Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

RESEARCH

Stefan-Harald Kaufmann

Schülervorstellungen zu Geradengleichungen in der vektoriellen Analytischen Geometrie

MOREMEDIA

Springer Spektrum

Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Gilbert Greefrath, Münster, Deutschland

Stanislaw Schukajlow, Münster, Deutschland

Hans-Stefan Siller, Würzburg, Deutschland

In der Reihe werden theoretische und empirische Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik – von der vorschulischen Bildung bis zur Hochschule – publiziert. Dabei kann eine Vernetzung innerhalb der Mathematikdidaktik sowie mit den Bezugsdisziplinen einschließlich der Bildungsforschung durch eine integrative Forschungsmethodik zum Ausdruck gebracht werden. Die Reihe leistet so einen Beitrag zur theoretischen, strukturellen und empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik im Zusammenhang mit der Qualifizierung von wissenschaftlichem Nachwuchs.

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/15969

Stefan-Harald Kaufmann

Schülervorstellungen zu Geradengleichungen in der vektoriellen Analytischen Geometrie

Springer Spektrum

Stefan-Harald Kaufmann
Köln, Deutschland

Dissertation Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Fachbereich Mathematik und Informatik, 2020
Erstgutachter: Prof. Dr. Gilbert Greefrath
Zweitgutachter: Prof. Dr. Martin Stein
Tag der Disputation: 04.02.2020

ISSN 2523-8604 ISSN 2523-8612 (electronic)
Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-32277-9 ISBN 978-3-658-32278-6 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-32278-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Marija Kojic
Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

In seiner Dissertation geht Stefan Kaufmann der Frage nach, welche Vorstellungen Schülerinnen und Schüler mit einer Geradengleichung in Vektorform verbinden. Dazu werden 22 Schülerinnen und Schüler interviewt und dieses Material wird kategorienentwickelnd ausgewertet.

Stefan Kaufmann motiviert sein Forschungsprojekt ausgehend von den Bildungsstandards. Er geht auch auf historische Aspekte ein. In diesem Kontext werden Alternativen zur formal-axiomatischen Linearen Algebra aufgezeigt. Gegenwärtige Forschungsergebnisse zu dieser Thematik sind nur wenige vorhanden. In jedem Fall ist zu bemerken, dass die Forschungslage zur linearen Algebra bezogen auf Studien im deutschsprachigen Raum gut erfasst wurde. Ein wichtiger Teil der Arbeit widmet sich den Schülervorstellungen. Dazu wird zunächst ein Überblick zum Vorstellungsbegriff in Psychologie und Fachdidaktik gegeben. Anschließend werden Forschungsergebnisse zum Aufbau von Vorstellungen vorgestellt. Schließlich wird das in der Arbeit verwendete Konzept der Schülervorstellung in Bezug auf das bekannte Grundvorstellungskonzept erläutert.

Im zweiten Teil werden die für die Arbeit zentralen Vorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen in den Blick genommen. Hier werden die Untersuchungsgegenstände dazu sehr gründlich stoffdidaktisch untersucht. Anschließend werden die Begriffe Variable, Vektor, Gerade und Vektorgleichung entsprechend genau betrachtet. Hier werden auch interessante Beispiele für Vektorräume und Vorstellungen zu Vektoren angeführt.

Anschließend wird die qualitative Erhebung von Schülervorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen beschrieben. Dazu werden die Zielsetzung und das methodische Vorgehen vorgestellt. Die Zielsetzung ist sinnvoll und trifft eine Lücke in der didaktischen Forschung. Die Schritte der qualitativen Inhaltsanalyse werden einschließlich der Typenbildung als Analyse- und Auswertungsverfahren beschrieben. Die Kategorien werden entsprechend der Grounded Theory offen entwickelt. Das Interviewdesign ist sehr sinnvoll gewählt. Es wird als Einstieg eine Sachaufgabe gewählt, die verschiedene Lösungsansätze zulässt. Außerdem wird ein Interviewleitfaden entwickelt, der sinnvoll an die Aufgabenbearbeitung anschließt und interessante Einsichten zu Geradengleichungen erheben kann.

Die Ergebnisse der strukturierenden qualitativen Inhaltsanalyse werden ausführlich beschrieben. Es werden erste Fallzusammenfassungen gegeben, die einen Überblick über die Informationen ermöglichen. Es folgen erste Beobachtungen und schließlich die gewählten thematischen Hauptkategorien. Schließlich werden alle Textstellen zusammengestellt, die mit der gleichen Hauptkategorie kategorisiert wurden.

Sehr interessant ist der Abschnitt, in dem die Subkategorien induktiv bestimmt werden. Dazu wurde das gesamte Textmaterial aus einer der Hauptkategorien durchgearbeitet. Schließlich wurden aus den einzelnen Codes im Laufe des Analyseprozesses zu jeder Hauptkategorie Subkategorien gebildet. Der entsprechende Kategorienleitfaden wird dargestellt und jede Kategorie wird nicht nur inhaltlich beschrieben, sondern auch mit einem Beispiel illustriert. Dies ist ein sehr wesentliches Ergebnis der Arbeit.

