

Kontaktmechanik und Reibung



Prof. Dr. rer. nat. Valentin L. Popov

studierte Physik und promovierte an der staatlichen Lomonosow-Universität Moskau. Er habilitierte am Institut für Festigkeitsphysik und Werkstoffkunde der Russischen Akademie der Wissenschaften. Nach einer Gastprofessur im Fach Theoretische Physik an der Universität Paderborn leitet er seit 2002 das Fachgebiet Systemdynamik und Reibungsphysik am Institut für Mechanik der Technischen Universität Berlin. Seine Arbeitsgebiete sind unter anderem: Tribologie, Nanotribologie, Tribologie bei tiefen Temperaturen, Biotribologie, Beeinflussung der Reibung durch Ultraschall, numerische Simulation der Reibungsprozesse, Erdbebenforschung sowie materialwissenschaftliche Themen: Mechanik elastoplastischer Medien mit Mikrostruktur, Festigkeit von Metallen und Legierungen, Formgedächtnislegierungen. Er ist Mitherausgeber internationaler Zeitschriften und Organisator regelmäßig stattfindender internationaler Konferenzen und Workshops zu diversen tribologischen Themen.

V. L. Popov

Kontaktmechanik und Reibung

Ein Lehr- und Anwendungsbuch von
der Nanotribologie bis zur numerischen
Simulation

 Springer

Professor Dr. Valentin Popov
TU Berlin
Institut für Mechanik
Strasse des 17. Juni 135
10623 Berlin
v.popov@tu-berlin.de

ISBN 978-3-540-88836-9

e-ISBN 978-3-540-88837-6

DOI 10.1007/978-3-540-88837-6

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2009 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandgestaltung: eStudio Calamar S.L.

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

Vorwort

Wer sich in das Fach Kontaktmechanik und Reibungsphysik vertieft, wird schnell feststellen, dass es wohl kaum ein anderes Gebiet gibt, das derart interdisziplinär, spannend und faszinierend ist. Es verbindet Wissen aus Gebieten wie Elastizitäts- und Plastizitätstheorie, Viscoelastizität, Werkstoffwissenschaften, Strömungslehre – auch von nicht Newtonschen Flüssigkeiten – Thermodynamik, Elektrodynamik, Systemdynamik und vielen mehr. Kontaktmechanik und Reibungsphysik finden zahlreiche Anwendungen – von der Mess- und Systemtechnik auf der Nanoskala über das schier unübersichtliche Gebiet der klassischen Tribologie bis hin zur Erdbebendynamik. Wer Kontaktmechanik und Reibungsphysik studiert und verstanden hat, hat sich damit einen umfassenden Überblick über verschiedene Methoden angeeignet, die in den Ingenieurwissenschaften angewandt werden.

Ein Ziel des vorliegenden Buches ist es, die wichtigsten Aspekte dieses Faches in einem Werk zusammenzufassen und ihre Zusammenhänge auf übersichtliche und klare Weise darzustellen. Zu diesen Aspekten gehört zunächst die gesamte „eigentliche Kontaktmechanik“, einschließlich Adhäsion und Kapillarität, dann die Theorie der Reibung auf der Makroskala, Schmierung, Grundlagen der modernen Nanotribologie, systemdynamische Aspekte von Maschinen mit Reibung (reiberregte Schwingungen), Reibung von Elastomeren und Verschleiß. Das Zusammenspiel dieser Teilaspekte kann im Einzelfall sehr kompliziert sein. In praktischen Problemen kommen verschiedene Aspekte in immer neuen Konstellationen vor. Zur Lösung von tribologischen Problemen gibt es daher keine einfachen Rezepte. Das einzig universelle Rezept ist, dass man das System zunächst aus tribologischer Sicht verstehen muss. Ein Ziel des Buches ist, dieses Verständnis zu vermitteln.

Es ist die feste Überzeugung des Autors, dass die wesentlichen Aspekte der Kontaktmechanik und Reibungsphysik viel einfacher sind, als es oft zu sein scheint. Beschränkt man sich auf qualitative Abschätzungen, so ist es möglich, ein umfassendes qualitatives Verständnis der Kontaktmechanik und Reibungsphysik in ihren unzähligen Facetten zu erreichen. Die *qualitativen Abschätzungen* haben in dem Buch daher einen hohen Stellenwert.

Bei den *analytischen Berechnungen* beschränken wir uns auf wenige klassische Beispiele, die es aber erlauben, nach dem Baukasten-Prinzip eine Fülle von anwendungsnahen Problemen zu verstehen und zu berechnen.

Eine Großzahl von konkreten tribologischen Fragestellungen – besonders wenn es um feine Optimierung von tribologischen Systemen geht – sind in analytischer Form nicht berechenbar. Das Buch bietet daher auch eine Übersicht über *numerische Simulationsmethoden* in der Kontaktmechanik und Reibungsphysik. Besonders ausführlich wird auf eine Methode eingegangen, die eine Synthese von mehreren kontaktmechanischen Prozessen auf verschiedenen räumlichen Skalen in einem Simulationsmodell erlaubt.

