Mathematik im Kontext

Klaus Volkert

Das Undenkbare denken

Die Rezeption der nichteuklidischen Geometrie im deutschsprachigen Raum (1860 – 1900)

Springer Spektrum

Mathematik im Kontext

Herausgeber:
David E. Rowe
Klaus Volkert

Weitere Bände dieser Reihe: http://www.springer.com/series/8810

Klaus Volkert

Das Undenkbare denken

Die Rezeption der nichteuklidischen Geometrie im deutschsprachigen Raum (1860–1900)

Springer Spektrum

Klaus Volkert
Bexbach, Deutschland

ISSN 2191-074X
ISBN 978-3-642-37721-1
DOI 10.1007/978-3-642-37722-8
ISSN 2191-0758 (electronic)
ISBN 978-3-642-37722-8 (eBook)

Mathematics Subject Classification (2010): 01A55

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Für Aline, Pascal, Rasmus und Sorrel

Dank

Der Inhalt dieses Buches beschäftigte mich seit vielen Jahren. Mehrfach habe ich über ihn Vorlesungen angeboten, u.a. in Frankfurt, Heidelberg, Strasbourg und Wuppertal. Mein Dank gilt allen Hörerinnen und Hörern dieser Vorlesungen, die durch ihre Fragen und ihr Staunen meine Einsichten wesentlich befördert haben. Einige Freunde und Kollegen haben mich durch die Jahrzehnte begleitet und mich in vielerlei Hinsicht nicht nur fachlich unterstützt. Stellvertretend für alle diese nenne ich Erhard Scholz (Wuppertal), Philippe Nabonnand (Nancy), Gerhard Heinzmann (Nancy) und Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach). Mein besonderer Dank gilt Erhard Scholz, der die mühevolle Aufgabe des Korrekturlesens auf sich genommen hat und dessen Rat mir immer von größtem Nutzen war und ist. Den Mitarbeitern in der Arbeitsgruppe „Didaktik und Geschichte der Mathematik“ Sara Confalonieri, Hannah Hoffmann, Mechthild Köhler, Desirée Kröger, Sebastian Kitz und Alfredo Ramirez sowie meinen früheren Mitarbeitern Frauke Böttcher und Jan Schmidt gilt mein Dank für ihre Unterstützung bei der Beschaffung von Literatur und anderweitige vielfältige Hilfe. Kollege Gregor Schiemann hat mein Verständnis von der Entwicklung der Wissenschaft im 19. Jh. speziell und der Philosophie im Allgemeinen durch viele Gespräche und insbesondere in unseren gemeinsamen Seminaren wesentlich bereichert. David Rowe (Mainz) als Mitherausgeber der Reihe „Mathematik im Kontext“ und Clemens Heine (Heidelberg) als zuständiger Bereichsleiter im Springer-Verlag gilt mein Dank dafür, dass sie die Realisierung dieses lange erstrebten, unter dem Aspekt der Umsatzrendite sicherlich nicht allzu attraktiven Projekts ermöglichten. Schließlich danke ich meinen Söhnen Bernhard Pascal und Lucien Rasmus für mannigfaltige technische Hilfe und Marco Kraemer (Wemmetsweiler) für die sorgfältige Erstellung der Druckvorlage dieses Buches.

Bexbach, im Februar 2013 Klaus Volkert

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Einleitung

> *Gefordert soll sein:*
> *[...] 5. Und dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei rechte sind.*
>
> (Euklid)

Übersicht zum Inhalt des Buches

Wenige Themen aus der Mathematikgeschichte sind so gut und umfassend untersucht und dokumentiert worden, wie die Geschichte der nichteuklidischen Geometrie[1]. Das Schwergewicht des Interesses lag dabei auf der Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, deren Ende man in den Publikationen von Janos Bolyai und Nikolaus Lobatschewskij ab ca. 1830 sieht. Mit den Werken der beiden Genannten lagen Bearbeitungen vor, die – mathematisch gesehen – das Problem im Großen und Ganzen lösten, indem sie nachwiesen, dass eine systematische Entwicklung einer Geometrie, welche auf einer Negation des Euklidischen Parallelenpostulats beruht, durchgeführt werden kann. Was die beiden Begründer der nichteuklidischen Geometrie von Vorläufern im 18. Jh. wie G. Saccheri und J. H. Lambert hauptsächlich unterschied, war, dass sie davon überzeugt waren, dass sich in der neuen Geometrie keine Widersprüche ergeben würden – im Unterschied zu G. Saccheri beispielsweise, der hundert Jahre zuvor zahlreiche Sätze der nichteuklidischen Geometrie hergeleitet hatte, um dann doch den Widerspruch (der allerdings aus moderner Sicht keiner war), von dessen Existenz er überzeugt war, zu finden. Die Frage der Widerspruchsfreiheit der nichteuklidischen Geometrie in dem Sinne, wie wir sie

[1] Ich verwende „nichteuklidische" Geometrie im Folgenden meist im engeren Sinn, also als Synonym für „hyperbolische" Geometrie; Ausnahmen hiervon werden angezeigt. Zur Entstehung dieser Terminologie vgl. man Kap. 3.

K. Volkert, *Das Undenkbare denken*, Mathematik im Kontext, DOI 10.1007/978-3-642-37722-8_1,

heute auffassen, sollte erst viel später diskutiert werden (vgl. Kap. 8). Selbst die ersten Versuche, die nichteuklidische Geometrie konkret-anschaulich zu interpretieren, hatten anfänglich mit ihr wenig bis gar nichts zu tun. Das werden wir in den Kap. 3, 4 und 6 genauer sehen.

Die Durchsetzung der nichteuklidischen Geometrie verlief keineswegs nach dem Schema „veni, vidi, vici“. Die Erkenntnisse ihrer Begründer schlummerten jahrzehntelang unbeachtet in der mathematischen Fachliteratur. Dabei spielte sicher eine Rolle, dass diese Begründer eher Außenseiter in der mathematischen Welt ihrer Zeit waren, dass sie ihre Erkenntnisse teilweise in schwer zugänglicher Form darlegten und dass diese mit vielen liebgewonnenen Überzeugungen im Widerstreit standen. Schließlich fehlte die Autorität, die ihnen zum Durchbruch hätte verhelfen können, denn Gauß hütete seine diesbezüglichen Überzeugungen konsequent. Der Prozess, wie sich die nichteuklidische Geometrie schließlich durchsetzte, ist deshalb auch ein Lehrstück der Entwicklung der Mathematik allgemein. Dabei zeigt sich in Kap. 2, wie überraschend wichtig die Frage der Autorität gewesen ist. Trotz Bekanntwerden und Anerkennung der nichteuklidischen Geometrie blieben weitere Unmöglichkeitsbeweise nicht aus. Diese drangen gar bis in die höchsten Höhen der wissenschaftlichen Welt – nämlich in die Pariser Akademie der Wissenschaften – vor. Parallel hierzu blieb auch die kritische Aufgabe, genau aufzuweisen, woran die älteren und neueren Beweisversuche scheiterten. Für ältere Beweise hatte bereits G. S. Klügel mit seiner Göttinger Dissertation (1763) Pionierarbeit geleistet, doch waren danach noch einige besonders populäre neue „Beweise“ gefunden worden (u. a. von A. M. Legendre und B. Thibaut). Diese beiden Aspekte sind Gegenstand des siebten Kapitels. Nachdem sich die nichteuklidische Geometrie etabliert hatte, wurde diese tiefgreifende Veränderung gerne mit jenen grundlegenden Ereignissen der Wissenschaftsgeschichte verglichen, die das moderne Weltbild ermöglicht hatten – also mit einer Art von Kopernikanischer Wende:

> Nicht unwahrscheinlich ist es, dass sich noch in dem ablaufenden Jahrhundert allmählich in den Vorstellungskreis der Gebildeten eine Neuerung drängt, welche in Art und Bedeutung jener Vorstellungsänderung gleichsteht, die vor wenigen Jahrhunderten in Bezug auf die Gestalt der Erde und die Stellung derselben im Weltall zum Abschlusse kam.
>
> (Most 1883, 1)

Es gibt zahlreiche hervorragende Studien, insbesondere auch Quellensammlungen, zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie, weshalb es angebracht ist, hier das Besondere der vorliegenden Quellensammlung herauszustellen. Da ist zuerst einmal der bislang wenig beachtete Zeitraum zu nennen, den wir hier betrachten werden. Dieser reicht etwa von 1860 bis 1900.[2] Sodann geht es inhaltlich darum, wie die nichteuklidische Geometrie allmählich ins allgemeine mathematische Bewusstsein und noch weiter drang, wie sie also rezipiert worden ist. Dabei werden wir uns mit gewissen sinnvollen Ausnahmen auf den deutschsprachigen Raum konzentrieren, denn schon hier ist die Fülle des Materials überwältigend. Wir werden uns nicht nur auf das höchste Niveau der mathematischen Forschung beschränken, sondern auch einen Blick auf Lehrerkreise werfen; auch dies

[2] Eine Ausnahme bildet Voelke (2005), der aber eine andere Zielsetzung verfolgt und zudem ausführlich den französischsprachigen Raum berücksichtigt. Diesem sehr sorgfältig gearbeiteten Werk verdankt der Autor des vorliegenden Buches viele Anregungen und Ideen. Pont (1986) enthält einige der hier präsentierten Texte. Für den englischen Sprachraum ist Richards (1988) zu nennen.

scheint dem Verfasser eine große Lücke in der vorhandenen Literatur zu sein. Die Parallelenlehre war – und ist – ein traditionelles Teilgebiet der gymnasialen Schulgeometrie; tiefgreifende Änderungen in ihr warfen sofort auch die Frage auf, ob Konsequenzen für den Unterricht zu ziehen seien. Das umso mehr als viele Gymnasiallehrer in der zweiten Hälfte des 19. Jhs. durchaus noch den Anspruch hatten, an der Wissenschaft teilzuhaben und aktiv daran teilzunehmen. Mit den sogenannten Schulprogrammen stand ihnen eine Publikationsform zur Verfügung, deren Wichtigkeit die mathematikhistorische Forschung erst kürzlich für sich entdeckt hat (vgl. hierzu Kap. 7 und vor allem 10).