In der Ergebnisanalyse werden Beobachtungen zu den Hauptkategorien dargestellt und anschließend werden Zusammenhänge der Subkategorien in einer Hauptkategorie untersucht. Hier werden interessante Zusammenhänge herausgearbeitet und auch visualisiert. Die Ergebnisse der typenbildenden qualitativen Inhaltsanalyse werden sehr gut dargestellt. Interessant ist in jedem Fall die Beschreibung der Typologie sowie repräsentative Einzelfallinterpretation. Es werden 6 zentrale Typen identifiziert, die als zentrale Ergebnisse angesehen werden können. Sehr genau werden auch repräsentative Einzelfälle zu den gefundenen Typen interpretiert.

Schließlich erfolgen ein Rückblick und die Reflexion der Ergebnisse. Die Arbeit schließt mit interessanten Perspektiven für die mathematikdidaktische Forschung. Insgesamt trifft die Arbeit eine Lücke in der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Forschung.

Gilbert Greefrath

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Teil I

Einleitung

1 Motivation und Einordnung des Forschungsprojektes

1.1 Forschungsvorhaben

Die Kultusministerkonferenz (kurz: KMK) formulierte in ihrem Beschluss vom 18.10.2012 Bildungsstandards im Fach Mathematik für die allgemeine Hochschulreife. Dem Mathematikunterricht wird dort ein Allgemeinbildungsauftrag sowie eine Anwendungsorientierung zugeschrieben, um Mathematik „in ihrer Reichhaltigkeit als kulturelles und gesellschaftliches Phänomen erfahren" (KMK 2012, S. 11) zu können. Diese Zielsetzung ist laut KMK durch die drei von Heinrich Winter formulierten Grunderfahrungen gekennzeichnet und müssen jeder Schülerin und jedem Schüler vermittelt werden (KMK 2012, S. 11).

- Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt aus Natur, Gesellschaft, Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen,
- Mathematik als geistige Schöpfung und auch deduktiv geordnete Welt eigener Art,
- Mathematik als Mittel zum Erwerb von auch über die Mathematik hinausgehenden, insbesondere heuristischen Fähigkeiten (Winter 1995, S. 37).

Ein Lernender kann im Idealfall alle in den Bildungsstandards beschriebenen mathematischen Kompetenzen erwerben, wenn durch den Mathematikunterricht alle drei Grunderfahrungen angesprochen werden. Es ist laut KMK (2012, S. 11–12) vorgesehen, dass diese Kompetenzen bei Thematisierung der fünf festgeschriebenen Leitideen ‚Algorithmus und Zahl', ‚Messen', ‚Raum und Form', ‚Funktionaler Zusammenhang' sowie ‚Daten und Zufall' jeweils angesprochen und trainiert werden.

S.-H. Kaufmann, *Schülervorstellungen zu Geradengleichungen in der vektoriellen Analytischen Geometrie*, Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik, https://doi.org/10.1007/978-3-658-32278-6_1

Die vektorielle Analytische Geometrie (kurz: Analytische Geometrie oder Vektorgeometrie[1]) ist neben Analysis und Stochastik ein mathematisches Sachgebiet der Sekundarstufe II, welches den Leitideen ‚Messen' sowie ‚Raum und Form' zugeordnet wird. Im Kern ist ein Großteil dieses Gebiets in der gymnasialen Oberstufe inhaltlich „auf die Weiterentwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens aus der Sekundarstufe I [aus]gerichtet" (KMK 2012, S. 19). Darunter versteht man in den Bildungsstandards unter anderem die Anwendung von Vektoren bei der analytischen Beschreibung von Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum sowie die Arbeit mit geradlinig bzw. ebenflächig geometrischen Objekten, die durch Vektoren beschrieben werden können. Das heißt, dass Vektoren als neuer Begriff bzw. neues Werkzeug eingeführt werden, um einerseits bekannte Objekte wie Geraden und andererseits neue Objekte wie Ebenen dreidimensional beschreiben und untersuchen zu können (KMK 2012, S. 19).

Den Begriff ‚Gerade' haben die Lernenden bereits in der Sekundarstufe I im Rahmen des Geometrieunterrichts und bei der Thematisierung von linearen Funktionen auf verschiedene Arten kennengelernt, so dass sie bereits Vorstellungen zu diesem Begriff und zu möglichen Referenzobjekten aufgebaut haben. Die vektorielle Behandlung von Geraden kann daher in der Tat als eine Vertiefung bisheriger Kenntnisse angesehen werden. Diese besteht beispielsweise in der Beschreibung von Geraden mit Hilfe von Vektoren oder in einer Betrachtung von Geraden im dreidimensionalen Raum. Spricht man in der Sekundarstufe II von einer Vertiefung von Geraden, so bedeutet das konsequenterweise auch eine Vertiefung der Vorstellungen, die man mit Geraden verbinden kann, wenn diese mit Vektoren beschrieben werden. Von diesem Standpunkt aus betrachtet stellt sich die Frage, welche Vorstellungen Schülerinnen und Schüler zu vektoriellen Geradenbeschreibungen entwickeln.