Auch wenn das vorliegende Buch vor allem ein *Lehrbuch* ist, kann es als ein Nachschlagewerk für die Grundlagen der vorgestellten Gebiete dienen. Mit diesem Ziel werden neben theoretischen Grundlagen auch viele Spezialfälle behandelt. Diese sind im Buch als Aufgaben zu den jeweiligen Kapiteln zusammengefasst. Alle Aufgaben sind mit einer Lösung versehen, die einen allgemeinen Leitfaden sowie die Ergebnisse darstellt.

Dieses Lehrbuch entstand auf der Basis einer vom Autor gehaltenen Vorlesung über Kontaktmechanik und Reibungsphysik an der Technischen Universität Berlin und ist so konzipiert, dass das ganze Material in einem oder zwei Semestern – abhängig von der Tiefe der Durcharbeitung des Materials – vollständig durchzuarbeiten und zu beherrschen ist.

Danksagung

Dieses Buch wäre nicht ohne die tatkräftige Unterstützung meiner Kollegen entstanden. Mehrere Mitarbeiter des Fachgebietes „Systemdynamik und Reibungsphysik“ am Institut für Mechanik haben zur Entwicklung der Übungsaufgaben beigetragen. Dafür danke ich Dr. M. Schargott, Dr.-Ing. T. Geike, Dipl.-Ing. M. Heß und Frau Dr.-Ing. Starcevic. Einen ganz herzlichen Dank möchte ich Frau Dr.-Ing. J. Starcevic aussprechen für Ihre umfangreiche Unterstützung beim Verfassen des Buches sowie Herrn Dipl.-Ing. M. Heß, der alle Gleichungen im Buch nachgerechnet und zahlreiche Fehler korrigiert hat. Frau Ch. Koll danke ich für Ihre Geduld bei der Erstellung von Bildern und M. Popov und Dr.-Ing. G. Putzar für die Hilfe beim Korrekturlesen.

Dem Dekan der Fakultät V „Verkehrs- und Maschinensysteme“ Professor Dr. V. Schindler danke ich für die Gewährung eines Forschungssemesters, während dessen das Buch fertig gestellt wurde.

Berlin, im Oktober 2008

V. L. Popov

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Kontakt- und Reibungsphänomene und ihre Anwendung	1
1.2	Zur Geschichte der Kontaktmechanik und Reibungsphysik	3
1.3	Aufbau des Buches	7
2	Qualitative Behandlung des Kontaktproblems – Normalkontakt ohne Adhäsion	9
2.1	Materialeigenschaften	10
2.2	Einfache Kontaktaufgaben	13
2.3	Qualitative Abschätzungsmethode für Kontakte mit einem dreidimensionalen elastischen Kontinuum	17
	Aufgaben	21
3	Qualitative Behandlung eines adhäsiven Kontaktes	25
3.1	Physikalischer Hintergrund	26
3.2	Berechnung der Adhäsionskraft zwischen gekrümmten Oberflächen	30
3.3	Qualitative Abschätzung der Adhäsionskraft zwischen elastischen Körpern	31
3.4	Einfluss der Rauigkeit auf Adhäsion	33
3.5	Klebeband	34
3.6	Weiterführende Informationen über van-der-Waals-Kräfte und Oberflächenenergien	35
	Aufgaben	36
4	Kapillarkräfte	41
4.1	Oberflächenspannung und Kontaktwinkel	41
4.2	Hysterese des Kontaktwinkels	45
4.3	Druck und Krümmungsradius der Oberfläche	45
4.4	Kapillarbrücken	46
4.5	Kapillarkraft zwischen einer starren Ebene und einer starren Kugel ..	47
4.6	Flüssigkeiten auf rauen Oberflächen	48

4.7	Kapillarkräfte und Tribologie	49
	Aufgaben	50
5	Rigorese Behandlung des Kontaktproblems – Hertzscher Kontakt	57
5.1	Deformation eines elastischen Halbraumes unter der Einwirkung von Oberflächenkräften	58
5.2	Hertzsche Kontakttheorie	61
5.3	Kontakt zwischen zwei elastischen Körpern mit gekrümmten Oberflächen	63
5.4	Kontakt zwischen einem starren kegelförmigen Indenter und dem elastischen Halbraum	65
5.5	Innere Spannungen beim Hertzschen Kontakt	66
	Aufgaben	69
6	Rigorese Behandlung des Kontaktproblems – Adhäsiver Kontakt	73
6.1	JKR-Theorie	74
	Aufgaben	79
7	Kontakt zwischen rauen Oberflächen	83
7.1	Modell von Greenwood und Williamson	84
7.2	Plastische Deformation von Kontaktspitzen	89
7.3	Elektrische Kontakte	91
7.4	Thermische Kontakte	94
7.5	Mechanische Steifigkeit von Kontakten	95
7.6	Dichtungen	95
7.7	Rauheit und Adhäsion	97
	Aufgaben	97
8	Tangentiales Kontaktproblem	103
8.1	Deformation eines elastischen Halbraumes unter Einwirkung von Tangentialkräften	104
8.2	Deformation eines elastischen Halbraumes unter Einwirkung von Tangentialspannungsverteilungen	105
8.3	Tangentiales Kontaktproblem ohne Gleiten	107
8.4	Tangentiales Kontaktproblem unter Berücksichtigung des Schlupfes	109
8.5	Abwesenheit des Schlupfes bei einem starren zylindrischen Stempel	112
	Aufgaben	112
9	Rollkontakt	117
9.1	Qualitative Diskussion der Vorgänge in einem Rollkontakt	118
9.2	Spannungsverteilung im stationären Rollkontakt	120
	Aufgaben	126