Natürlich müssen wir auch auf die Diskussionen eingehen, die mehr oder minder philosophisch geprägt waren. Vielen Philosophen – professionelle und auch nichtprofessionelle – schien die Möglichkeit der nichteuklidischen Geometrie geradezu ausgeschlossen. Kants Erkenntniskritik wurde zum „locus classicus" für die Zurückweisung der nichteuklidischen Geometrie in der Hand vieler Gegner der neuen Geometrie. Andererseits gewann die empirische Sichtweise auf Geometrie im 19. Jh. allgemein und insbesondere im Zusammenhang mit der nichteuklidischen Geometrie stark an Einfluss. Ihr zufolge ist die Natur des Raumes durch Messungen zu klären und die Grundbegriffe der Geometrie sind empirischen Ursprungs. Die Geometrie ist so gesehen die exakteste Naturwissenschaft (H. Helmholtz, M. Pasch). Schließlich schien die nichteuklidische Geometrie dem Relativismus Tür und Tor zu öffnen: Wenn selbst eine scheinbar felsenfeste Aussage wie „Die Winkelsumme im Dreieck beträgt zwei Rechte" keine absolute Wahrheit mehr darstellte, wie konnte es dann überhaupt noch Sicherheit geben, etwa bezüglich wichtiger – z. B. ethischer oder naturwissenschaftlicher – Fragen? Diese Herausforderung muss man auch auf dem Hintergrund der Auseinandersetzungen um den Darwinismus sehen, die damals weite Kreise – bis hin zum vorübergehenden Verbot des Faches Biologie (1883)[3] – zogen. Der Darwinismus war stets dem Materialismusverdacht ausgesetzt; von diesem war es nur ein kleiner Schritt hin zu Sozialismus und Kommunismus, Weltanschauungen, die das deutsche Kaiserreich mit allen Mitteln bekämpfte. Darüber hinaus wurde heftig gestritten um die Einführung bzw. den Ausbau der Naturwissenschaften im Gymnasium; im Unterschied zu diesen war der Bestand des Faches Mathematik nie gefährdet.[4] Der „Wahrheitsgewissheitsverlust" (G. Schiemann), der sich in den Naturwissenschaften, allen voran in der Physik, bemerkbar machte, und der dazu führte, dass die Naturwissenschaften schließlich umfassend einen hypothetischen Status bekamen, trug ein Übriges dazu bei, althergebrachte Grundlagen auch der Geometrie in Frage zu stellen. Umgekehrt begünstigte die Entwicklung in der Geometrie natürlich auch die allgemeine Entwicklung hin zur Überzeugung, alle Wissenschaft sei letztlich hypothetisch, indem eine der letzten Bastionen des Apriorismus gestürmt wurde. Diese Fragen werden im Kap. 9 diskutiert.

Eine große Rolle spielten die „Versinnlichungen" der nichteuklidischen Geometrie, die ab 1868 gefunden wurden (oder konstruiert wurden, je nach philosophischer Lesart) und die man viel später „Modelle" nennen sollte. Diese lösten in den Augen vieler Mathematiker ein ontologisches (und kein logisches) Problem, indem sie den Nachweis lieferten, dass auch die nichteuklidische Geometrie eine „reale" Grundlage besitzt. Die Geschichte dieser Modelle ist faszinierend: Blickt man genauer hin, so erkennt man viele überra-

[3] Daum (2002), 83.
[4] Daum (2002), 43–84.

schende Facetten und Hindernisse, die man aus moderner Sicht gar nicht erwartet hätte. Darüber geben die Kap. 3, 4 und 6 ausführlich Auskunft.

Gewissermaßen diametral der Versinnlichung gegenüber gestellt ist traditionell die Axiomatik. Diese wird gerne begriffen als der Versuch, jeglichen Bezug zur Anschauung auszuschalten und die gesamte Mathematik, insbesondere aber die Geometrie, rein deduktiv aufzubauen. Die Frage nach dem Status des Parallelenpostulats war ja ursprünglich eine zur Axiomatik: Handelt es sich wirklich um ein Axiom (bzw. in Euklids Ausdrucksweise um ein Postulat) oder nicht doch um einen ableitbaren Satz? In diesem Sinne ist das Problem der nichteuklidischen Geometrie auch eingebettet in die allgemeine Entwicklung der Axiomatik, insbesondere da seit dem so genannten ersten Satz von Legendre klar war, dass nicht nur das Parallelenaxiom sondern auch die Frage der „Unendlichkeit“ der Geraden, die man durchaus unterschiedlich in einem „Axiom der Gerade“ fasste, eine wichtige Rolle im Bereich der hier interessierenden Fragen spielt. Hierauf gehen wir in Kap. 8 ein.

Schließlich geht es in Kap. 5 um die sphärische und die elliptische Geometrie. Auch in diesen gilt eine Negation des Parallelenpostulats – es gibt hier bekanntlich keine Parallelen. Hinzu kommt aber, dass die Geraden nur noch endliche Länge besitzen und die Anordnung der Punkte auf Geraden eine zyklische ist. Insgesamt hat die Klärung der Verhältnisse, die hier vorliegen, eine große Rolle in der Rezeption der Alternativgeometrien[5] gespielt.

Der Anhang schließlich enthält zwei bemerkenswerte, bislang wenig bekannte Dokumente zur Geschichte der nichteuklidischen Geometrie: nämlich die Dissertation von S. G. Klügel (1763), die eine Vielzahl von Beweisen für das Parallelenpostulat kritisch untersucht (und verwirft), sowie den ausführlichen Artikel zur Parallelenlehre von L. A. Sohncke aus der Enzyklopädie von Ersch und Gruber, in dem dieser einen Überblick zur Lage gab, wie sie sich um die Mitte des 19. Jhs. für alle Nichteingeweihten darstellte. Die Übersetzung der Dissertation von G. S. Klügel hat Herr Dr. M. Hellmann (Wertheim) mit großer Sorgfalt vorgenommen; die Dissertation wird hier erstmals in deutscher Sprache gedruckt.

Das vorliegende Buch ist eine kommentierte Quellensammlung. Viele der hier wiedergegebenen Texte werden erstmals einem größeren Publikum zugänglich gemacht bzw. sind erstmals in die deutsche Sprache übersetzt worden. Anders aber als in der klassischen Quellensammlung von P. Stäckel und Fr. Engel werden hier ausführliche Kommentare gegeben – in der Hoffnung, so das Verständnis zu fördern. Mathematisch-technische Entwicklungen wurden weitgehend vermieden. Allerdings war der Autor bestrebt, die Grundlagen zumindest soweit vorzustellen, dass ein kundiger Leser diese weiterführen oder sich in der reichlich vorhandenen Fachliteratur informieren kann. Fußnoten geben unmittelbar Informationen zum Text, Endnoten der Kapitel dagegen bieten weiterführende Informationen, insbesondere auch Hinweise auf die Literatur, an. Über die verwendete Terminologie – ein aufgrund der herrschenden Uneinheitlichkeit schwieriges Thema – gibt die Bemerkung „Zur Terminologie“ am Ende dieser Einleitung Auskunft. Um das Verständnis der geschichtlichen Zusammenhänge zu fördern, werden die wichtigsten Akteure in Kurzbiographien vorgestellt. Die Schreibweisen – ein weiteres unerfreuliches Thema –

[5] Diesen Terminus verwende ich als Oberbegriff. Im weiteren Sinne zählt zu ihm auch die vier- und höherdimensionale Sichtweise, welche aber im vorliegenden Buch nicht zur Sprache kommen wird. Er ist synonym mit nichteuklidische Geometrie im weiteren Sinne.

wurden konsequent vereinheitlicht, außer in Titeln, die im Literaturverzeichnis auftreten (um deren Suche nicht unnötig zu erschweren). Auch wurden alle Texte – soweit sie nicht gescannt sind – in Schreibweise und Orthographie heutigen Standards angepasst.

Die Situation der Mathematik insbesondere der Geometrie im deutschsprachigen Raum

Die in diesem Buch dargestellt Rezeptionsgeschichte spielte sich in der Hauptsache in der zweiten Hälfte des 19. Jhs. im deutschsprachigen Raum ab. Es erscheint deshalb sinnvoll, einige Bemerkungen allgemeiner Art voran stellen, um deutlich zu machen, in welcher Situation sich damals die Mathematik – was genau sollte das sein? – befand. Wenn wir im Folgenden vom „deutschsprachigen Raum" sprechen, so ist damit in etwa der politische Raum gemeint, der mit der Reichsgründung 1871 festgelegt wurde; selbstverständlich ist dieser – die „kleindeutsche" Variante – erheblich kleiner als der deutsche Sprachraum im eigentlichen Wortsinne. Auch nach der Reichsgründung blieb den Einzelstaaten[6] eine erhebliche Autonomie, welche insbesondere auch damals das Bildungswesen betraf. Insofern sind allgemeine Aussagen nur schwer zu treffen. Im universitären Bereich hatte sich die Mathematik von einem propädeutischen Fach, das in der Artistenfakultät im Rahmen des Quadriviums hauptsächlich als Arithmetik und Geometrie von einem mehr oder (meist) weniger qualifizierten Dozenten unterrichtet wurde, zu einer eigenständigen und gleichberechtigten Disziplin in der Philosophischen Fakultät, zu der die Artistenfakultät im 19. Jh. aufgewertet worden war, entwickelt. Dabei ist zu beachten, dass sich erst im Laufe des 19. Jhs. die Disziplinenvielfalt so herausgebildet hat, wie sie uns heute geläufig ist. Parallel hierzu verläuft eine fortschreitende Autonomisierung der Disziplinen, in Sonderheit auch der Mathematik. Man verbittet sich zunehmend Einmischungen von „außen" seitens der Philosophie, der Theologie oder anderer Gebiete. Wissenschaft wird zur Autorität. Im 19. Jh. änderte sich das Kräfteverhältnis zwischen den Fakultäten auch insofern, als ab ca. 1870 die Philosophische Fakultät zur größten Fakultät aufstieg – gefolgt von der Medizin auf Platz zwei – und damit die Jurisprudenz von Platz eins verdrängte.[7] Der Anteil der Studenten der Philosophischen Fakultät, welche Mathematik oder Naturwissenschaften belegten, stieg geringfügig von 18,3% im Jahr 1861 auf 19,3% zehn Jahre später.[8] Einen wichtigen Anteil hieran hatte die mit Beginn des 19. Jhs. einsetzende Professionalisierung des Mathematiklehrerberufs an Gymnasien als Folge der durchgreifenden Organisation des Bildungswesens durch den Staat – eine sehr folgenreiche Neuerung des 19. Jhs. Bis Ende dieses Jahrhunderts gab es eigentlich nur zwei Berufsmöglichkeiten für Absolventen der Mathematik: die Dozentenlaufbahn an Universitäten, technischen Hochschulen oder ähnlichen Institutionen[9] oder eben das Lehramt an

[6] Die wichtigsten neben Preußen: Bayern, Baden, Hessen, Mecklenburg, Oldenburg, Sachsen, Württemberg sowie das Reichsland Elsaß-Lothringen.
[7] Vgl. Wehler (2006), 419, wo sich sehr informatives Zahlenmaterial findet. Ich danke V. Remmert (Wuppertal) dafür, dass er mich auf diese wertvolle Quelle aufmerksam gemacht hat.
[8] Vgl. Wehler (2006), 421.
[9] Z. B. Maschinenbauschulen, Bauschulen etc. – gelegentlich als Mittelschulen bezeichnet.