Diese Frage ist die Leitfrage der vorliegenden Untersuchung. Deren Beantwortung ist eng verknüpft mit den folgenden Überlegungen:

- Inwieweit unterstützen Vektoren als ein ‚Beschreibungswerkzeug' Schülerinnen und Schüler dabei, ihre Vorstellungen zu Geraden zu erweitern bzw. weiterzuentwickeln?
- Die Sekundarstufe II hat sowohl einen Allgemeinbildungsauftrag als auch den Auftrag, die Studierfähigkeit zu fördern. Daher stellt sich die Frage, inwieweit

[1] Im Rahmen dieser Arbeit wird die Analytische Geometrie stets als ein Teilgebiet der Geometrie aufgefasst, in dem geometrische Probleme mit Hilfsmitteln der Linearen Algebra gelöst werden. Damit sind in erster Linie Vektoren und die Vektorkalküle gemeint. Um die Darstellung möglichst einfach halten zu können, wird daher nicht zwischen vektorieller Analytischer Geometrie und Koordinatengeometrie ohne vektorielle Hilfsmittel unterschieden.

die von Schülerinnen und Schülern entwickelten Vorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen als adäquat angesehen werden können?

- Zu den einzelnen Elementen, aus denen sich eine Vektorgleichung zur Beschreibung einer Geraden zusammensetzt, können Schülerinnen und Schüler Vorstellungen entwickeln. Inwieweit können diese einzelnen Vorstellungen zu einem sinnstiftenden Konzept miteinander verbunden werden?

Im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wurden Schülerinterviews geführt, die im Hinblick auf die Leitfrage qualitativ analysiert und ausgewertet werden. Die Auswertungsergebnisse stellen eine Rekonstruktion von Schülervorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen dar.

Die didaktische Diskussion zur Analytischen Geometrie weist in ihrer Entwicklung sehr facettenreiche Ergebnisse auf. Der Forschungsstand mit den relevanten Ergebnissen für den theoretischen Rahmen der Untersuchung wird im folgenden Abschnitt 1.2 kurz skizziert, um die Studie und deren Ergebnisse in den derzeitigen Forschungsstand einzuordnen. Im darauf folgenden Abschnitt 1.3 erfolgt eine kurze Beschreibung zum Aufbau dieser Untersuchung.

1.2 Forschungsstand

1.2.1 Die Aufnahme der Vektorrechnung in die deutschlandweiten Schulcurricula

Die Vektorrechnung ist, verglichen mit Arithmetik, Algebra oder Geometrie, eine Teildisziplin, die gegen Ende des 19. Jahrhunderts entwickelt wurde und dementsprechend noch nicht alt ist. Eine wichtige Erkenntnis besteht darin, dass der Vektorraumbegriff als Strukturierungsbegriff in vielen mathematischen Teilgebieten wiedererkennbar ist. Das bedeutet unter anderem, dass man Problemstellungen aus anderen mathematischen Teilgebieten mit Hilfe von Vektoren beschreiben und untersuchen kann. Diese Erkenntnis hat dazu beigetragen, die Vektorrechnung seit 1950 aus stoffdidaktischer Perspektive intensiv zu diskutieren. Die Arbeiten von Hofmann (1949), Athen u. Stender (1950) sowie Degosang (1951) stellen Beispiele für die fast 20 Jahre dauernde intensive Diskussion zur verbindlichen Aufnahme der Vektorrechnung in die curricularen Vorgaben der Bundesländer dar.

Die in den 1950er Jahren einsetzende stoffdidaktische Diskussion verfolgte primär das Ziel, die Vektorrechnung als ein zentrales Teilgebiet in den Mathematikunterricht aufzunehmen. Dementsprechend besteht das Hauptanliegen vieler veröffentlichten Beiträge darin, die Vorteile der Vektorrechnung für den Mathematikunterricht darzulegen. Einige häufig wiederholte Argumente sind:

- Die Vektorrechnung ermöglicht einfachere Darstellungen, Bearbeitungen sowie Beweise elementargeometrischer Sachverhalte, „weil sie den schwierigen Schritt vom anschaulichen zum abstrakten Denken […] leichter macht“ (Athen u. Stender 1950, S. 278). Darunter versteht man beispielsweise, dass sich ein geometrischer Sachverhalt durch Vektoren beschreiben und folglich leicht in eine Vektorgleichung übertragen lässt. Anschließend kann das Problem oder der Beweis auf algebraischer Ebene häufig leichter nachvollzogen bzw. gelöst werden (Hofmann 1949; Draaf 1959).
- Die Behandlung geometrischer Sachverhalte mit Vektoren bedeutet auch tiefergehende Behandlung der räumlichen Geometrie, da „die Überlegenheit des Vektorbegriffs erst vom Dreidimensionalen an voll zur Geltung kommt“ (Tiedemann 1952, S. 232). Das kann darauf zurückgeführt werden, dass sich Objekte im dreidimensionalen Raum, beispielsweise Geraden, mit Vektoren einfacher beschreiben lassen als ohne Vektoren.
- Der Vektorbegriff als Strukturierungsbegriff ist „imstande, eine Fusion der Teilgebiete der Mathematik herbeizuführen“ (Athen u. Stender 1950, S. 278). Die Vektorrechnung soll „nicht als isoliertes neues Gebiet in den Schulstoff eindringen, sondern den Unterricht als tragendes Prinzip durchziehen“ (Athen 1955, S. 9). Daraus resultiert letztlich das Ziel „den gesamten normalen Unterricht von der Unterstufe an mit den Vektormethoden zu durchdringen“ (Baur 1955, S. 70). Dementsprechend existieren Veröffentlichungen, die eine vektorielle Behandlung mathematischer Teilgebiete in der Sekundarstufe I diskutieren. Dort wird der Mehrwert der Vektormethode unter anderem in der Vereinfachung von Rechnungen und Beweisen gesehen. Olsson (1960) und Hürten (1963) liefern Beispiele für eine vektorielle Behandlung der Geometrie. Draaf (1959) ist ein Beispiel für eine vektorielle Behandlung der Arithmetik.
- Das vektorielle Denken als eine Art ‚methodisches Strukturierungswerkzeug‘ für alle mathematischen Teildisziplinen sollte die Rolle als eine Art ‚Pendant‘ zum propagierten funktionalen Denken einnehmen (Athen 1955, S. 8). In einer solchen tragenden Rolle sah man die Möglichkeit, den Lückenschluss zwischen Schule und Hochschule besser vollziehen zu können, da „die Schule […] für die Verwendung des Vektorbegriffs […] [die] Vorarbeit leisten“ (Pickert 1954, S. 241) kann (Degosang 1951, S. 152).