10 Das Coulombsche Reibungsgesetz 131

10.1 Einführung 131

10.2 Haftreibung und Gleitreibung 132

10.3 Reibungswinkel 133

10.4 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Kontaktzeit 134

10.5 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Normalkraft 136

10.6 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der
Gleitgeschwindigkeit 137

10.7 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der
Oberflächenrauheit 137

10.8 Vorstellungen von Coulomb über die Herkunft des
Reibungsgesetzes 139

10.9 Theorie von Bowden und Tabor 140

10.10 Abhängigkeit des Reibungskoeffizienten von der Temperatur 143

Aufgaben 144

11 Das Prandtl-Tomlinson-Modell für trockene Reibung 153

11.1 Einführung 153

11.2 Grundeigenschaften des Prandtl-Tomlinson-Modells 155

11.3 Elastische Instabilität 159

11.4 Supergleiten 163

11.5 Nanomaschinen: Konzepte für Mikro- und Nanoantriebe 164

Aufgaben 169

12 Reiberregte Schwingungen 173

12.1 Reibungsinstabilität bei abfallender Abhängigkeit der
Reibungskraft von der Geschwindigkeit 174

12.2 Instabilität in einem System mit verteilter Elastizität 177

12.3 Kritische Dämpfung und optimale Unterdrückung des
Quietschens 179

12.4 Aktive Unterdrückung des Quietschens 181

12.5 Festigkeitsaspekte beim Quietschen 184

12.6 Abhängigkeit der Stabilitätsbedingungen von der Steifigkeit
des Systems 185

12.7 Sprag-Slip 190

Aufgaben 191

13 Thermische Effekte in Kontakten 197

13.1 Einführung 198

13.2 Blitztemperaturen in Mikrokontakten 198

13.3 Thermomechanische Instabilität 200

Aufgaben 202

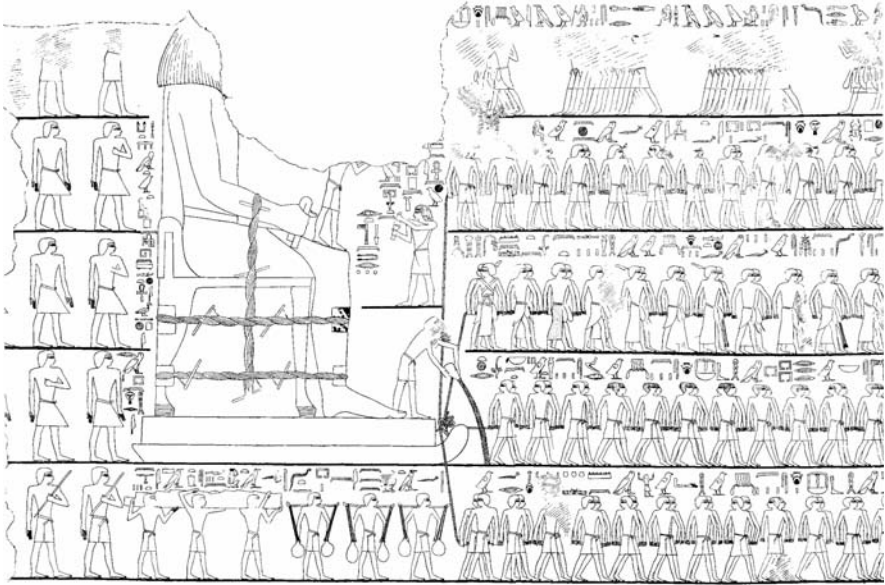
14 Geschmierte Systeme 205

14.1 Strömung zwischen zwei parallelen Platten 206

14.2	Hydrodynamische Schmierung	207
14.3	„Viskose Adhäsion“	211
14.4	Rheologie von Schmiermitteln	214
14.5	Grenzschichtschmierung	216
14.6	Feste Schmiermittel	217
	Aufgaben	218
15	Viskoelastische Eigenschaften von Elastomeren	223
15.1	Einführung	223
15.2	Spannungsrelaxation in Elastomeren	224
15.3	Komplexer, frequenzabhängiger Schubmodul	226
15.4	Eigenschaften des komplexen Moduls	228
15.5	Energiedissipation in einem viskoelastischen Material	229
15.6	Messung komplexer Module	230
15.7	Rheologische Modelle	231
15.8	Ein einfaches rheologisches Modell für Gummi („Standardmodell“)	234
15.9	Einfluss der Temperatur auf rheologische Eigenschaften	236
15.10	Masterkurven	237
15.11	Prony-Reihen	239
	Aufgaben	242
16	Gummireibung und Kontaktmechanik von Gummi	245
16.1	Reibung zwischen einem Elastomer und einer starren rauen Oberfläche	245
16.2	Rollwiderstand	251
16.3	Adhäsiver Kontakt mit Elastomeren	254
	Aufgaben	256
17	Verschleiß	263
17.1	Einleitung	263
17.2	Abrasiver Verschleiß	264
17.3	Adhäsiver Verschleiß	267
17.4	Bedingungen für verschleißarme Reibung	270
17.4	Verschleiß als Materialtransport aus der Reibzone	272
17.6	Verschleiß von Elastomeren	273
	Aufgaben	275
18	Reibung unter Einwirkung von Ultraschall	277