Gymnasien. Dabei war es nicht selten, dass spätere Mathematikprofessoren einige Zeit an Gymnasien unterrichteten, eine Durchlässigkeit war durchaus gegeben.

Etwa ab der Mitte des 19. Jhs. war die Struktur für die universitäre Karriere eines Mathematikers die folgende: Promotion, Habilitation, Privatdozent, oft Extraordinarius, Ordinarius. In der Regel erhielten nur die Ordinarien eine feste Bezahlung, die Extraordinarien mussten sich mit Hörergeldern und bezahlten Lehraufträgen (zum Beispiel für die Kameralisten) eventuell auch mit einer geringen festen Bezahlung begnügen, Analoges galt für Privatdozenten.[10]

1860 gab es im Gebiet des späteren deutschen Reichs 20 Universitäten, die jüngste hierunter war Bonn (gegründet 1818), gefolgt von Breslau (1811) und Berlin (1810), etwa die Hälfte davon lag auf preußischem Gebiet. Nach dem Vertrag von Frankfurt (1872) kam dann noch die Universität in Straßburg hinzu, die im Anschluss systematisch ausgebaut wurde zur Kaiser-Wilhelm-Universität. Diese Situation war erstaunlich stabil; sie blieb unverändert bis zum Ersten Weltkrieg.[11] Die Anzahl der Studierenden blieb lange Zeit etwa konstant, begann dann aber nach 1870 zu wachsen. Im Zuge dieses Wachstums änderte sich auch die soziale Herkunft der Studenten dadurch, dass verstärkt Studenten aus kleinbürgerlichen Verhältnissen auftraten.[12]

Jede Universität verfügte über ein bis zwei Ordinariate für Mathematik, ganz selten waren es mal drei.[13] Man kommt so auf etwa 50 Ordinarien für Mathematik im deutschen Reich.[14] Eine Karriere als Mathematiker anzustreben, war somit reichlich riskant. Am besten war es natürlich, man hatte ein finanzstarkes Elternhaus im Hintergrund oder sonstige ergiebige Einnahmequellen.[15] In der Regel gab es ein bis zwei Extraordinarien und einen Privatdozenten an jeder Universität, so dass man auf rund 100 hauptberuflich forschende Mathematiker kommt. Dabei ist zu beachten, dass „Mathematik" an Universitäten schlichtweg „reine Mathematik" bedeutete, was dennoch viele ihrer Professoren nicht daran hinderte, auch in angewandten Bereichen – vorrangig in Physik und Himmelsmechanik – zu forschen (aber nur selten zu lehren). Weiterhin gab es noch forschende Mathematiker an den (ab 1875 so genannten) neun Technischen Hochschulen und an

[10] Der Unterschied zwischen Privatdozenten und Extraordinarien war materiell und universitätsrechtlich gering; insbesondere hatten beide kein Mitspracherecht, entschieden haben im 19. Jh. die Ordinarien allein.

[11] Erst danach kam es zu Neu- und Wiedergründungen (Hamburg, Frankfurt a. M. und Köln).

[12] Wehler (2006), 427.

[13] Berlin, Göttingen; in Straßburg gab es ein bezahltes Extraordinariat. Andererseits existierten auch Universitäten mit einem einzigen mathematischen Ordinariat wie Heidelberg und Greifswald.

[14] Genauere Angaben finden sich bei Lorey (1916), 17, der für WS 1914/15 folgende Zahlen (für Mathematik) angibt: 49 Ordinariate, 6 Honorarprofessoren, 18 Extraordinate, 22 Privatdozenten, 2 sonstige Dozenten. Für das Jahr 1870 gibt Wehler als Gesamtzahl für die Mitglieder des Lehrkörpers aller deutschen Universitäten 1521 Männer an; vgl. Wehler (2006), 423.

[15] Bespiele: L. Kronecker, der große Ländereien (mit-)besaß und zeitweise auch selbst verwaltete; F. E. Prym, der eine florierende Fabrik für Druckknöpfe besaß (ältere Leute kennen heute noch die früher sehr verbreiteten Prymschen Druckknöpfe), A. Pringsheim, Schwiegervater von Th. Mann und Spross der angeblich zweitreichsten Berliner Familie (nach Siemens), die ihr Vermögen Kaufhäusern verdankte. Diese Auswahl ist natürlich rein zufällig und keineswegs repräsentativ. Neben diesen finanziellen Schranken gab es auch speziell Hindernisse für Juden, die sich weigerten, zu konvertieren, und die erst spät im 19. Jh. Beamte werden konnten. Vgl. hierzu die eindrückliche Schilderung bei L. Königsberger (Königsberger 1919, 30–32). Bekennende Sozialisten hätten sicher auch keine Chance gehabt, anscheinend gab es aber keine unter den Mathematikern der zweiten Hälfte des 19. Jhs.

einigen Akademien[16] (wie Münster und Braunsberg in Ostpreußen [heute Braniewo in Polen]) sowie an den bereits genannten Mittelschulen.[17] An den technischen Hochschulen – damals meist Polytechnika genannt – etablierte sich im Laufe des 19. Jhs. die darstellende Geometrie als ein neues mathematisches Fach, was dazu führte, dass hierfür meist ein Geometer beschäftigt wurde. Aufgrund dieser schwierigen Situation sahen sich manche Privatdozenten oder Extraordinarien genötigt, Rufe ins Ausland anzunehmen. Eine wichtige Rolle spielte hierbei die ETH in Zürich (damals Polytechnikum genannt), die für viele deutsche Mathematiker[18] die erste Sprosse in der Karriereleiter bildete. Ganz mutige (oder verzweifelte?!) wagten sich gar in die USA wie H. Maschke (1891–1908 Assistenzprofessor in Chicago) und O. Bolza (1894–1910 Professor in Chicago). Die mathematische Gemeinschaft war klein und überschaubar, man kannte sich in der Regel. Das Zentrum der Mathematik lag im 19. Jh. zuerst lange Zeit in Göttingen (Gauß, Dirichlet, Riemann, Clebsch), um dann in den 70ern sich nach Berlin zu verlagern (Kummer, Kronecker, Weierstrass) und schließlich wieder nach Göttingen (Klein, Hilbert, Minkowski) zurückzukehren. Die Dominanz von Berlin wurde durchaus als lastend empfunden, Belege hierfür findet man bei F. Klein an vielen Stellen, aber auch bei G. Cantor.[19] Die Akademien der Wissenschaften,[20] die im 18. Jh. der wichtigste Träger der mathematischen Forschung gewesen waren, verloren im 19. Jh. angesichts des Aufstiegs der neukonzipierten Forschungsuniversitäten an Bedeutung. Allerdings boten sie ihren Mitgliedern, neben Prestige und eventuell auch Bezahlung, vor allem bequeme Möglichkeiten der Publikation.

Kommunikationsmöglichkeiten stellten die mathematischen Fachzeitschriften bereit, die im 19. Jh. im deutschsprachigen Raum entstanden: das „Journal für die reine und angewandte Mathematik“, gegründet 1826 von A. L. Crelle, das „Archiv der Mathematik und Physik“, gegründet 1841 von J. A. Grunert, das „für die besonderen Bedürfnisse der Lehrer an höheren Bildungsanstaltungen“ geplant war, die „Zeitschrift für Mathematik und Physik“, gegründet 1856 von O. Schlömilch, sowie die 1868 in Abgrenzung zur Berliner Schule von A. Clebsch ins Leben gerufenen „Mathematischen Annalen“. Abgesehen von einem vorüber gehenden Tief unter dem Herausgeber K. W. Borchardt behauptete das Crelle-Journal auch international seine führende Position bis in die 1890er Jahre hinein, als allmählich die Konkurrenz durch die „Mathematischen Annalen“ immer stärker wurde. Hinzu kam 1870 die „Zeitschrift für den mathematischen und naturwissenschaftli-

---

[16] Diese boten einen höheren Abschluss nur für Theologen an, verfügten aber über ein breiteres Angebot an Fächern, die man mit dem Lehrerexamen abschließen konnte. Bekanntes Beispiel eines Akademiestudenten ist K. Weierstrass, der sein Lehrerexamen in Münster ablegte, nachdem sein Studium der Kameralistik in Bonn wenig Erfolg gebracht hatte. Weierstrass und später auch sein Schüler W. Killing wurden Professor an der Akademie in Braunsberg.

[17] Hier waren die Möglichkeiten, aktiv zu forschen, wohl eher bescheiden. Ein bekannter Mathematiker, der an einer derartigen Mittelschule, nämlich der Maschinenbauschule in Hagen, unterrichtete, war V. Schlegel.

[18] Beispiele: R. Dedekind, E. B. Christoffel, H. A. Schwarz, G. Frobenius, A. Hurwitz, F. Prym, H. Weber, F. Schottky, H. Minkowski.

[19] Cantor litt doppelt unter Berlin: zum einen durch die heftigen Angriffe Kroneckers auf seine Mengenlehre, zum anderen durch die von ihm als ungerecht empfundene Differenz in der Bezahlung; vgl. Décaillot (2011), 6–7.

[20] Solche gab es in dem von uns betrachteten Raum in Preußen (Berlin, Göttingen), Sachsen (Leipzig) und Bayern (München); daneben gab es die Leopoldina in Halle.

chen Unterricht", gegründet von I. C. V. Hoffmann, die sich didaktischen Fragen widmete. Eine andere Kommunikationsmöglichkeit bot die mathematische Sektion der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte (seit 1843), später kam eine Sektion für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht hinzu.[21] Auch die Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner, die sogenannte Wanderversammlung, hatte seit 1864 eine Sektion für den Mathematikunterricht. Reisen – außer zu den Naturforscherversammlungen – waren selten und auswärtige Vorträge (in der Art moderner Kolloquien) gab es noch nicht. Dafür wechselte man häufig Briefe – die Korrespondenz war auch in der zweiten Hälfte des 19. Jhs. eine wichtige Form, um mathematische Ideen zu kommunizieren. Hin und wieder druckten die Fachzeitschriften solche Briefe.