Im Erlass der Kultusministerkonferenz vom 3.10.1968 wird eine „flächendeckende Einführung der so genannten ‚Neuen Mathematik‘“ (Hamann 2011, S. 347) gefordert. Bei der ‚Neuen Mathematik' handelte es sich um eine Reform zur Revision des Curriculums. Im Zuge dieser Reform wurden „herkömmliche, ‚traditionelle' Stoffe durch ‚neue', ‚moderne', aus Sicht der [mathematischen] Forschung aktuellere Inhalte ergänzt […], mit dem vorrangigen Ziel, die Kluft zwischen Schule und Hochschule und damit die Studienabbrecherquote zu verringern" (Hamann 2011, S. 347). Für den Mathematikunterricht bedeutete das eine Orientierung an algebraischen Strukturen in fast allen Jahrgangsstufen. Im Zuge dieser Orientierung wird die Analytische Geometrie durch eine formal-axiomatische Lineare Algebra abgelöst (Wittmann 2003b, S. 56).

1.2.2 Alternativen zur formal-axiomatischen Linearen Algebra

Die formal-axiomatische Lineare Algebra findet innerhalb kürzester Zeit viele Kritiker. Als Beispiele seien hier die Positionen von Freudenthal (1973, S. 375–379) und Tietze (1979, S. 139–140) angeführt. Ein zentraler Kritikpunkt stellt der deduktive Charakter dar, den der Geometrieunterricht erhält, so dass die Erschließung des Raumes, was laut Freudenthal Stufe null des Unterrichts markieren sollte, zu einer nebenrangigen Sache wird.

Die stoffdidaktische Diskussion zur Analytischen Geometrie ist daher ab Ende der 1970er bzw. ab Anfang der 1980er Jahre von Alternativentwürfen zur formal-axiomatischen Linearen Algebra geprägt. Eine diskutierte Alternative stellen Bürger u. a. (1980) vor. Diese besteht in einer Einführung von Vektoren als arithmetische n-Tupel, die Bezüge zu zahlreichen außermathematischen Anwendungen wie beispielsweise die Wirtschaftswissenschaften ermöglichen. Beispiele dazu erläutern Lehmann (1975) und Laugwitz (1977). Bei diesem Ansatz stehen Vektoren als allgemeine arithmetische Größen im Vordergrund, mit denen man konkret rechnen kann. Eine geometrische Interpretation erfolgt erst in einem späteren Schritt.

Eine andere Alternative stellt eine Neukonzeption der vektoriellen Analytischen Geometrie dar. Diese legt den Schwerpunkt auf eine rechnerische Beschreibung und Untersuchung des Anschauungsraumes, indem bekannte geometrische Erscheinungen algebraisch beschrieben werden. Der Ansatz kann als Komplettierung der Geometrie aus der Sekundarstufe I betrachtet werden, da die Vorstellungen zum Anschauungsraum und Objekten des Anschauungsraumes vertieft werden können. Vertreter einer solchen Alternative war beispielsweise Profke (1978). Schmidt (1993) konstatiert in seiner Analyse zur curricularen Entwicklung der Sekundarstufe II, dass diese Alternative für Grundkurscurricula eine häufig gewählte Alternative zur formal-axiomatischen Linearen Algebra darstellt.

1.2.3 Gegenwärtige Forschungsergebnisse

Die Ergebnisse der ‚Trends in International Mathematics and Science Study' (TIMSS) bescheinigen am Ende der 1990er Jahre den deutschen Oberstufenschülern im internationalen Vergleich Stärken „eher bei der Lösung von Aufgaben, die Routineprozeduren der Oberstufenmathematik oder reines Begriffswissen repräsentieren" (Baumert u. a. 1999, S. 104). Die darauf folgende Diskussion in der didaktischen Forschung thematisiert unter anderem den Bildungsauftrag der gymnasialen Oberstufe. Die bis dato weit verbreitete Auffassung, der Oberstufenunterricht habe in erster Linie die Aufgabe, ein anschließendes Hochschulstudium vorzubereiten, wurde umformuliert, so dass der Bildungsauftrag darin besteht, „vertiefte Allgemeinbildung, Wissenschaftspropädeutik und Studierfähigkeit" (Borneleit u. a. 2001, S. 76) miteinander zu verbinden.