18.1	Einfluss von Ultraschall auf die Reibungskraft aus makroskopischer Sicht	278
18.2	Einfluss von Ultraschall auf die Reibungskraft aus mikroskopischer Sicht	283
18.3	Experimentelle Untersuchungen der statischen Reibungskraft als Funktion der Schwingungsamplitude	285
	Aufgaben	287

19 Numerische Simulationsmethoden in der Reibungsphysik	291
19.1 Kontakt- und Reibungsproblematik in verschiedenen Simulationsmethoden: Eine Übersicht	292
19.1.1 Mehrkörpersysteme	292
19.1.2 Finite Elemente Methode	293
19.1.3 Teilchenmethoden	294
19.2 Reduktion von dreidimensionalen Kontaktaufgaben auf eindimensionale	294
19.3 Kontakt in einem makroskopischen tribologischen System	295
19.4 Reduktionsmethode für ein Mehrkontaktproblem	300
19.5 Dimensionsreduktion und viskoelastische Eigenschaften	305
19.6 Abbildung von Spannungen im Reduktionsmodell	305
19.7 Das Berechnungsverfahren in der Reduktionsmethode	307
19.8 Adhäsion, Schmierung, Kavitation und plastische Deformation bei der Reduktionsmethode	307
Aufgaben	307
Anhang	313
Weiterführende Literatur	317
Bildernachweis	323
Sachverzeichnis	325

1 Einführung



1.1 Kontakt- und Reibungsphänomene und ihre Anwendung

Kontaktmechanik und Reibungsphysik sind grundlegende ingenieurwissenschaftliche Disziplinen, die für einen sicheren und energiesparenden Entwurf technischer Anlagen unabdingbar sind. Sie sind von Interesse für unzählige Anwendungen, wie zum Beispiel Kupplungen, Bremsen, Reifen, Gleit- und Kugellager, Verbrennungsmotoren, Gelenke, Dichtungen, Umformung, Materialbearbeitung, Ultraschallschweißen, elektrische Kontakte und viele andere. Ihre Aufgaben reichen vom Festigkeitsnachweis von Kontakt- und Verbindungselementen über die Beeinflussung von Reibung und Verschleiß durch Schmierung oder Materialdesign bis hin zu Anwendungen in der Mikro- und Nanosystemtechnik. Reibung ist ein Phänomen, das die Menschen über Jahrhunderte und Jahrtausende interessiert hat und auch jetzt noch im Zentrum der Entwicklung neuer Produkte und Technologien steht.

Ein klassisches Beispiel für einen Kontakt ist ein Rad-Schiene-Kontakt, bei dem vor allem die Materialfestigkeitsaspekte und die Kraftübertragungseigenschaften von Interesse sind. Kontakte können zur Übertragung von mechanischen Kräften (Schrauben), elektrischem Strom oder Wärme dienen bzw. einen Materialstrom verhindern (Dichtungen). Aber auch der Kontakt zwischen einer Spitze eines Atomkraftmikroskops und der Unterlage oder ein Kontakt zwischen zwei tektonischen Platten sind Beispiele für Reibkontakte. Kontakt- und Reibungsphä-

nomene auf verschiedenen Skalen – von der Nano- bis zur Megaskala haben viel Gemeinsames und können mit ähnlichen Methoden behandelt werden. Kontaktmechanik und Reibungsphysik erweisen sich daher als ein riesiges Gebiet moderner Forschung und Technologie, das von der Bewegung von Motorproteinen und der Muskelkontraktion über die fast unüberschaubare klassische Tribologie bis hin zur Erdbebendynamik und -beeinflussung reicht.