Mathematik und insbesondere Geometrie war Bestandteil des gymnasialen Unterrichts. In der Regel gab es an einem Gymnasium – diese waren meist sechsklassig – zwei Mathematiklehrer, einen Oberlehrer, der die Qualifikation besaß, in der Oberstufe zu unterrichten, und einen Unterlehrer, der die restlichen Klassen versorgte. Daneben unterrichteten diese Lehrer immer auch in anderen Fächern, den Ein-Fach-Lehrer gab es in Deutschland nie. Im Laufe des 19. Jhs. erfuhr die Mathematik als Schulfach nach langem Kampf eine Aufwertung, insbesondere entstanden „realistische"[22] Anstalten. Der Kampf um deren Gleichstellung dauerte das ganze Jahrhundert, erst der königliche Erlass vom 26.11.1900 stellte in Preußen die Realanstalten den anderen Gymnasien gleich (z. B. bezüglich der Berechtigung zum Studium, die das entsprechende Abitur bot). In den Auseinandersetzungen mit den Altphilologen spielte die Frage eine große Rolle, welchen Beitrag die Mathematik zur Bildung und zum Erlernen des Denkens leiste.

Günstig für die Mathematik war natürlich die Tatsache, dass die auch in Deutschland im 19. Jh. einsetzende Industrialisierung einen massiven Bedarf an Fachkräften, z. B. Ingenieuren, mit sich brachte.[23] Allerdings entstand in Gestalt der sogenannten Ingenieursbewegung gegen Ende des 19. Jhs. eine einflussreiche Bewegung, die die ihrer Meinung überzogenen mathematischen Ansprüche in der Ausbildung von Ingenieuren kritisierte. Im 19. Jh. wuchs das staatliche Interesse an Wissenschaft und Technik[24] ungemein; insbesondere entstand in Deutschland das System staatlich finanzierter Forschungsuniversitäten, das Vorbildcharakter für viele andere Länder gewinnen sollte. Dennoch bleibt festzuhalten, dass sich weder die Universitäten noch die traditionellen Gymnasien direkt an den Bedürfnissen der Industrialisierung orientierten.[25]

In Gestalt der Schulprogramme stand den Gymnasiallehrern eine Literaturgattung zur Verfügung, die einen regen Austausch ermöglichte. Einem Schulprogramm, das im Wesentlichen das Schulleben eines Schuljahres dokumentierte, wurde in der Regel eine wissenschaftliche Abhandlung (oft Programmschrift genannt), geschrieben von einem Lehrer

---

[21] Vgl. Tobies und Volkert (1998).

[22] Das heißt solche Schulformen, die den Realia (im Gegensatz zu den Humaniora) – also den Naturwissenschaften Mathematik eingeschlossen – eine wichtige Stellung einräumten, was auf Kosten des Unterrichts in den alten Sprachen geschah. Realgymnasien boten noch Latein als Fach, Oberrealschulen ermöglichten das lateinlose Abitur. Lateinlosigkeit konnte Probleme hervorrufen, wie A. Hurwitz aber auch noch der spätere Nobelpreisträger K. Röntgen beim Versuch, sich zu habilitieren, erfahren mussten.

[23] Zur Frage der Technisierung und deren Auswirkungen auf den mathematischen Unterricht, insbesondere an den Technischen Hochschulen und ihren Vorläufern, vgl. man Hensel (1989).

[24] Man denke an die Chemie, insbesondere an die Agrarchemie.

[25] Vgl. Wehler (2006), 421.

der Schule, beigegeben.[26] Unter den Tausenden von Programmschriften finden sich nicht wenige, die sich mit mathematischen Themen aus fachwissenschaftlicher Sicht beschäftigten. Viele von Mathematikern geschriebene Programme widmeten sich auch der Frage nach dem Bildungswert der Mathematik, den es gegen die Kritik der Philologen nachzuweisen galt.

Geht man von etwa 800 Gymnasien im uns hier interessierenden Raum aus, so kommt man auf etwa 1600 Mathematiklehrer.[27] Das vergrößert das Publikum für Diskussionen über mathematische Themen beträchtlich, bleibt aber letztlich immer noch eine überschaubare Anzahl. In kleineren Städten waren die Mathematiklehrer des Gymnasiums oftmals die lokalen Repräsentanten von Naturwissenschaft und Mathematik schlechthin; gefordert wurde deshalb, sie mit einem entsprechenden Wissen auszustatten. Zumindest in größeren Städten gab es oft „naturhistorische" oder ähnlich benannte Vereine, die sich um die Förderung von Mathematik und Naturwissenschaften bemühten und in denen oft auch Mathematiker eine Rolle spielten.[28] Um 1880 herum sorgte der von dem Leipziger Astrophysiker F. K. Zöllner ausgelöste Skandal dafür, dass die Mathematik und mit ihr die Idee einer vierten Dimension Schlagzeilen machte und selbst in Blättern wie der „Gartenlaube" besprochen wurde.[29]

Insgesamt ergibt sich ein zwiespältiges Bild von der Rolle der Mathematik in der Gesellschaft: auf der einen Seite engagierte Förderung mit dem Anspruch, eine für die Bedürfnisse der neuen Zeit – des vielzitierten Fortschritts – sehr wichtige Wissenschaft zu vertreten, auf der anderen Seite massive Widerstände.

- Verzeichnis der Universitäten:[30]
  Berlin (1810), Bonn (1818), Breslau (1811), Erlangen (1743), Freiburg i. Br. (1457), Gießen (1607), Göttingen (1737), Greifswald (1456), Halle-Wittenberg (1694/1502), Heidelberg (1386), Jena (1558), Kiel (1665), Königsberg (1544), Leipzig (1409), Marburg (1527), München (1472)[31], Rostock (1419), Tübingen (1872), Würzburg (1582).
- Verzeichnis der Technischen Hochschulen:[32]
  Aachen (1870), Berlin-Charlottenburg (1799), Braunschweig (1745), Darmstadt (1868), Dresden (1851), Hannover (1847), Karlsruhe (1825), München (1868), Stuttgart (1840); die Bergakademie Freiberg (1765) wurde 1899 einer Technischen Hochschule gleichgestellt.

Die größten Universitäten waren Berlin (1871 studierten dort 2208 Studenten), Leipzig (1803 Studenten im Jahr 1871) und München (1107 im Jahr 1871), rund die Hälfte aller Studenten studierten an den fünf größten Universitäten (neben den genannten noch die

[26] Vgl. Schubring (1986).
[27] Die Zahl der Kandidaten, die in Preußen das Staatsexamen mit Mathematik und Naturwissenschaften ablegten, stieg von etwas über 20 im Jahre 1839 auf rund 170 um 1884 herum, um dann im letzten Jahrzehnt des 19. Jhs. wieder auf das Niveau von 1839 zu fallen (nach Lorey (1916), 22).
[28] Ein Beispiel hierfür sind Max Brückner und der Zwickauer Verein für Naturforschung. In Marburg gab es die Gesellschaft zur Beförderung der gesamten Naturwissenschaften. Mehr zu diesen Vereinen, insbesondere zu ihrer Rolle im Rahmen der Volksbildung, findet man bei Daum (2002), 85–131.
[29] Zur populärwissenschaftlichen Literatur vgl. man Daum (2002), zu populärwissenschaftlichen Zeitschriften insbesondere dort 337–376.
[30] Nach Lorey (1916), 1.
[31] Ursprünglich gegründet in Ingolstadt (bis 1800), dann zeitweise in Landshut (1800–1826).
[32] Nach Lorey (1916), 142. In Klammern das Jahr der Gründung.

Universitäten in Breslau und Halle).[33] Universitäten wie Heidelberg und Tübingen hatten 1871 539 bzw. 671 Studenten, Kiel und Rostock bildeten die Schlusslichter mit 112 und 108 Studenten.

Innermathematisch gilt das 19. Jh. vor allem als das Jahrhundert der Analysis, genauer gesagt, der Funktionentheorie, und der Algebra. Aber auch die Geometrie erfuhr in ihm einen erheblichen Aufschwung. Das lag nicht zuletzt daran, dass neue Teildisziplinen in der Geometrie entstanden. Man denke nur an die projektive Geometrie, die darstellende Geometrie, die nichteuklidische Geometrie, die Liniengeometrie und als Verallgemeinerung der Geometrie die Topologie. Durch die zunehmende Auffächerung stellte sich implizit die Frage, was überhaupt denn Geometrie sei. Eine Antwort hierauf wurde von F. Klein in seinem später sehr bekannt gewordenen „Erlanger Programm" (1872) vorgeschlagen. Zwanzig Jahre zuvor schon hatte die französische Zeitschrift „Nouvelles annales de mathématiques" eine Liste veröffentlicht mit dem Titel „Über verschiedenen Geometrien":

> Heute gibt es *acht* Geometrien, die sich untereinander durch verschiedene Logiken unterscheiden. Wir kennzeichnen diese Geometrien durch die Namen französischer Geometer, die entsprechende Werke veröffentlicht haben.
>
> 1. Die alte Geometrie, die *grundlegende* Geometrie, diejenige der Gymnasien (Legendre);
> 2. die projektive Geometrie (Poncelet);
> 3. die *dualistische* Geometrie , die Geometrie der *polaren Reziprozität* (Poncelet);
> 4. die *segmentäre* Geometrie (Chasles);
> 5. die *infinitesimale* Geometrie (Bertrand, Ossian Bonnet)[34];
> 6. die *kinematische* Geometrie (Mannheim);
> 7. die *algorithmische* Geometrie der *Determinanten* und *Invarianten* (Painvin).
> 8. Die *epiphanoische* Geometrie mit Familien *homofokaler Flächen*, *Isothermen* und *Äquistatiken* (Lamé).
>
> Es gibt noch zwei weitere Geometrien, deren Prinzipien noch nicht bekannt sind.
>
> a) Die Geometrie der *Lage*, die von Leibniz angedeutet wurde; Beispiele: Solitärspiel, Springer im Schach (Euler); Brücken des Pregel (Euler).
> b) Die Geometrie der *Disposition*, welche von Hrn. Sylvester in sechs öffentlichen Vorlesungen behandelt worden ist [...]
>
> Ein wertvolles Werk wäre ein elementares Lehrbuch, das neben der grundlegenden Geometrie auch die Prinzipien der anderen Geometrien mit ihren wichtigsten Anwendungen auf Linien und Flächen im *Allgemeinen* enthalten würde. [...]
>
> Jede dieser Geometrien beansprucht einen Euklid für sich.[35]

Ein derartiges Labyrinth konnte einem schon skeptisch machen.