In Anlehung an die von Winter (1995) formulierten Grunderfahrungen (vgl. S. 8) betonen die Experten, dass man zwischen Mathematik als fertiges Produkt und Mathematik als Prozess unterscheiden müsse. Dementsprechend kritisieren die Experten, dass „Empirische Untersuchungen, die den alltäglichen Mathematikunterricht und seine Ergebnisse in der ganzen Breite an der Integration der drei Grunderfahrungen […] messen und beurteilen" (Borneleit u. a. 2001, S. 78) bis zu diesem Zeitpunkt nicht vorliegen.

Die Vorschläge von Borneleit u. a. (2001) werden in der didaktischen Forschungsdiskussion zur Analytischen Geometrie auf unterschiedliche Weise aufgegriffen. Ein Beispiel stellt die anwendungsorientierte Analytische Geometrie dar. Dort werden in Anlehnung an die anwendungsorientierte Lineare Algebra geometrische Kontexte mit realen Sachverhalten verbunden. Darin kann eine stärkere Einbeziehung der ersten von Winter formulierten Grunderfahrung (vgl. S. 8) gesehen werden. Entsprechend werden in der didaktischen Diskussion Beiträge veröffentlicht, die Vorschläge für eine anwendungsorientierte Analytische Geometrie präsentieren. Beispiele dafür stellen Maaß (2000), Diemer u. Hillmann (2005), Schmidt (2009) und Foerster u. a. (2000) vor. Darüber hinaus weisen zahlreiche Abiturprüfungsaufgaben zur Analytischen Geometrie Anwendungskontexte auf. Einige dieser Kontexte werden in der didaktischen Diskussion für die gewählte Modellierung kritisch betrachtet (Henn u. Filler 2015, S. 235–238).

1973 kritisierte Freudenthal die Inhalte der Analytischen Geometrie mit den Worten: „Die Geometrie, die mit linearer Algebra auf der Schule möglich ist, ist ein trübes Abwasser. Der Höhepunkt ist etwa, zu beweisen, dass zwei verschiedene Geraden einen oder keinen Schnittpunkt haben, und dass diese Zahlen für Kreise 0, 1, 2 sind" (Freudenthal 1973, S. 411). Der inhaltliche ‚Status Quo' hat sich mit Blick auf die curricularen Vorgaben im Kernlehrplan für die Sekundarstufe II in Nordrhein/Westfalen (Ministerium-NRW 2014) bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt nur wenig verändert. Freudenthals Kritik wird ebenfalls in der Expertise zum Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe aufgegriffen: „Auf eine isolierte Axiomatisierung des Vektorraums mit der Reduzierung auf lineare geometrische Gebilde sollte zugunsten einer an die Geometrie der Sekundarstufe I anknüpfenden inhaltlich orientierten analytischen Geometrie des uns umgebenden Raumes verzichtet werden. Auch hier sollte viel stärker die Vernetzung von Analysis und Analytischer Geometrie hervortreten, indem etwa Kurven und insbesondere die Kegelschnitte wieder zentrale Objekte des Mathematikunterrichts werden“ (Borneleit u. a. 2001, S. 82).

Im Rahmen der breit gefächerten Diskussion über Chancen und Grenzen des Computereinsatzes im Mathematikunterricht greifen mehrere Beiträge, die an Schupp (2000) angelehnte Empfehlung der Expertise auf. Diese Beiträge können grob in zwei Gruppen eingeteilt werden. Eine Gruppe beschreibt die grundsätzlichen Vorzüge einer 3D-Software zur Förderung des räumlichen Vorstellungsvermögens und zur Visualisierung räumlicher Darstellungen. Beispiele für diese Beitragsgruppe stellen Andraschko (2001) sowie Filler u. Wittmann (2004) dar. Die zweite Gruppe betont die Möglichkeit, sich durch den Computereinsatz von den ‚linearen Gebilden‘ zu lösen und Parametrisierungen von Kurven zu behandeln. Beispiele dazu sind bei Lehmann (2012) und Filler (2007) zu finden. Filler betont, dass die uns umgebende Welt voll von nichtlinearen Konstrukten ist, die mit Computersoftware in der Schule beschreibbar sind. Darüber hinaus hebt er die Notwendigkeit hervor, Parameterdarstellungen im Sinne des Spiralprinzips als Verallgemeinerung des Funktionsbegriffs zu betrachten, um inhaltlich spannende geometrische und dynamische Fragestellungen anzugehen (Henn u. Filler 2015, S. 158–160, 264–283).

Die Expertise von Borneleit u. a. (2001) weist darauf hin, dass Mathematik auch als einen Prozess verstehen werden muss. Für den Bereich Analytische Geometrie liegen bis 2003 nur wenige publizierte Studien vor, die den Lernprozess bzw. dessen Ergebnisse genauer untersuchen. Eine Studie führt Wittmann (2003b) zu individuellen Schülerkonzepten in der Analytischen Geometrie durch, deren Ergebnisse eingeschränkt auf Ebenengleichungen auch unter Wittmann (2003a) veröffentlich sind. Weitere Studien zu Vorstellungen zum Vektorbegriff und zu Gegenständen der Linearen Algebra legten Malle (2005) und Fischer (2005) vor.

Fischer (2005) analysiert in einer qualitativen Studie Interviews und Aufsätze von Studierenden zu Gegenständen der Linearen Algebra in der Hochschulmathematik. Ausgangspunkt des Forschungsprojekts ist die Frage, welche Vorstellungen Studierende zu einzelnen Begriffen der Linearen Algebra, wie beispielsweise ‚Vektorraum‘, besitzen und, ob sich bei den Vorstellungen der Studierenden gemeinsame ‚Baumerkmale' erkennen lassen. Im Rahmen der Ergebnisauswertung arbeitet Fischer unter anderem drei Vorstellungstypen zum Begriff ‚Vektorraum' heraus:

Elementtypvorstellung: „Ein Vektorraum ist eine Menge von Elementen, deren Wesensart bestimmte Beziehungen zur Folge hat, welche durch Eigenschaften von zwei Verknüpfungen zum Ausdruck gebracht werden."

Komponentenvorstellung: „Ein Vektorraum ist eine Menge von Elementen, die aus bestimmten Komponenten bestehen. Die Elemente werden komponentenweise addiert und mit Skalaren multipliziert."

Baukastenvorstellung: „Ein Vektorraum ist ein Gebilde, das nach einem Konstruktionsprinzip erstellt wird, in dem Konstruktionsprozesse nach bestimmten Regeln auf Bausteine angewendet werden. Die Vektoren sind die Objekte, die unter diesen Vorgaben konstruiert werden können." (Fischer 2005, S. 36)

Diese Forschungsergebnisse können ausgehend von den 2012 beschlossenen Bildungsstandards und den daraus resultieren Curricula relevanter für die Hochschuldidaktik als für die Schuldidaktik angesehen werden, da der Vektorraumbegriff als abstrakte Struktur in vielen Lehrplänen ein optionales Vertiefungsthema darstellt.

Fischer knüpft mit ihrem Forschungsprojekt an die Ergebnisse stoffdidaktischer und empirischer Untersuchungen von Dorier (2000) an. Dieser sich thematisch eher auf die Hochschuldidaktik konzentrierende Bereich zur Didaktik der Linearen Algbera wird gegenwärtig in mehreren Forschungsprojekten unterschiedlich vertieft. Als Beispiele seien hier die Projekte von Fleischmann u. Biehler (2017), Mai u. a. (2017), Motzer (2018) oder Scheibke (2018) genannt.

2005 veröffentlicht Malle mehrere Beobachtungen aus Interviewstudien zum Vektorbegriff. Diese Beobachtungen sind zusammengefasste Ergebnisse aus mehreren Diplomarbeiten der Universität Wien, die allesamt auf unterschiedliche Weise untersuchen, welche Vorstellungen ca. 700 Schülerinnen und Schüler im Alter von 15 Jahren[2] zu Vektoren entwickeln. Malle stellt fest, dass viele „Schülerinnen und Schüler […] Vektoren [gebrauchen] ohne zu verstehen, was sie tun" (Malle 2005, S. 18). Für die Defizite im Hinblick auf die Entwicklung angemessener Vorstellungen zu Vektoren führt Malle drei Kernbeobachtungen an:

[2] Malle weist darauf hin, dass in Österreich nach dem 2005 gültigen Lehrplänen Vektorrechnung und Analytische Geometrie von der Klasse 9 bis einschließlich Klasse 12 unterrichtet wird (Malle 2005, S. 16).

- Die Idee einer Pfeilklasse ist im Unterricht zwar behandelt worden, scheint für viele Lernende jedoch zu abstrakt zu sein, da sie Vektoren im praktischen Gebrauch lediglich als „Einzelpfeile" identifizieren.
- Vektoren werden von Schülerinnen und Schülern häufig allein mit Pfeilen assoziiert, obwohl der vorliegende Kontext nicht geometrisch ist und primär eine arithmetisch-algebraische Deutung nahe legt. Vgl. (Malle 2005, S. 17)
- In Anlehnung an die vorherige Beobachtung wurde festgestellt, dass viele Lernende Zahlenpaare ohne Probleme als Punkt interpretieren können, aber erhebliche Schwierigkeiten haben, ein Zahlenpaar als Pfeil zu deuten. Vgl. (Malle 2005, S. 16–17)

Die von Malle präsentierten Ergebnisse zeigen, dass Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten haben, Vektoren als ‚abstrakte Objekte' zu verstehen, die geometrisch interpretiert werden können. Für diese Schüler sind Vektoren rein geometrische Objekte bzw. konkret gegenständliche Objekte. Filler u. Todorova (2012) beziehen sich auf die Ergebnisse von Wittmann (2003b) und Malle (2005) und plädieren bei der Einführung von Vektoren Aspekte aus den drei Zugängen ‚Vektoren als Pfeilklassen', ‚Vektoren als Tupel' sowie den axiomatischen Zugang über die ‚Vektorraumaxiome' zu berücksichtigen. Aus ihrer Sicht kann es keinen „‚Königsweg' zur Entwicklung des Vektorbegriffs im Mathematikunterricht geben […], [weil] Elemente aller drei Herangehensweisen bedeutsam [sind]. Tragfähige Vorstellungen von einem vielfältige Modelle ‚vereinigenden' Strukturbegriff können nur aus der Betrachtung mehrerer verschiedener Repräsentationen und der Erkenntnis struktureller Gemeinsamkeiten erwachsen" (Henn u. Filler 2015, S. 89).