Reibung führt zur Energiedissipation, und die in den Kontaktbereichen immer existierenden extremen Spannungen führen zum Mikrobruch und Verschleiß von Oberflächen. Oft wird angestrebt, die Reibung zu minimieren, um technische Anlagen auf diese Weise energiesparender zu gestalten. Es gibt aber auch viele Situationen, in denen Reibung erforderlich ist. Ohne Reibung könnten wir weder Geigenmusik genießen, noch gehen oder Auto fahren. In unzähligen Fällen soll die Reibung maximiert statt minimiert werden, wie zum Beispiel zwischen Reifen und Straße beim Bremsen. Auch der Verschleiß muss bei weitem nicht immer minimiert werden. Bei der Materialbearbeitung und in der Fertigung kann ein schneller und vor allen Dingen steuerbarer Verschleiß die Grundlage eines technologischen Prozesses sein (z.B. Schleifen, Polieren, Sandstrahlbearbeitung).

Eng mit Reibung und Verschleiß ist auch das Phänomen der Adhäsion verbunden. Dabei kommt es darauf an, inwieweit es uns gelingt, einen intimen, engen Kontakt zwischen zwei Oberflächen zu erreichen. Während in einem makroskopischen Kontakt von „harten Körpern“ (wie Metalle oder Holz) Adhäsion keine nennenswerte Rolle spielt, ist sie im Kontakt, in dem einer der Körper sehr weich ist, sehr wohl spürbar und wird in verschiedenen Haftenrichtungen benutzt. Auch für die Anwendung von Klebern (engl. adhesives) kann man von der Kontaktmechanik viel lernen. In der Mikrotechnik gewinnt Adhäsion noch einmal an Bedeutung: Reibungs- und Adhäsionskräfte stellen in der Mikrowelt ein echtes Problem dar und werden sogar zu einem Begriff zusammengefasst – Sticktion ("sticking" und "friction").

Ein weiteres Phänomen, das mit Adhäsion verwandt ist und in dem vorliegenden Buch diskutiert wird, sind die Kapillarkräfte, die in Kontakten mit geringen Flüssigkeitsmengen auftreten. Bei hochpräzisen Mechanismen wie Uhrwerken reicht bereits die in der Luft enthaltende Feuchtigkeit um Kapillarkräfte zu verursachen, die die Genauigkeit der Uhr massiv stören. Kapillarkräfte können aber auch zur Steuerung des Zuflusses von Schmierung zu den Reibstellen benutzt werden.

In einem Buch über Kontakt und Reibung kann man die oft mit der Reibung zusammenhängenden Geräuschphänomene nicht stillschweigend übergehen. Bremsen, Rad-Schiene-Kontakte und Lager dissipieren nicht nur Energie und Material. Oft quietschen und kreischen sie auch unangenehm oder sogar Gehör schädigend. Der von technischen Systemen verursachte Lärm ist eines der zentralen Probleme heutiger Ingenieurlösungen. Die reiberregten Schwingungen hängen sehr eng mit den Eigenschaften der Reibungskräfte zusammen und sind ebenfalls Gegenstand des vorliegenden Buches.

Wenn wir die Wichtigkeit eines tribologischen Gebietes am Geld messen würden, welches in die entsprechenden Ingenieurlösungen investiert wird, so würde

die Schmierungstechnik bestimmt den ersten Platz einnehmen. Es ist leider nicht möglich, der Schmierung einen entsprechend großen Platz in diesem Buch einzuräumen. Die Grundlagen der hydrodynamischen Schmierung sind aber selbstverständlich ein Gegenstand des Buches.

In der Kontaktmechanik und in der Reibungsphysik geht es letztendlich um unsere Fähigkeit, die Reibungs-, Adhäsions- und Verschleißvorgänge zu beherrschen und nach unseren Wünschen zu gestalten. Dafür ist ein eingehendes Verständnis der Abhängigkeit der Kontakt-, Reibungs- und Verschleißphänomene von Material- und Systemeigenschaften erforderlich.

1.2 Zur Geschichte der Kontaktmechanik und Reibungsphysik

Einen ersten Eindruck über tribologische Anwendungen und ihre Bedeutung kann die Geschichte der Tribologie vermitteln. Den Begriff „*Tribologie*“ hat Peter Jost im Mai 1966 als Bezeichnung des Forschungs- und Ingenieursgebietes vorgeschlagen, welches sich mit Kontakt, Reibung, Schmierung und Verschleiß beschäftigt. Anders als diese Bezeichnung ist die Tribologie selbst uralte. Ihre Anfänge verlieren sich in der geschichtlichen Ferne. Gewinnung von Feuer durch Reibwärme, Entdeckung des Rades und des Gleitlagers, Benutzung von Flüssigkeiten zur Verminderung der Reibungskräfte und des Verschleißes – all diese „tribologischen Erfindungen“ wurden bereits Jahrtausende vor Christus bekannt¹. In unserer kleinen Übersicht der Geschichte der Tribologie überspringen wir die bis zur Renaissance stattgefundenen Entwicklungen und beginnen mit dem Beitrag von *Leonardo da Vinci*.