Auch und gerade im 19 Jh. erwies sich das Feld der Geometrie als sehr fruchtbar, wobei der Streit zwischen der analytischen und der synthetischen Methode, der in Frankreich für erhebliches Aufsehen sorgte, im deutschsprachigen Raum allerdings keine vergleichbare Schärfe annahm. Die Geometrie war in einer merkwürdigen Zwitterstellung: Zum einen war sie von alters her dadurch ausgezeichnet, dass sie axiomatisch-deduktiv aufgebaut war und somit dem Ideal einer mathematischen Theorie von allen mathematischen Disziplinen

[33] Vgl. Wehler (2006), 421.
[34] Damit ist die Differentialgeometrie gemeint. Bonnet war einer der ersten Mathematiker in Frankreich, der die Bedeutung von Gaußens Arbeiten zur Differentialgeometrie erkannte.
[35] Anonym in Nouvelles annales de mathématiques 1. série 18 (1859), 449–450.

am nächsten kam. Zum andern rückte sie immer mehr in die Nähe einer Naturwissenschaft und wurde in einem Atemzug mit der Mechanik genannt. Diese Entwicklung hatte mit der empiristischen Auffassung von Geometrie zu tun, auf die wir im Folgenden immer wieder stoßen werden. So gesehen war die Geometrie weit entfernt vom Ideal einer reinen stets Wahrheiten liefernden Wissenschaft; diesen Ehrentitel musste sie im 19. Jh. abgeben an die gerade entstandene Zahlentheorie. Das Paradigma der reinen letztbegründeten Wissenschaft spielte eine zentrale Rolle im Bildungsideal des Neuhumanismus, der zeitweise – vor allem in Preußen durch W. von Humboldt – großen Einfluss auf das Bildungssystem erlangte.[36] Königin und Magd zugleich, so etwa könnte man die Rolle der Geometrie im 19. Jh. charakterisieren.

Die Entdeckung der nichteuklidischen Geometrie spielte eine wichtige Rolle im jenem Prozess des „Wahrheitsgewißheitsverlusts", der in der zweiten Hälfte des 19. Jhs. zum seinem Ende kam und in dessen Verlauf die Naturwissenschaften ihren Anspruch, unerschütterliche letzte Wahrheiten zu liefern und das Wesen der Natur zu entschleiern, aufgeben mussten zugunsten einer umfassenden Hypothetisierung ihres Wissens.[37] An immanenten Faktoren kann man sowohl in den Naturwissenschaften allgemein als auch in der Geometrie speziell nennen: Erreichen von Grenzen der überkommenen Auffassung, Selbstthematisierung und Historisierung.[38] Insofern scheint sich eine dialektische Beziehung zwischen Geometrie und Naturwissenschaft allgemein abzuzeichnen: Einerseits war der Verlust des Alleinvertretungsanspruchs der klassischen Geometrie förderlich für ähnliche Entwicklungen in der Naturwissenschaft allgemein, andererseits erleichterte der Wahrheitsgewissheitsverlust der Naturwissenschaften auch einen entsprechenden Verzicht in der Geometrie. Dies alles setzt wohlgemerkt voraus, dass man zwischen Geometrie und Naturwissenschaften keine prinzipiellen Unterschiede sieht – was, wie wir gesehen haben, eine wesentliche Neuerung des 19. Jhs. gewesen ist.

Nicht zuletzt sollte man auch sehen, dass sich neue Anwendungsfelder für die Geometrie in dieser Zeit eröffneten. Man denke nur an die Geometrisierung der Kristallographie, die Entstehung der graphischen Statik und die darstellende Geometrie als Universalsprache, in der sich nach dem Willen ihres Schöpfers G. Monge Wissenschaftler, Ingenieure und Arbeiter verständigen können sollten.[39] Der Aufschwung der Industrie schuf einen ungeheuren Bedarf in dieser Richtung; für jeden Neubau brauchte man Pläne und der Eisenbahnbau, das technologische Großprojekt in der zweiten Hälfte des 19. Jhs., verlangte nicht nur eine Trassierung sondern warf auch mathematische Probleme auf – z. B. beim Bau von Kurven. Schließlich schloss das 19. Jh. die letzten weißen Flecke auf der Weltkarte, es schuf riesige Räume, die nach geometrischen Prinzipien vermessen (als Vorstufe zur Beherrschung) und aufgezeichnet wurden. Raum und Zeit wurden in völlig neuartiger Weise verschränkt; zum Beispiel durch die Möglichkeit, telegraphisch in kürzester Zeit riesige Distanzen zu überwinden. Der Unterschied von Zentren und Peripherie be-

[36] Vgl. Jahnke (1990).

[37] Man kann einen Reflex hiervon in der Opposition von Helmholtz' „Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen" zu Riemanns „Hypothesen, die der Geometrie zu Grunde liegen" sehen. Helmholtz selbst war eine zentrale Figur in dieser Entwicklung des Wahrheitsgewissheitsverlustes und hat diese durchaus in seinem eigenen Denken nachvollzogen (vgl. Schiemann 1997). Inwieweit hierbei die Geometrie eine Rolle gespielt hat, lässt sich anscheinend leider nur mutmaßen, vgl. Schiemann (1997), 346–355.

[38] Diese Liste verdanke ich G. Schiemann.

[39] Vgl. Paul (1980).

gann sich zu relativieren; der Raum wurde allmählich homogen und isotrop, wie sich das Helmholtz und andere in der Geometrie längst schon vorstellten.[40] Schließlich brachte das Ende des 19. Jhs. mit der Einführung und massenhaften Verbreitung der Segnungen der Elektrotechnik die wohl folgenreichste technische Revolution der Menschheitsgeschichte überhaupt. Bei all dem spielte die Mathematik eine wichtige wenn auch nicht immer deutlich wahrgenommene kommunikative Rolle:

> Die Mathematik, die übrigens nach etwa 1875 auch zu einer wichtigen Ausdrucksweise der Wirtschaftswissenschaft wurde, und einige natürliche Sprachen von transkontinentaler Verbreitung garantierten die Mobilität wissenschaftlichen Sinnes.
>
> (Osterhammel 2011, 1107–1108)[41]

Zur Terminologie

Im Folgenden wird gelegentlich der Terminus „nichteuklidische Geometrien“ (gelegentlich auch „Alternativgeometrien“ genannt) im weiteren Sinne als Bezeichnung für alle geometrischen Systeme verwandt, welche vom euklidischen Vorbild abweichen – also etwa auch für die Geometrie des vierdimensionalen Raumes. Das entspricht weitgehend der Sichtweise des 19. Jhs. Wenn nicht ausdrücklich gesagt wird nichteuklidische Geometrie aber im engeren Sinne verwendet als Synonym für die hyperbolische Geometrie, eine sehr geschickte Bezeichnung, die von F. Klein 1871 vorgeschlagen wurde, die sich aber erst allmählich durchsetzte. In der nichteuklidischen (hyperbolischen) Geometrie wird der Begriff „Parallelen“ im vorliegenden Text für die beiden ersten nichtschneidenden Geraden zu einer Geraden durch einen nicht auf ihr liegenden Punkt verwendet. Alle anderen Geraden, die die vorgegebene Gerade nicht schneiden, heißen Überparallelen.

Schreibweisen

Die Schreibweisen bei Namen richten sich nach der Schreibweise des „Brockhaus“. Sie erheben keinen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit.

[40] Vgl. Kern (1983).

[41] Mehrere Mathematiker des 19. Jhs. beschäftigten sich übrigens auch mit der Konstruktion einer Universalsprache, so z. B. G. Peano und E. Schröder.

Kapitel 2
Erstes Bekanntwerden

Der Mathematiker kann durch Schlüsse die Gestalt der Bahnen bestimmen, welche die Planeten beschreiben müssten, wenn die Sonne sie im umgekehrten kubischen Verhältnis der Entfernungen anzöge, obgleich es eine solche Anziehung nicht gibt, ja er kann sogar (wie Lobatschewskij in Crelle's Journal XVIII*, 295) die Konsequenz der Voraussetzung eines ebenen Dreiecks, in dem die Winkelsumme weniger als 2R beträgt, untersuchen, obgleich ein solches Dreieck nur imaginär ist.*

(Drobisch 1863, 15–16)

Trotz der Publikationen, die Lobatschewskij gleich in mehreren Sprachen – Russisch, Französisch und Deutsch – und J. Bolyai – in Latein und Deutsch – zwischen 1828 und 1855 vorgelegt hatten, wurde die nichteuklidische Geometrie nicht zur Kenntnis genommen, sondern höchst selten mal als Kuriosum erwähnt. Fleißig wurden immer neue (und natürlich falsche) Beweise des euklidischen Parallelenpostulats publiziert[1]. Erstaunlich wirkt nicht zuletzt, dass selbst Lobatschewskijs Aufsatz „Géométrie imaginaire" in Crelle's Journal, mit vollem Namen „Journal für die reine und angewandte Mathematik", in der Fachöffentlichkeit so gut wie unbemerkt blieb – trotz seines geheimnisvollen Titels und der Tatsache, dass es sich um eine der wichtigsten und verbreitetsten mathematischen Fachzeitschriften ihrer Zeit handelte. Dies änderte sich erst mit Beginn der 1860er Jahre, wobei Gauß' gewaltige Autorität gewissermaßen posthum eine wichtige Rolle spielte. Erste Andeutungen, dass dieser bezüglich der Geometrie nicht nur deren Euklidische Variante für möglich hielt, konnte man dem Gedenkband entnehmen, den Wolfgang Sartorius von Waltershausen, Geologe und Kollege von Gauß in Göttingen, kurze Zeit nach dessen Tod 1856 veröffentlichte.

Dort heißt es:

> Die Geometrie betrachtete Gauß nur als ein konsequentes Gebäude, nachdem die Parallelentheorie als Axiom an der Spitze zugegeben sei; er sei indes zur Überzeugung gelangt, dass dieser Satz nicht bewiesen werde könne, doch wisse man aus der Erfahrung z. B. aus den Winkeln des Dreiecks Brocken, Hohenhage, Inselsberg, dass er näherungsweise richtig ist. Wolle man hingegen das

[1] Vgl. Sommerville (1911).

K. Volkert, *Das Undenkbare denken*, Mathematik im Kontext, DOI 10.1007/978-3-642-37722-8_2,

> genannten Axiom nicht zugeben, so folge daraus eine andere ganz selbständige Geometrie, die er gelegentlich einmal verfolgt und mit dem Namen Antieuklidische Geometrie bezeichnet habe.
>
> Gauß, nach seiner öfters ausgesprochenen innersten Ansicht betrachtete die drei Dimensionen des Raumes als eine spezifische Eigentümlichkeit unserer Seele.
>
> (Waltershausen 1856, 81)

Deutlicher waren die Andeutungen, die der Fachwelt ab 1860 zugänglich wurden, als der umfangreiche Briefwechsel von Gauß mit dem Astronomen H. C. Schumacher in Altona nach und nach veröffentlicht wurde. Es wurde klar, dass Gauß in seinen Briefen recht deutlich zum Ausdruck gebracht hatte, dass er die nichteuklidische Geometrie für möglich halte.

So heißt es in einem Brief von Gauß an Schumacher vom 12. Juli 1831:

> In diesem Sinne enthält die Nicht-Euklidische Geometrie durchaus nichts Widersprechendes, wenn gleich diejenigen [die sie kennen lernen] viele Ergebnisse derselben anfangs für paradox halten müssen, was aber für widersprechend zu halten nur eine Selbsttäuschung sein würde, hervorgebracht von der frühen Gewöhnung, die Euklidische Geometrie für streng wahr zu halten.
>
> (Gauß (1900), VIII, 216 = Stäckel und Engel (1895), 233)

Im Anschluss hieran führt Gauß zwei der paradox erscheinenden Eigenschaft der nichteuklidischen Geometrie an:

- Es gibt keine ähnlichen nicht kongruenten Figuren.
- Es gibt absolut Großes.[2]

Veröffentlicht wurde dieser Brief erstmals 1860 von C. A. F. Peters im zweiten Band der Korrespondenz von Gauß und Schumacher. Bekannt ist, wie Gauß auf die Mitteilung seines Jugendfreundes W. (F.) Bolyai reagierte, in der dieser ihn auf den „Appendix" seines Sohnes hinwies.

Dass aber Gauß auch die Arbeiten Lobatschewskijs kannte, belegt wieder ein Brief an Schumacher, diesmal vom 28.11.1846:

> Ich habe kürzlich Veranlassung gehabt, das Werkchen von Lobatschewskij (Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840, bei G. Funcke. 4 Bogen stark) wieder durchzusehen. Es enthält die Grundzüge derjenigen Geometrie, die stattfinden müsste und strenge konsequent stattfinden könnte, wenn die Euklidische nicht die wahre ist. [...] Materiell für mich Neues habe ich also im Lobatschewskij'schen Werke nicht gefunden, aber die Entwicklung ist auf anderem Wege gemacht, als ich selbst eingeschlagen habe, und zwar von Lobatschewskij auf eine meisterhafte Art in echt geometrischem Geiste.
>
> (Peters (1863), V, 246 = Stäckel und Engel (1895), 235)

Wie wir sehen werden, begleitete der Hinweis auf Gauß fast alle frühen Publikationen zur nichteuklidischen Geometrie.[3] Seine Autorität wurde ins Feld geführt, um die Beschäftigung mit dieser so widerspenstigen neuen Theorie zu rechtfertigen: Wenn Gauß dies tat, dann geht das schon in Ordnung!

Öffentlich ausgesprochen hatte sich Gauß zum Parallelenproblem nur in zwei Buchbesprechungen, welche er (wie 92 andere) für den „Göttinger Gelehrten Anzeiger" 1816

---

[2] Wir würden sagen: Es gibt ein absolutes Längenmaß, d. h. eine Strecke, die eine dem Vollwinkel analoge Rolle übernimmt. Alle Strecken lassen sich auf diese ausgezeichnete Strecke beziehen.

[3] So ließ J. Houël seiner Übersetzung von Lobatschewskij (1840) ins Französische – eine der ersten Publikationen zur nichteuklidischen Geometrie nach Bolyai und Lobatschewskij überhaupt – auch Auszüge aus dem Briefwechsel von Gauß und Schumacher folgen. Vgl. Houël (1866).

und 1822 verfasste.[i] In diesen ging es jeweils um Publikationen, die sich das Ziel gesetzt hatten, das Parallelenpostulat zu beweisen.[4] In der Besprechung von J. C. Schwab und M. Metternich aus dem Jahre 1816 heißt es:

> Es wird wenige Gegenstände im Gebiete der Mathematik geben, über welche so viel geschrieben wäre, wie über die Lücke im Anfange der Geometrie bei Begründung der Theorie der Parallellinien. Selten vergeht ein Jahr, wo nicht irgendein neuer Versuch zum Vorschein käme, diese Lücke auszufüllen, ohne dass wir doch, wenn wir ehrlich und offen reden wollen, sagen könnten, dass wir im Wesentlichen irgend weiter gekommen wären, als Euklides vor 2000 Jahren war. Ein solches aufrichtiges und unumwundenes Geständnis scheint uns der Würde der Wissenschaft angemessener, als das eitle Bemühen, die Lücke, die man nicht ausfüllen kann, durch ein unhaltbares Gewebe von Scheinbeweisen zu verbergen.
>
> (Stäckel und Engel (1895), 220 = Gauß (1880), 364–365)

Im Lichte der späteren Entwicklungen – post festum also – kann man Gauß' Bemerkung über die Lücke, „die man nicht füllen kann" natürlich so lesen, als bringe diese die prinzipielle Unmöglichkeit dieses Vorhabens zum Ausdruck. Sie könnte aber auch bescheidener interpretiert werden als Anmerkung, dass es eben noch niemanden gelungen sei, die fragliche Lücke zu schließen.

Interessant ist folgende Anmerkung von Gauß, in der er auf Kants Philosophie eingeht:

> Ein großer Teil der Schrift dreht sich um die Behauptung gegen Kant, dass die Gewissheit der Geometrie sich nicht auf Anschauung, sondern auf Definitionen und auf das Principium identitatis und das Principium contradictionis gründe. Dass von diesen logischen Hilfsmitteln zur Einkleidung und Verkettung der Wahrheiten in der Geometrie fort und fort Gebrauch gemacht werde, hat wohl Kant nicht leugnen wollen: aber dass dieselben für sich nichts zu leisten vermögen, und nur taube Blüten treiben, wenn nicht die befruchtende lebendige Anschauung des Gegenstandes überall waltet, kann wohl niemand verkennen, der mit dem Wesen der Geometrie vertraut ist.
>
> (Stäckel und Engel (1895), 221 = Gauß (1880), 365–366)

1822 bemerkt dann Gauß:

> Rec. hat bereits vor sechs Jahren in diesen Blättern seine Überzeugung ausgesprochen, dass alle bisherigen Versuche, die Theorie der Parallellinien streng zu beweisen, oder die Lücke in der Euklidischen Geometrie auszufüllen, uns diesem Ziele nicht näher gebracht haben, und kann nicht anders, als dies Urteil auch auf alle späteren ihm bekannt gewordenen Versuche ausdehnen. Inzwischen bleiben doch manche solcher Versuche, obgleich der eigentliche Hauptzweck verfehlt ist, wegen des darin bewiesen Scharfsinns den Freunden der Geometrie lesenswert, und Rec. glaubt in dieser Rücksicht die vorliegende bei Gelegenheit einer Schulprüfung bekannt gemacht kleine Schrift besonders auszeichnen zu müssen.
>
> (Stäckel und Engel (1895), 223–224 = Gauß (1880), 368)

Die Schwierigkeiten – auch fachlicher Art – die selbst hervorragende Mathematiker jener Zeit mit der nichteuklidschen Geometrie hatten, belegt eine Veröffentlichung von Arthur Cayley aus dem Jahre 1865: „Note on Lobatschewsky's imaginary geometry".[ii] Darin stellt Cayley fest, dass man aus Ausdrücken wie

$$\frac{1}{\cos a'} = \cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

[4] J. C. Schwab: Commentatio in primum elementorum Euclidis librum (Stuttgart, 1814), M. Metternich: Vollständige Theorie der Parallel-Linien (Mainz, 1815), C. R. Müller: Theorie der Parallelen (Marburg, 1822). Metternich blieb übrigens durch die Kritik von Gauß unbeeindruckt und veröffentliche 1822 nochmals eine Theorie der Parallel-Linien.

„die man hinschreibt“ (Cayley 1865, 231) Formeln gewinnen kann, die Lobatschewskij im Rahmen seiner nichteuklidischen Geometrie bereits hergeleitet hatte.

In der obigen Gleichung sind „A, B, C reelle positive Winkel $< \frac{1}{2}\pi$“ und „a', b', c' rein imaginär von der Form $p'i$, $q'i$, $r'i$, wobei p', q', r' reelle positive Größen“ sind. Setzt man nun unter der Annahme, dass $A + B + C < \pi$ gilt, ai, bi, ci an Stelle von a, b, c, so erhält man die Beziehung

$$\frac{1}{\cos a'} = \cos ai = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

> Diese Gleichungen sind (wenn wir nur in ihnen $\frac{1}{2}\pi - a'$, $\frac{1}{2}\pi - b'$, $\frac{1}{2}\pi - c'$ an Stelle von a', b', c' schreiben) tatsächlich die Gleichungen, die N. Lobatschewskij, Rektor der Universität von Kasan, in einer weniger symmetrischen Form in seiner merkwürdigen Abhandlung „Géométrie imaginaire“ *Crelle*, vol. XVII (1837), pp. 293–320 angibt. Die Sichtweise des Autors auf diese ist schwer zu verstehen. Er erwähnt, dass er in einer vor fünf Jahren in einer Kasaner wissenschaftlichen Zeitschrift veröffentlichten Arbeit – nachdem er eine neue Theorie der Parallelen entwickelt hat – sich bemüht habe, zu beweisen, dass es lediglich die Erfahrung sei, die uns dazu verpflichtet anzunehmen, dass die Winkelsumme im Dreieck zwei Rechte betrage, und dass eine Geometrie existieren könne – wenn nicht in der Natur, so zumindest in der Rechnung – mit der Hypothese, dass die Winkelsumme kleiner als zwei Rechte sei; [...]
>
> Ich verstehe das nicht; es wäre aber sehr interessant, eine reale geometrische Interpretation des zuletzt erwähnten Gleichungssystem zu finden, [...], das den Gleichungen der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie entspricht.
>
> (Cayley 1865, 231–233)

Arthur Cayley (* Richtmond upon Thames 1821, † Cambridge 1891) Studium der Mathematik in Cambridge (Senior wrangler), danach Tätigkeit als Anwalt in London (in Kooperatioon mit J. J. Sylvester (Versicherungsmakler)), 1863 Ernennung zum Sadlerian Professor der Mathematik in Cambridge. Sehr produktiver Mathematiker, vor allem im Gebiet der Algebra, aber auch geometrische Arbeiten (vgl. Kap. 4).

Für eine erste breitere Bekanntschaft mit der nichteuklidischen Geometrie sorgten im deutschsprachigen Raum 1867 zwei Publikationen: Zum einen der Aufsatz „Ueber den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen“ von J. A. Grunert (1867), und zum andern die überarbeitete zweite Auflage des Buches „Elemente der Mathematik“ von R. Baltzer. Wenden wir uns zuerst dem Aufsatz von Grunert in seinem „Archiv der Mathematik und Physik“ zu.

Johann August Grunert (* Halle 1797, † Greifswald 1872) studierte zuerst Architektur in Halle, wurde dort aber von J. F. Pfaff für die Mathematik begeistert, in der er 1820 promovierte. Zuvor absolvierte er in Göttingen einen Studienaufenthalt, um bei Gauß zu lernen. 1821 bis 1828 war Grunert Lehrer in Torgau, dann in Brandenburg, 1833 wurde er Professor in Greifswald. 1841 gründete Grunert das „Archiv für Mathematik und Physik“, die zweite größere in Deutschland erscheinende mathematische Fachzeitschrift, welche insbesondere die Fachlehrer der Mathematik ansprechen sollte. Er war ein erfolgreicher Lehrbuchautor und gab die letzten Bände des von Klügel begründeten „Mathematischen Wörterbuchs“ heraus sowie zwei Supplementbände dazu. Grunert war ein später Anhänger der im Abstieg begriffenen „kombinatorischen Schule“ (von Hindenburg); seine Liebe zu Formeln (sehr deutlich zu sehen in seinem Beitrag „Dreieck“ im ersten Supplementband zu Klügels „Wörterbuch“) veranlasste O. Schlömilch, ihn in einem Gutachten wegen

„seiner langweiligen Formelmacherei“ einen „Tapetendrucker“ zu nennen (Lorey 1916, 105). 1870 hat Grunert eine analytische Behandlung der Parallelwinkelfunktion von Lobatschewskij veröffentlicht.

XXIV.

Ueber den neuesten Stand der Frage von der Theorie der Parallelen.

Von

dem Herausgeber.

Seit den Zeiten des Euclides hat die Frage von der Theorie der Parallelen die Geometer, wenn auch theilweise mit längeren Unterbrechungen, doch immer wieder von Neuem lebhaft beschäftigt, viele Abhandlungen sind verfasst worden, in denen man diese Versuche gesammelt und einer eingehenden Kritik unterworfen hat. Schon in einer im Jahre 1763 erschienenen verdienstlichen Schrift von Klügel sind achtundzwanzig mehr oder weniger von einander verschiedene Parallelentheorieen gesammelt und beurtheilt worden, und wer wollte alle die übrigen in den verschiedensten Sprachen und Ländern erschienenen Schriften ähnlicher Art aufzählen, die in den seit jener Zeit verflossenen hundert Jahren verfasst worden sind, was am Wenigsten hier mein Zweck und meine Absicht sein kann.

Alle Parallelentheorieen bewegen sich wenigstens zunächst um das berühmte eilfte Axiom des Euclides, dem man allgemein, und gewiss mit vollem Rechte, die zu einem Grundsatze erforderliche Evidenz — was freilich ein etwas schwankender und verschiedener Deutungen fähiger Begriff ist — abgesprochen hat. Bekanntlich ist dieser Satz der folgende:

Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geraden Linie geschnitten werden, und die Summe der beiden inneren auf derselben Seite der schneidenden Linie liegenden Winkel weniger als zwei rechte Winkel beträgt: so müssen die beiden durchschnittenen Linien, genugsam verlängert, auf der Seite der schneidenden Linie, auf welcher die beiden in Rede stehenden Winkel liegen, nothwendig zusammentreffen oder sich schneiden.

Klügel sagt von diesem Satze: „Allerdings kann man dem Satze die Stelle unter den Grundsätzen streitig machen. Dcoh konnte Euclides auch nicht ihn in die Reihe anderer scharf erwiesener Sätze bringen. Er hat ihn also, um einen Ausdruck aus der Kant'schen Philosophie zu borgen, als einen synthetischen Satz a priori unter die Grundsätze gestellt. Der Satz enthält eine Eigenschaft der geraden Linie, welche sie von den krummen unterscheidet, ob man gleich sie nicht aus der Natur derselben durch eine Verbindung mit andern Sätzen herleiten kann, weil sie unmittelbar in ihr liegt. Proklus setzt den Grundsatz unter die Postulate (*αιτηματα*)."

Lässt man den obigen Satz als Grundsatz gelten, so ist in den Elementen des Euclides die Paralleleutheorie unstreitig mit der grössten Einfachheit und aller erforderlichen Strenge und Evidenz dargestellt, dieselbe fällt aber auch gänzlich, wenn man jenen Satz nicht als Grundsatz anerkennt, wobei ich — so bekannt die Sache auch an sich ist — doch hervorzuheben nicht unterlassen will, dass der wesentliche Inhalt der Parallelentheorie sich auf zwei Hauptsätze reducirt, von denen der zweite die Umkehrung des ersten ist; der Beweis des ersten Satzes lässt sich ohne das eilfte euclidische Axiom leicht in aller Strenge führen, was aber von dem umgekehrten Satze nicht gilt, so dass also die eigentliche Schwierigkeit in dem Beweise dieser Umkehrung liegt.

Vielfach hat man an die Stelle der euclidischen Erklärung der Parallelen:

Zwei in einer und derselben Ebene liegende Gerade heissen einander parallel, wenn sie, so weit man sie auch nach beiden Seiten hin verlängern mag, niemals mit einander zusammentreffen oder sich schneiden.

und des eilften Axioms andere Erklärungen und andere mehr oder weniger evidente Grundsätze zu setzen versucht, wodurch aber die Schwierigkeit nicht gehoben, sondern im Wesentlichen immer die alte geblieben ist, wobei man diese Schwierigkeit nur immer in dem nachher genau und bestimmt zu bezeichnenden Sinne aufzufassen hat. Vorzüglich ist aber hervorzuheben, dass die Schwierigkeit in der Theorie der Parallelen mit der Schwierigkeit, einen anderen Satz, nämlich den Satz:

Die Summe der drei Winkel eines jeden ebenen Dreiecks beträgt zwei rechte Winkel.

streng zu beweisen, auf das Genaueste zusammenhängt und auf das Engste verbunden ist. Lässt man das eilfte euclidische Axiom als Grundsatz gelten, so ist der Satz von der Constanz der Summe der drei Winkel des ebenen Dreiecks leicht völlig streng zu beweisen; kann man aber umgekehrt diesen letzteren Satz unabhängig streng beweisen, so lässt sich daraus das euclidische eilfte Axiom mit völliger Evidenz und Strenge ableiten, und die Schwierigkeit in der Theorie der Parallelen ist dann völlig gehoben. Das Eine fällt also mit dem Anderen im Wesentlichen vollständig zusammen.

Will man nun aber überhaupt von einer Schwierigkeit in der Parallelentheorie reden, so scheint es mir vor allen Dingen nöthig zu sein, dass man klar und bestimmt ausspreche, worin man diese Schwierigkeit sucht und findet, weil auch nur dann erst überhaupt die Frage sich aufwerfen lässt, ob und wie dieselbe gehoben werden kann. Dass in verschiedenem Sinne eine Beseitigung derselben möglich ist und sich denken lässt, scheint mir unzweifelhaft zu sein, und es scheint mir hier selbst einer derjenigen Punkte vorzuliegen, wo Mathematik und Philosophie an einander streifen und sich berühren; ich bin auch überzeugt, dass mancher Philosoph kopfschüttelnd sich wundern wird, wie der Mathematiker überhaupt bei diesen Dingen eine Schwierigkeit finden kann, die nach seiner Ansicht vielleicht gar nicht vorhanden oder wenigstens leicht zu heben und zu beseitigen ist, eine Ansicht, die — bei den möglichen verschiedenen Auffassungsweisen — wohl auch nicht ohne alle Berechtigung sein und alles Grundes entbehren dürfte.

Deshalb will ich die hier zur Sprache kommende Frage, wie ich dieselbe von jetzt an in diesem Aufsatze auffassen werde, in möglichst bestimmter Weise wie folgt präcisiren und aussprechen:

Lässt sich, unter Zugrundelegung der euclidischen Definition der Parallelen, mit Hülfe der niemals angefochtenen und angezweifelten Grundsätze des Euclides, aber mit Ausschluss des eilften unter denselben, ferner mit Hülfe der ohne dieses Axiom in aller Strenge beweisbaren und bewiesenen Propositionen I. bis XXVI. des ersten Buchs der Elemente des Euclides die Lehre von den Parallelen in aller Strenge begründen oder nicht?

In neuerer Zeit hat die Beantwortung dieser früher so vielfach discutirten Frage, wie es scheint, eine längere Reihe von Jahren geruhet oder ist wenigstens gegen früher sehr in den

Hintergrund getreten; ja die französische Akademie der Wissenschaften soll sich einmal die Zusendung neuer Parallelentheorieen Behufs ihrer Beurtheilung Seitens der Akademie in einer besonderen Bekanntmachung förmlich verbeten haben. Als nun aber Professor Peters in Altona neuerlichst durch die Veröffentlichung des so vieles Interessante enthaltenden Briefwechsels zwischen Gauss und Schumacher sich ein so wesentliches, nicht genug anzuerkennendes Verdienst erworben hatte, fand man, dass die Frage von der Parallelentheorie auch zwischen diesen beiden trefflichen Männern einmal lebhaft discutirt und ventilirt worden war. Die nächste Veranlassung zu dieser lebhaften Discussion hatte Schumacher gegeben, Gauss sprach sich mit seiner überall hervortretenden Superiorität in bestimmtester Weise über die schon oft aufgeworfene Frage aus, und liess auch nicht unerwähnt, dass dieselbe schon seit einer langen Reihe von Jahren der Gegenstand seines eifrigsten Nachdenkens gewesen sei. Zugleich erinnerte Gauss mit vielem Lobe an eine nunmehr schon vor fast dreissig Jahren erschienene Schrift des als Professor in Kasan verstorbenen russischen Mathematikers Nicolaus Lobatschewsky, mit deren Inhalt er sich im Wesentlichen ganz einverstanden erklärte. Ausserdem fand man, dass noch früher als Lobatschewsky der ungarische Mathematiker Bolyai, Farkas *), und auch sein Sohn J. Bolyai sich vielfach und gründlich mit der Theorie der Parallelen beschäftigt und ähnliche Ideen ausgesprochen hatten, so dass also diese neueren Ansichten vorzugsweise auf den älteren Bolyai, einen Freund von Gauss, zurückzuführen sein dürften, und dessen Name daher, wie es scheint, hauptsächlich genannt und der Nachwelt erhalten werden muss, wenn von den sich jetzt geltend zu machen suchenden neueren Ansichten über die Parallelentheorie die Rede ist.

Die Schriften von Bolyai und Lobatschewsky waren schon fast ganz der Vergessenheit anheim gefallen, und haben es wohl hauptsächlich den Bemerkungen von Gauss zu danken, dass sie jetzt wieder, ihrem unbestreitbaren Werthe gemäss, an's Licht gezogen worden sind.

Hiebei ist auch noch besonders hervorzuheben, dass Professor Hoüel in Bordeaux sich die Mathematiker zu besonderem Danke dadurch verpflichtet hat, dass er von der Schrift von Lobatschewsky, in Verbindung mit den zwischen Gauss und Schumacher gewechselten Briefen, eine französische Uebersetzung unter dem Titel:

---

*) Die Vornamen werden nachgesetzt.

der Frage von der Theorie der Parallelen. 311

Études géométriques sur la théorie des parallèles par N. J. Lobatschewsky; traduit de l'Allemand par J. Hoüel. Suivi d'un extrait de la Correspondance de Gauss et de Schumacher. Paris. Gauthier-Villars. 1866. 8°.

veröffentlicht hat, wozu neuerlichst noch die so eben unter dem Titel:

Essai critique sur les principes fondamentaux de la Géométrie élémentaire, ou Commentaire sur les XXXII premières propositions des Éléments d'Euclide, par J. Hoüel. Paris. Gauthier-Villars. 1867. 8°.

erschienene Schrift gekommen ist, welche wir der Beachtung der Mathematiker recht sehr empfehlen. In der besonderen Note VI.

(Grunert 1867, 307–311)

Die historischen Ausführungen Grunerts, insbesondere seine Einschätzung der Rolle von F. Bolyai, sind aus heutiger Sicht so nicht haltbar; wir werden auf die Frage nach der Urheberschaft für die nichteuklidische Geometrie noch mehrfach zurück kommen.

Im nachfolgenden Text behandelt Grunert sorgfältig die beiden ersten Legendreschen Sätze (das sind die Sätze A und B im untenstehenden Auszug), wobei er sich auf die 11. Auflage von dessen „Eléments de géométrie" (1817) bezieht, in der sich erstmals diese Variante der Parallelentheorie fand. Die Konklusion hiervon ist bei Grunert, dass zwei Geometrien prinzipiell möglich sind, eine, in der die Winkelsumme in allen Dreiecken konstant 180° beträgt (die traditionelle Euklidische eben), und eine, in der die Winkelsumme in allen Dreiecken kleiner als 180° ist (variabel zwischen 0° und 180°). Bemerkenswert und typisch für seine Zeit ist Grunerts Fazit: Die Entscheidung zwischen diesen beiden Alternativen ist eine Frage der Erfahrung!

So hätten wir denn nun, wie wir glauben, mit Euklidischer Strenge zweierlei bewiesen, nämlich:

A. Die Summe der drei Winkel eines ebenen Dreiecks kann nicht grösser sein als zwei rechte Winkel, dieselbe kann nur eben so gross oder kleiner als zwei rechte Winkel sein.

B. Wenn nur in irgend **einem** ebenen Dreiecke die Summe der drei Winkel zwei rechte Winkel beträgt, so beträgt in völliger Allgemeinheit in allen ebenen Dreiecken, ohne alle Ausnahme, die Summe der drei Winkel zwei rechte Winkel, und ist also eine den Werth $2R$ habende constante Grösse.

Wo ist denn nun aber oder welches ist denn nun das Individuum der ebenen Dreiecke, von dem man a priori mit euclidischer Strenge, bloss mit Hülfe der euclidischen Grundsätze, natürlich mit völliger Ausschliessung des berühmten eilften Axioms, beweisen kann, dass die Summe seiner drei Winkel genau zwei rechte Winkel beträgt? Bis jetzt ist kein solches Individuum gefunden worden, Keinem ist es gelungen, den in Rede stehenden Beweis auf die angegebene Weise auch nur für ein einziges ebenes Dreieck zu führen; wie die Sache jetzt liegt, sind nur ebene Dreiecke mit einer zwei rechte Winkel übersteigenden Winkelsumme unmöglich, gleich möglich dagegen sind ebene Dreiecke mit Winkelsummen, die gleich zwei rechten Winkeln oder kleiner als zwei rechte Winkel sind; es ist aber auch nach den vorher bewiesenen Sätzen entweder in allen ebenen Dreiecken die Winkelsumme gleich zwei rechten Winkeln, oder in allen ebenen Dreiecken die Winkelsumme kleiner als zwei rechte Winkel; und da scheinen sich nun, um hierüber zur Entscheidung zu kommen, die Ansichten der neueren Geometer, und zwar zum Theil sehr gewichtiger Stimmen, darin zu vereinigen, dass die apriorische theoretische Betrachtung mit dem Obigen ihre Endschaft erreicht habe, und nichts Anderes übrig bleibe, als die Erfahrung zu befragen. Also die Geometrie doch wenigstens in **einem** Punkte eine Erfahrungswissenschaft!! In allen ebenen Dreiecken aber, deren Winkel bis jetzt mit den genauesten und vollkommensten winkelmessenden Instrumenten gemessen worden sind, hat sich die Summe der Winkel jederzeit mit der grössten Annäherung gleich zwei rechten Winkeln, nahezu in gleich vielen Fällen etwas kleiner oder etwas grösser als zwei rechte Winkel, ergeben; auch haben sich die Abweichungen der gemessenen Winkelsummen von zwei rechten Winkeln stets desto kleiner herausgestellt, dieselben sind jederzeit der Null desto näher gekommen, je vollkommener die angewandten Messinstrumente waren; je genauer die Winkel auf ihren

> 320 *Grunert: Ueber den neuesten Stand*
>
> Limben und Nonien sich ablesen liessen; je mehr Sorgfalt man auf die Messungen verwandte; je günstiger die Umstände, unter denen die Messungen angestellt wurden, waren; von je weniger störenden äusseren Einflüssen dieselben afficirt wurden. Man bilde sich nur ein einziges ebenes Dreieck von einer der Winkelmessung besonders günstigen Form, warte die Messung besonders begünstigende Umstände ab und messe die Winkel mit der grössten Sorgfalt und mit den genauesten Instrumenten, welche die mechanische Kunst herzustellen im Stande ist, so wird man alles Obige vollkommen bestätigt finden, wie die Erfahrung schon in der vielfachsten Weise gelehrt hat. Also giebt es erfahrungsmässig ebene Dreiecke, deren Winkelsummen mit der allergrössten Annäherung zwei rechte Winkel betragen, wodurch wir uns nun nach den oben in aller Strenge a priori bewiesenen Sätzen für berechtigt halten müssen, wenigstens mit der grössten Wahrscheinlichkeit — aber mehr dürfen wir auch zur Zeit für unsere Behauptung nicht beanspruchen — den Satz:
>
> 1. In jedem ebenen Dreiecke ist die Winkelsumme gleich zwei rechten Winkeln.
>
> auszusprechen, und auf diesem Fundamente das weitere Gebäude der Geometrie aufzuführen. Einige weitere Bemerkungen über diesen Gegenstand wird man am Ende dieser Abhandlung finden.

(Grunert 1867, 319f)

Diese Position wird heute als die empiristische bezeichnet; als Paradebeispiel für sie diente oft Gaußens Vermessung (1823) des großen Dreiecks Brocken–Inselsberg–Hoherhagen. Dabei wurde unterstellt – Gauß selbst hat sich hierzu niemals klar geäußert – dass der Prinz der Mathematiker auf diesem Wege herausfinden wollte, ob die Winkelsumme im Dreieck von 180° signifikant abweichen kann.[iii] In den Anfängen der nichteuklidischen Geometrie wurde (noch) nicht deutlich unterschieden zwischen dem mathematischen und dem physikalischen Raum, nur der letztere lässt sich natürlich vermessen. Die empiristische Auffassung bekam weiteren Aufwind durch die Entdeckung E. Beltramis (vgl. Kap. 3), dass sich die nichteuklidische Geometrie als solche einer Fläche mit konstanter negativer Krümmung modellieren lässt (die Euklidische entspricht dem Fall konstant verschwindender Krümmung). Also läuft das Problem darauf hinaus, diese konstante Krümmung zu bestimmen: Werte von Konstanten zu bestimmen ist aber landläufig betrachtet eine typische Aufgabe des Messens.[iv]

Grunert scheint ein größeres Interesse an der Parallelenfrage gehabt zu haben, denn er publizierte bereits 1863 eine lange Arbeit von Jules Houël in französischer Sprache in seiner Zeitschrift mit dem Titel „Versuch einer vernünftigen Darlegung der Grundprinzipien der Elementargeometrie“[5], in der sich dieser kritisch mit Beweisversuchen auseinander setzte:

[5] Houël (1863). Kritische Stimmen finden sich schon hin und wieder im 18. Jh., wie z. B. W. Karsten: „Und da mich dieses veranlasst hat, die Sache nochmals zu überdenken, so fange ich an, zu glauben, dass