Wittmann (2003a) analysiert und interpretiert Leitfadeninterviews, die mit Grundkursschülerinnen und Grundkursschülern als offene Einzelinterviews geführt wurden. Wittmann unterscheidet im Rahmen seiner Untersuchung zwischen zwei Teilaspekten, die mathematisches Denken auszeichnen können:

- „einen ‚syntaktisch-algorithmischen Aspekt', der das Umformen von Vektortermen und das Lösen von Vektorgleichungen sowie das Lösen linearer Gleichungssysteme umfasst, die jeweils festen Regeln folgen."
- einen ‚semantisch-begrifflichen Aspekt', die Beziehung zwischen Vektorkalkül und den durch ihn beschriebenen geometrischen Objekten, wichtige Teilaspekte des semantisch-begrifflichen Denkens sind das ‚algebraische Beschreiben' geometrischer Sachverhalte mit Hilfe des Vektorkalküls und umgekehrt das ‚geometrische Interpretieren von Vektortermen und -gleichungen." (Wittmann 2003a, S. 14)

Im Mittelpunkt steht die Frage, welche Formen semantisch-begrifflichen Denkens Schülerinnen und Schüler in einem Grundkurs zur Analytischen Geometrie entwickeln. Die Theoriebildung erfolgt mittels ‚Grounded Theory' nach Strauss u. Corbin (1996) aus einer Systematisierung der empirischen Befunde. Anhand der Befunde arbeitet Wittmann zwei idealtypische Sichtweisen auf Objekte in der Analytischen Geometrie heraus:

(1.) „Analytische Geometrie als ‚Punktmengengeometrie': Charakteristisch hierfür ist die Sprechweise, dass ein Punkt ‚ein Element einer Ebene' ist."
(2.) „Analytische Geometrie als ‚vektorielle Beschreibung ganzheitlicher und konkretgegenständlicher geometrischer Objekte': Eine im Anschauungsraum gegebene Ebene wird ganzheitlich wie ein konkretes, beinahe gegenständliches Objekt betrachtet. Ein Punkt ‚liegt auf einer Ebene' – er ist ein eigenständiges Objekt, das zur Ebene hinzu kommt. Koordinaten geben die Position eines Punktes im Anschauungsraum an, Aufhängepunkte und Vektoren beschreiben die Lage von Ebenen im Anschauungsraum. Der Punktmengengedanke spielt keine Rolle." (Wittmann 2003a, S. 22)

In einer früheren Fallstudie, deren Ergebnisse Wittmann (1999) veröffentlichte, konzentriert sich die Untersuchung auf das „begrifflich-semantische Denken von Schülern in der Analytischen Geometrie, insbesondere der geometrischen Interpretation der Parametergleichung einer Geraden" (Wittmann 1999, S. 24). Die Interviews sind im Rahmen dieser Studie an das Prinzip des fokussierten Interviews nach Hopf (1991) angelehnt. Die Interviewform basiert darauf, dass der Interviewer eine Frage jeweils auf der Basis der voraus gegangenen Schülerantworten formuliert und dabei vom Schüler genannte Aspekte aufgreift.

In der Ergebnisauswertung konnte Wittmann herausarbeiten, dass sich die Schülerkonzepte in die beiden oben beschriebenen idealtypischen Vorstellungen zu Objekten in der Analytischen Geometrie einordnen lassen. Beide Vorstellungen bilden zusammen eine Analysekategorie, die Wittmann als den „ontologischen Status der geometrischen Begriffe" beschreibt. Wittmann stellt fest, dass sich zwei weitere Analysekategorien bei der Interpretation der Interviews herauskristallisiert haben: ‚Aspekte funktionalen Denkens' und ‚Variablenaspekte des Parameters'. Das funktionale Denkens umfasst drei von Vollrath (1989) beschriebene Aspekte, die Wittman anhand der geometrischen Interpretation der Gleichung

$$X = A + \lambda \vec{v}$$

wie folgt beschreibt:

- Zuordnungscharakter: „Die Parametergleichung ordnet jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ genau ein $X \in \mathbb{R}^3$ zu, beschreibt also einen Zusammenhang zwischen der unabhängigen Variabel λ und der davon abhängigen Variable X." (Wittmann 1999, S. 32)
- Änderungsverhalten: „Die Parametergleichung einer Geraden erfasst, wie sich Änderungen des Parameters λ konkret auf die Variable X auswirken. Dies ist zunächst eine arithmetische Beziehung, die sich aber auch geometrisch deuten lässt: Je größer $|\lambda|$ ist, desto weiter liegt X vom Aufhängepunkt A entfernt [...]." (Wittmann 1999, S. 33)
- Sicht als Ganzes: „Eine durch eine Parametergleichung gegebene Gerade kann ganzheitlich als ein Objekt betrachtet werden, dem man Eigenschaften zuschreiben und das mit anderen Objekten in Beziehung gesetzt werden kann." (Wittmann 1999, S. 33)

Als Variablenaspekte gibt Wittmann den ‚Bereichsaspekt' an, der noch enger gefasst werden kann durch den ‚Veränderlichenaspekt'. Beide Aspekte stellen nach Malle (1993) inhaltliche Beschreibungen von funktionalen Variablen dar, auf die in Abschnitt 3.2.2 genauer eingegangen wird.

Die Schülervorstellungen zeichnen sich inhaltlich durch die einzelnen Analysekategorien aus. Wittmann betont, dass das Vorkommen eines Aspekts aus einer Analysekategorie nicht das Vorkommen von Aspekten aus anderen Analysekategorien ausschließt. Die Interviews zeigen, dass es Mischformen gibt, zwischen denen die Schüler kontextbedingt springen. Das trifft insbesondere auch auf die beiden komplementären Auffassungen ‚Punktmengengeometrie' und ‚vektorielle Beschreibung ganzheitlicher und konkretgegenständlicher geometrischer Objekte' zu. Wittmann stellt in seiner Untersuchung fest, dass „nicht alle Schüler, die den Kalkül beherrschen, auch den in der Parametergleichung auftretenden Symbolen eine geometrische Bedeutung zuweisen und den durch die Gleichung beschriebenen geometrischen Sachverhalt entsprechend erläutern können" (Wittmann 1999, S. 34). Als mögliche Ursache für diese Beobachtungen führt er an, dass es an einer „unzureichende[n] Föderung des semantisch-begrifflichen Denkens der Schüler im Unterricht" (Wittmann 1999, S. 35) liegen könnte.

1.3 Aufbau der Untersuchung

Bei der Erhebung von Schülervorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen, stellt sich die Frage, ob die individuell ausgebildeten Vorstellungen inhaltlich in einzelnen Aspekten übereinstimmen und darüber hinaus, inwieweit aus einzelnen

Schülervorstellungen idealtypische Merkmale herausgearbeitet werden können, so dass eine Typisierung aller Vorstellungen vorgenommen werden kann.

In diesen Punkten knüpft die vorliegende Untersuchung in ihrer Zielsetzung an die Ergebnisse von Wittmann (2003a) an. Dieser hat herausgearbeitet, dass Vorstellungen der Lernenden in die oben angesprochenen zwei idealtypischen Sichtweisen auf Objekte in der Analytischen Geometrie eingeordnet werden können. Die Vorstellungen werden nach Wittmanns Beobachtungen zusätzlich durch ‚Aspekte funktionalen Denkens' und ‚Variablenaspekte des Parameters' beeinflusst. Mit Blick auf eine Typisierung in der vorliegenden Studie stellt sich die Frage, ob bestimmte Kategorienkombinationen hinsichtlich der Vorstellungsinhalte existieren, durch die sich wiederum Schülervorstellungen als ‚Typ' auszeichnen können.

Die Untersuchung verfolgt die Zielsetzung, Erkenntnisse zur Leitfrage nach den Schülervorstellungen und den oben formulierten Vertiefungsfragen aus Schülerinterviews herauszuarbeiten. Der gesamte Untersuchungsprozess wird in den folgenden Kapiteln dargelegt, so dass der Erkenntnisgewinn Schritt für Schritt nachvollziehbar ist.

Der Begriff ‚Schülervorstellung' wird in diesem einleiten Kapitel zur Zielformulierung ohne weitere Erläuterungen verwendet. Was in dieser Studie unter einer Schülervorstellung genau verstanden wird und wie dieser Begriff vom Begriff ‚Vorstellung' abgeleitet werden kann, wird im anschließenden Kapitel 2 dargelegt. Dabei werden sowohl Aspekte aus der Psychologie als auch Aspekte aus den Didaktiken der Mathematik und der Naturwissenschaften berücksichtigt. Damit schließt der erste einleitende Teil dieses Forschungsberichts.

Der zweite Teil verfolgt in Kapitel 3 das Ziel Vorstellungen zu Vektorgleichungen als Geradenbeschreibung aus fachlicher Perspektive zusammenzustellen. Dazu werden in den ersten Unterabschnitten 3.2 bis 3.4 zunächst Vorstellungen zu den Elementen einer Vektorgleichung wie ‚Variablen' oder ‚Vektoren' diskutiert. Da es sich bei annähernd allen Gegenständen um abstrakte Begriffe handelt, wird im einleitenden Abschnitt 3.1 der Zusammenhang von Begriffen und Vorstellungen erörtert. Jeder Abschnitt bezieht neben fachlichen Überlegungen auch Ergebnisse der stoffdidaktischen Diskussion mit ein. Das Kapitel schließt mit Abschnitt 3.5, in dem Vorstellungen zu Vektorgleichungen als Geradenbeschreibung dargelegt werden. Damit stellt das Kapitel eine normative Zusammenstellung fachlich adäquater Vorstellungen zu den Untersuchungsgegenständen dar und bildet eine Diskussionsgrundlage der erhobenen Schülervorstellungen.

Der dritte Teil bildet als deskriptiver Teil den Kern der Untersuchung. Die einzelnen Kapitel dokumentieren die Erhebung und Auswertung von Schülervorstellungen zu vektoriellen Geradenbeschreibungen. In Kapitel 4 werden die Grundlagen für die Erhebung festgelegt. Dazu gehört in Abschnitt 4.1 die Erläuterung der aus