In seinem Codex-Madrid I (1495) beschreibt da Vinci das von ihm erfundene Kugellager, die Zusammensetzung einer reibungsarmen Legierung sowie seine experimentellen Untersuchungen der Reibungs- und Verschleißphänomene. Er war der erste Ingenieur, der belastbare quantitative Reibungsgesetze formuliert hat. Da Vinci gelangte zu den Erkenntnissen, die man in der heutigen Sprache über zwei grundlegende Reibungsgesetze ausdrücken kann:

1. Die Reibungskraft ist proportional zur Belastung.
2. Die Reibungskraft ist unabhängig von der scheinbaren Kontaktfläche.

De Facto hat da Vinci als erster den Begriff des Reibungskoeffizienten eingeführt und für ihn den typischen Wert $1/4$ experimentell ermittelt.

Wie so oft in der Geschichte der Wissenschaft wurden diese Ergebnisse vergessen und rund 200 Jahre später durch den französischen Physiker *Guillaume Amontons* "wieder entdeckt" (1699). Die Proportionalität der Reibungskraft zur Normalkraft ist daher als "Amontons' Gesetz" bekannt.

Leonard Euler hat sich mit der Reibung sowohl aus mathematischer Sicht als auch experimentell beschäftigt. Er führte die Unterscheidung zwischen der stati-

¹ Ausführlichere Informationen zur Geschichte der Tribologie können gefunden werden in: D. Dowson. History of Tribology, Longman Group Limited, London, 1979.

schen und der kinetischen Reibungskraft ein und löste das Problem der Seil-Reibung – wahrscheinlich das erste in der Geschichte gelöste Kontaktproblem mit Reibung (1750). Er hat als erster die Grundlagen des mathematischen Umganges mit dem Reibungsgesetz für trockene Reibung gelegt und auf diese Weise die weiteren Entwicklungen gefördert. Ihm verdanken wir auch die weit verbreitete Bezeichnung μ für den Reibungskoeffizienten. Euler benutzte die Ideen über die Herkunft der Reibung als Verzahnung von kleinen dreieckigen Unebenheiten, wobei der Reibungskoeffizient gleich der Steigung der Unebenheiten ist. Diese Vorstellung hat in verschiedenen Variationen Jahrhunderte überlebt und wird auch heute – jetzt im Zusammenhang mit Reibung auf atomarer Skala – intensiv als „Tomlinson-Modell“² benutzt. So wird eine von Euler vielleicht nicht erwartete Verknüpfung mit der modernen Nanotribologie hergestellt.

Einen hervorragenden und bis heute aktuellen Beitrag zur Untersuchung trockener Reibung hat der französische Ingenieur *Charles Augustin Coulomb* geleistet. Das Gesetz der trockenen Reibung trägt verdient seinen Namen. Coulomb bestätigte Amontons Ergebnisse und stellte fest, dass die Gleitreibung von der Gleitgeschwindigkeit in erster Näherung unabhängig ist. Er unternahm eine sehr genaue quantitative Untersuchung der trockenen Reibung zwischen festen Körpern in Abhängigkeit von Materialpaarung, Oberflächenbeschaffenheit, Schmierung, Gleitgeschwindigkeit bzw. Standzeit (bei Haftreibung), Feuchtigkeit der Atmosphäre und Temperatur. Erst seit Erscheinen seines Buches „*Theorie des Machines Simples*“ (1781) wurde die Unterscheidung zwischen der Haft- und Gleitkraft quantitativ begründet und hat sich etabliert. Coulomb benutzte die gleichen Modellvorstellungen über die Herkunft der trockenen Reibung wie Euler, führte aber auch einen weiteren Beitrag zur Reibung ein, den wir jetzt als „Adhäsionsbeitrag“ bezeichnen würden. Es war ebenfalls Coulomb, der Abweichungen vom bis dahin bekannten einfachen Reibungsgesetz feststellte. So hat er z.B. herausgefunden, dass die Haftreibungskraft mit der Zeit nach dem Stillstand wächst. Mit seinen Untersuchungen war Coulomb seiner Zeit weit vorausgegangen. Sein Buch enthält praktisch alle später entstandenen Zweige der Tribologie. Selbst die Bezeichnung des Gerätes zur Messung der Reibungskraft – Tribometer – stammt von Coulomb.

Untersuchungen des Rollwiderstandes haben in der Geschichte keine so prominente Rolle wie die der Gleitreibung gespielt – wahrscheinlich, weil der Rollwiderstand viel kleiner ist als die Gleitreibung und daher nicht so auffällig störend war. Die ersten – und im Wesentlichen auch aus heutiger Sicht korrekten - Vorstellungen über die Natur des Rollwiderstandes beim Befahren von plastisch deformierbaren Körpern stammen von *Robert Hooke* (1685). Dass die Natur des Rollwiderstandes sehr von den Material- und Belastungsparametern abhängt, hat eine erbitterte Diskussion gezeigt, die in den Jahren 1841-42 zwischen *Morin* und *Dupuit* über die Form des Gesetzes für den Rollwiderstand stattfand. Nach *Morin*

² Das Modell wurde 1928 von Prandtl vorgeschlagen und trägt irrtümlicherweise den Namen von Tomlinson. Dieses Modell ist aber praktisch die mathematische Übersetzung der Vorstellungen von Leonard Euler.

sollte der Rollwiderstand umgekehrt proportional zum Radradius, nach Dupuit umgekehrt proportional zur Quadratwurzel des Radius sein. Aus heutiger Sicht sind beide Ansätze beschränkt korrekt – unter verschiedenen Bedingungen.

Osborne Reynolds hat als erster die Details des Geschehens direkt im Kontaktgebiet bei einem Rollkontakt experimentell untersucht und festgestellt, dass es bei einem angetriebenen Rad im Kontakt immer Bereiche gibt, in denen die Kontaktpartner haften, und Schlupfgebiete, in denen relatives Gleiten stattfindet. Das war der erste Versuch, den tribologischen Kontakt unter die Lupe zu nehmen und gleichzeitig das Ende einer strengen Unterscheidung zwischen Haft- und Gleitreibung. Reynolds hat die Energieverluste beim Rollen mit dem partiellen Gleiten in Zusammenhang gebracht. Eine quantitative Theorie des Rollkontaktes konnte aber erst später durch *Carter* (1926) geschaffen werden, nachdem die Grundlagen der Kontaktmechanik durch Hertz bereits geschaffen worden waren.

Seit Jahrhunderten haben die Menschen Reibkontakte geschmiert, um die Reibung zu vermindern. Aber erst steigende industrielle Anforderungen haben Forscher gezwungen, sich mit der Schmierung experimentell und theoretisch auseinanderzusetzen. 1883 führte *N. Petrov* seine experimentellen Untersuchungen von Gleitlagern durch und formulierte die wichtigsten Gesetzmäßigkeiten der hydrodynamischen Schmierung. 1886 publizierte *Reynolds* seine Theorie der hydrodynamischen Schmierung. Die von ihm hergeleitete „Reynoldssche Gleichung“ bildet auch heute noch die Berechnungsgrundlage für hydrodynamisch geschmierte Systeme. Nach der hydrodynamischen Schmierungstheorie hat der Reibungskoeffizient die Größenordnung des Verhältnisses der Schmierfilmdicke h zur Länge L des tribologischen Kontaktes $\mu \approx h/L$. Dies gilt allerdings nur, bis die Oberflächen so nahe aneinander kommen, dass die Dicke des Schmierfilms vergleichbar mit der Rauigkeit der Oberflächen wird. Das System ist nun im Bereich der Mischreibung, die ausführlich durch *Striebeck* (1902) untersucht wurde. Die Abhängigkeit der Reibungskraft von der Gleitgeschwindigkeit mit einem typischen Minimum wird *Striebeck-Kurve* genannt.

Bei noch größeren Lasten bzw. einer nicht ausreichenden Schmierung kann es zu den Bedingungen kommen, bei denen zwischen den Körpern die letzten wenigen Molekularschichten des Schmiermittels bleiben. Die Gesetzmäßigkeiten dieser Grenzschichtschmierung wurden von *Hardy* (1919-22) erforscht. Er zeigte, dass bereits eine Molekularschicht eines Fettes die Reibungskraft und den Verschleiß drastisch beeinflusst. Hardy hat die Abhängigkeit der Reibungskraft vom Molekulargewicht des Schmiermittels gemessen und auch richtig erkannt, dass die Moleküle der letzten Molekularschicht an der Metalloberfläche haften. Die verminderte Reibung ist der Wechselwirkung der Polymermoleküle des Schmiermittels zu verdanken, die man heute manchmal auch als „haftende Flüssigkeit“ bezeichnet.

Ein weiterer Fortschritt unserer Kenntnisse sowohl über Kontaktmechanik als auch über trockene Reibung in der Mitte des 20. Jahrhunderts ist mit den Namen von *Bowden* und *Tabor* verbunden. Sie haben als Erste auf die Wichtigkeit der Rauheit der kontaktierenden Körper hingewiesen. Dank der Rauheit ist die wahre

Kontaktfläche zwischen Reibpartnern typischerweise um Größenordnungen kleiner als die scheinbare Fläche. Diese Einsicht veränderte schlagartig die Richtung vieler tribologischer Untersuchungen und hat wieder die alten Ideen von Coulomb über Adhäsion als möglichen Reibungsmechanismus ins Spiel gebracht. 1949 haben Bowden und Tabor ein Konzept vorgeschlagen, welches die Herkunft der Gleitreibung zwischen reinen metallischen Oberflächen durch Bildung und Scherung von Schweißbrücken erklärt. Der Reibungskoeffizient ist nach diesen Vorstellungen in etwa gleich dem Verhältnis der Schubfestigkeit zur Härte und müsste für alle isotropen, plastischen Materialien etwa $1/6$ betragen. Für viele nicht geschmierten metallischen Paarungen (z.B. Stahl gegen Stahl, Stahl gegen Bronze, Stahl gegen Grauguss u.a.) hat der Reibungskoeffizient tatsächlich die Größenordnung $\mu \sim 0.16$.

Die Arbeiten von Bowden und Tabor haben eine Reihe von Theorien zur Kontaktmechanik von rauen Oberflächen ausgelöst. Als Pionierarbeiten auf diesem Gebiet sollen vor allem die Arbeiten von *Archard* (1957) erwähnt werden, der zum Schluss gekommen ist, dass auch im Kontakt von elastischen, rauen Oberflächen die Kontaktfläche ungefähr proportional zur Normalkraft ist. Weitere wichtige Beiträge sind mit den Namen *Greenwood* und *Williamson* (1966), *Bush* (1975) und *Persson* (2002) verbunden. Das Hauptergebnis dieser Arbeiten ist, dass die wahre Kontaktfläche bei rauen Oberflächen im groben proportional zur Normalkraft ist, während die Bedingungen in einzelnen Mikrokontakten (Druck, Größe des Mikrokontaktes) nur schwach von der Belastung abhängen.

Mit der Entwicklung der Automobilindustrie und gestiegenen Geschwindigkeiten und Leistungen hat die Gummireibung an technischer Bedeutung gewonnen. Das Verständnis der Mechanismen der Reibung von Elastomeren, und vor allen Dingen die heute allgemein anerkannte Tatsache, dass Elastomerreibung mit Volumenenergieverlusten im Material und somit mit seiner Rheologie verbunden sind, verdanken wir den klassischen Arbeiten von *Grosch* (1962).

Kontaktmechanik bildet heute sicherlich die Grundlage für das Verständnis von Reibungsphänomenen. In der Geschichte wurden aber die Reibungsphänomene früher und gründlicher untersucht als die rein kontaktmechanischen Aspekte. Die Entwicklung der Eisenbahn war sicherlich einer der Auslöser des Interesses für genaue Berechnungen der Beanspruchungsbedingungen in Kontakten, da im Rad-Schiene-Kontakt die Spannungen an die Grenzen der Belastbarkeit des Stahls gelangen.

Die klassische Kontaktmechanik ist vor allem mit dem Namen von *Heinrich Hertz* verbunden. 1882 löste Hertz das Problem des Kontaktes zwischen zwei elastischen Körpern mit gekrümmten Oberflächen. Dieses klassische Ergebnis bildet auch heute eine Grundlage der Kontaktmechanik. Es hat fast ein Jahrhundert gedauert bis *Johnson, Kendall und Roberts* eine ähnliche Lösung für einen adhäsiven Kontakt gefunden haben (JKR-Theorie). Dies mag an der allgemeinen Erfahrung liegen, dass Festkörper nicht adhieren. Erst mit der Entwicklung der Mikrotechnik stießen Ingenieure auf das Problem der Adhäsion. Fast gleichzeitig haben *Derjagin, Müller und Toporov* eine andere Theorie eines adhäsiven Kontaktes entwi-

ckelt. Nach einer anfänglichen heftigen Diskussion ist Tabor zur Erkenntnis gekommen, dass beide Theorien korrekte Grenzfälle des allgemeinen Problems sind.

Erstaunlich ist, dass die Verschleißphänomene trotz ihrer offensichtlichen Wichtigkeit erst ziemlich spät untersucht wurden. Die Ursache dieser Verzögerung mag in der Tatsache liegen, dass Verschleiß maßgeblich durch Wechselwirkungen von Mikrokontakten bestimmt wird, die erst nach den Arbeiten von Bowden und Tabor zum Objekt tribologischer Forschung geworden sind. Das Gesetz des abrasiven Verschleißes – der Verschleiß ist proportional zur Belastung, dem zurückgelegten Weg und umgekehrt proportional zur Härte des weicheren Kontaktpartners – wurde durch ausführliche experimentelle Untersuchungen von *M. Kruschov* (1956) festgestellt und später auch von *Archard* bestätigt (1966). Die Untersuchung der Gesetzmäßigkeiten des adhäsiven Verschleißes – für den die gleichen Gesetzmäßigkeiten gelten, wie für den abrasiven Verschleiß – sind mit den Namen von *Tabor* und *Rabinowicz* verbunden. Trotz dieser Untersuchungen gehören Verschleißmechanismen – besonders unter den „verschleißarmen“ Bedingungen – auch heute noch zu den am wenigsten verstandenen tribologischen Phänomenen.

Seit den 90er Jahren des 20. