch seine Beiträge zur Geometrie von Flächen bekannt wurde, verallgemeinerte Riemann die Theorie auf n-dimensionale mathematische Objekte.

Wir sehen, dass der Entwicklung der ART einiges an mathematischer Erkenntnis vorausgehen musste. Einstein schreibt dazu selbst, dass die nötigen mathematischen Hilfsmittel zur Formulierung der ART fertig bereit lagen.[2] Neben seinen genialen physikalischen Ideen war es zudem sein Verdienst, die mathematischen Forschungen für seine Theorie nutzbar zu machen. Wir wollen in dieser Arbeit gewissermaßen ähnlich vorgehen und die mathematischen Inhalte der Riemann'schen Geometrie an ausgewählten Stellen umfangreicher studieren, als es in herkömmlichen Werken zur ART meist der Fall ist.[3] Dabei werden wir immer wieder feststellen können – vielleicht in etwa so wie Einstein – wie sich die physikalischen Ideen der ART in der Sprache der Differentialgeometrie wiederfinden. Das Ziel dieser Arbeit ist es, eine Brücke zu bauen zwischen den physikalischen und mathematischen Inhalten und Darstellungen, die in der Relativitätstheorie verwendet und relevant werden. Hierbei werden vor allem auch Unterschiede zwischen einer mathematischen und einer physikalischen Herangehensweise deutlich. Während beispielsweise in der Physik vorzugsweise in Koordinaten gearbeitet wird, bemüht sich die Differentialgeometrie um eine koordinatenunabhängige Sprache. Die Arbeit ist daher an Lehramtsstudierende sowie an Mathematik- und Physikstudierende gerichtet, die an einer kompakten Darstellung der sowohl physikalischen als auch mathematischen Inhalte der Relativitätstheorie interessiert sind. Es wurde darauf geachtet, möglichst wenige Grundkenntnisse vorauszusetzen. Es stellt sich schließlich die Frage, weshalb ein Studium der mathematischen Inhalte sinnvoll ist, wenn viele Standardwerke der ART auf diese Darstellung verzichten. Einige Werke argumentieren sogar weitestgehend phänomenologisch.[4] Angelehnt an Straumann [Str88, S. 1] führe ich daher die folgenden Vorteile auf, die sich aus der Beschäftigung mit der modernen differentialgeometrischen Sprache ergeben:

[2] Siehe [Ein16a, S. 769].

[3] Zu nennen sind hier z. B. die Werke von Fließbach [Fli16], Rebhan [Reb12] oder Meinel [Mei19], die auf eine ausführlichere Darstellung der Riemann'schen Geometrie verzichten.

[4] Siehe z. B. [Son18].

1. Es wird möglich, die mathematische Literatur zu lesen und eventuell für physikalische Fragestellungen nutzbar zu machen.
2. Die grundlegenden Begriffe wie differenzierbare Mannigfaltigkeit, Tensorfelder, linearer Zusammenhang, etc. erhalten eine klare (intrinsische) Formulierung. Außerdem spielen sie auch in anderen Gebieten der Physik und Mathematik eine wichtige Rolle. Die Inhalte sind damit transferfähig.
3. Physikalische Aussagen und Begriffsbildungen werden nicht durch Abhängigkeiten der Koordinatenwahl verdunkelt. Zugleich wird die Rolle der Koordinaten bei physikalischen Anwendungen geklärt.
4. Auch für praktische Rechnungen ist die koordinatenunabhängige Sprache ein sehr kräftiges Hilfsmittel, welches oft schneller zum Ziel führt als herkömmliche Methoden.

Aus diesen Gründen erscheint die Behandlung der mathematischen Inhalte gerechtfertigt. Es ist an dieser Stelle jedoch anzumerken, dass auf die Behandlung des äußeren Kalküls der Differentialformen verzichtet wurde, da dieser den Rahmen der Arbeit sprengen würde.[5]

Wir beginnen diese Arbeit mit der Wiederholung der wesentlichen Aspekte aus der klassischen Mechanik. Auch wenn diese als bekannt vorausgesetzt werden dürften, werden wir im ersten Kapitel insbesondere die *Newton'sche Gravitationstheorie* kurz zusammenfassen. Wir ebnen damit den Weg zur *Speziellen Relativitätstheorie* (SRT) und werden sehen, welche physikalischen Erkenntnisse zu ebendieser geführt haben. Bereits in der SRT werden Tensoren eine wichtige Rolle spielen. Aus den oben genannten Gründen und um der Vielfältigkeit des Tensorbegriffs gerecht zu werden, wollen wir diesen in einen mathematischen Rahmen einordnen. An einigen Stellen im zweiten Kapitel wird sich daher die Darstellung der Inhalte von herkömmlichen Werken zur Relativitätstheorie unterscheiden. Abgeschlossen wird dieses Kapitel mit einer knappen Zusammenstellung der physikalischen Konsequenzen, die sich direkt aus der SRT ergeben. Im dritten Kapitel werden wir die Grundideen Einsteins formulieren, die ihn zu der Verallgemeinerung seiner SRT geführt haben. Hier sollte auch deutlich werden, weshalb der Krümmungsbegriff eine zentrale Rolle spielt. In den darauf folgenden beiden Kapiteln werden wir Inhalte der Differentialgeometrie behandeln und dabei stets die Ideen Einsteins im Hinterkopf behalten. An geeigneten Stellen werden wir auf diese zurückgreifen und sie mathematisch präzise formulieren. Die abstrakten Begriffe der n-dimensionalen *differenzierbaren Mannigfaltigkeiten* und des *Tangentialraums* sind für den Leser

[5] Für praktische Rechnungen erweist sich das Kalkül als durchaus nützlich. In unserem Fall genügen allerdings die herkömmlichen Methoden.

möglicherweise zunächst schwer zu erfassen, da sie ohne einen umgebenden Raum definiert werden. Wir werden uns die Inhalte daher immer wieder an anschaulichen Beispielen klar machen, die im bekannten $\mathbb{R}^3$ eingebettet sind. Um mathematische Objekte wie Vektoren und Tensoren auf Mannigfaltigkeiten differenzieren zu können, führen wir den *linearen Zusammenhang* ein. Dieser wird uns die *kovariante Ableitung* liefern, welche die herkömmlichen partiellen Ableitungen und allgemeinen Richtungsableitungen ersetzen wird. Wir kommen schließlich auf *Geodäten* zu sprechen, die eine besondere Klasse von Kurven darstellen und auch in der ART von großer Bedeutung sind. Mit dem *Riemann'schen Krümmungstensor* werden wir den Ausflug in die Differentialgeometrie abschließen. Ausgerüstet mit einem fundierten Wissen über diese mathematischen Inhalte wird es uns im siebten Kapitel möglich sein, ein relativistisches Gravitationsgesetz zu formulieren. Hierfür diskutieren wir zunächst den *Energie-Impuls-Tensor*, sodass wir im Anschluss mit der Aufstellung der *Einstein'schen Feldgleichungen* zu einem Höhepunkt dieser Arbeit gelangen. Die gefundenen Feldgleichungen werden wir für eine kugelsymmetrische, statische Masseverteilung lösen. Das führt uns zu der *Schwarzschild-Metrik*, welche wir für unser Sonnensystem diskutieren werden. In diesem Zuge werden wir die historisch sehr bedeutsamen Effekte der *Rotverschiebung, Periheldrehung und Lichtablenkung* behandeln. Diese führten noch zu Einsteins Lebzeiten zu einer eindrucksvollen Bestätigung seiner Theorie.

Es verbleibt noch zu erwähnen, dass für die Aufarbeitung der physikalischen Inhalte im Wesentlichen die Werke von Ryder [Ryd09], Rebhan [Reb12], Schröder [Sch02], Fließbach [Fli16] und Carroll [Car14] verwendet wurden. Des Weiteren sind die Lehrbücher von Weinberg [Wei72] und Misner et al. [Mis08] zu nennen. Die differentialgeometrischen Inhalte sind hauptsächlich mithilfe der Arbeiten von Kühnel [Küh12], Lee [Lee97], Oloff [Olo18], Straumann [Str88], Fischer/Kaul [Fis17] und Nakahara [Nak15] aufgearbeitet worden. In diesem Zusammenhang sind auch die Werke von O'Neill [ONe10] und Newman [New19] anzugeben, welche die mathematischen Inhalte zur pseudo-Riemann'schen Geometrie umfassend darstellen.

Wichtige Formeln und Sätze werden durch einen grauen Kasten hervorgehoben.

2 Der Weg zur Relativitätstheorie

Isaac Newton stellte im Jahr 1687 in seinem Lehrbuch „*Philosophiae naturalis principia mathematica*" die erste vereinheitlichende Theorie zur Gravitation vor. Im Rahmen der von ihm begründeten klassischen Mechanik kombinierte er die Forschungsarbeiten Galileis zu den Fallgesetzen auf der Erde mit den Kepler-Gesetzen der Planetenbewegung zu einem umfassenden Gravitationsgesetz. Newtons Theorie stellte damit einen Meilenstein zur Vereinheitlichung der Physik dar und es sollte über 200 Jahre dauern, bis Albert Einstein mit der ART den nächsten Durchbruch zu einer umfassenden relativistischen Gravitationstheorie erzielte. Da Newtons Gravitationstheorie die Grundlage weiterer Überlegungen war, die Einstein Anfang des 20. Jahrhunderts anstellte, wollen wir in diesem Kapitel einige zentrale Erkenntnisse Newtons zusammenfassen. Dabei leiten wir die Feldgleichung für das Gravitationspotential aus Newtons Gravitationsgesetz her und diskutieren anschließend den Begriff des Inertialsystems. Die Galilei-Transformation, die mathematisch zwischen zwei Inertialsystemen vermittelt, bildet den Abschluss dieses Kapitels. Die Darstellung der Inhalte orientiert sich an [Fli16], [Ryd09] und [Sch07].

2.1 Newtons Gravitationstheorie

Die Beschreibung der Bewegung eines Körpers erfolgt stets relativ zu dem Standpunkt eines Beobachters, wodurch ein *Bezugssystem* (BS) ausgezeichnet wird. Um die Bewegung zu quantifizieren, werden in einem Bezugssystem Koordinaten eingeführt.

L. Scharfe, *Geometrie der Allgemeinen Relativitätstheorie*, BestMasters,
https://doi.org/10.1007/978-3-658-40361-4_2

Die klassische Bahnkurve eines Massenpunkts m zur Zeit t lässt sich damit durch den Ortsvektor $\boldsymbol{r}(t) = (x^i(t)) = \left(x^1(t), x^2(t), x^3(t)\right)$ mit den zeitabhängigen Koordinaten $x^i(t)$ im bekannten Euklidischen Raum beschreiben.

Das zweite Newton'sche Axiom liefert eine Bewegungsgleichung für die Masse m, wenn sie sich unter dem Einfluss einer Kraft $\boldsymbol{F}$ befindet:

$$\boldsymbol{F} = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}. \tag{2.1}$$

Mit dem *Superpositionsprinzip*[1] erhalten wir damit für die Bewegung von N Massenpunkten, die sich aufgrund der Gravitation gegenseitig anziehen, das bekannte *Newton'sche Gravitationsgesetz*[2]

$$m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = -G\sum_{j=1,\, j\neq i}^{N}\frac{m_i\, m_j\left(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\right)}{|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|^3}. \tag{2.2}$$

Hier ist G die Gravitationskonstante, deren Wert experimentell zu

$$G = (6.67430 \pm 0.00015)\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2} \tag{2.3}$$

bestimmt ist.[3]

Das Gravitationsfeld ist bekanntlich ein *konservatives Kraftfeld*, wodurch sich das *skalare Gravitationspotential* $\Phi(\boldsymbol{r})$ einführen lässt.[4] Wir werden im Folgenden sehen, dass durch eine Umschreibung des Gravitationsgesetzes eine Feldgleichung resultiert, die mathematisch die gleiche Form wie die Poisson-Gleichung der Elektrostatik annimmt.

---

[1] Nach dem Superpositionsprinzip addieren sich unterschiedliche Einzelkräfte $\boldsymbol{F}_i$, die auf einen Körper wirken, zu einer Gesamtkraft $\boldsymbol{F} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i$.

[2] An dieser Stelle setzen wir die Gleichheit von träger Masse (links in Gl. (2.2)) und schwerer Masse (rechts in Gl. (2.2)) bereits voraus.

[3] Der Wert wurde den *2018 CODATA recommended values* entnommen. Siehe [1].

[4] Das Gravitationspotential ist unabhängig von der Probemasse eine Körpers, der sich im Gravitationsfeld befindet. Multipliziert man $\Phi(\boldsymbol{r})$ mit der Masse m eines Probekörpers, erhält man dessen potentielle Energie.

Das skalare Gravitationspotential ist gegeben durch

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = -G \sum_{j=1}^{N} \frac{m_j}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j|}. \tag{2.4}$$

Indem wir über die einzelnen infinitesimalen Massenbeiträge $dm = \rho(\boldsymbol{r}')d^3r'$ mit der Massendichte $\rho(\boldsymbol{r}')$ summieren, lässt sich vom diskreten in den kontinuierlichen Fall übergehen und wir erhalten

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = -G \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}'\right)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, d^3r'. \tag{2.5}$$

Ausgehend von Gl. (2.2) ergibt sich mit Gl. (2.5) für den Massenpunkt $m_i = m$ und den zugehörigen Ortsvektor $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_i(t)$ die *Bewegungsgleichung im Gravitationsfeld*

$$m \frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -m\, \nabla\Phi(\boldsymbol{r}). \tag{2.6}$$

Durch Anwendung des Laplace-Operators auf das skalare Gravitationspotential in Gl. (2.5) ergibt sich eine lineare partielle Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
\Delta\Phi(\boldsymbol{r}) &= \Delta\left(-G \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}'\right)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, d^3r'\right) \\
&= -G \int \rho\left(\boldsymbol{r}'\right)\, \Delta \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}\, d^3r' \\
&\overset{(2.8)}{=} -G \int \rho\left(\boldsymbol{r}'\right)\, \left(-4\pi\, \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\right)\, d^3r' \\
&= 4\pi\, G\, \rho(\boldsymbol{r}).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Dabei haben wir im dritten Schritt den folgenden Zusammenhang benutzt[5]:

[5] Hierbei bezeichnet δ die Delta-Distribution, welche die Eigenschaft $\int f(\boldsymbol{r}')\, \delta(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r})\, d^3r' = f(\boldsymbol{r})$ für eine beliebig oft stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ erfüllt.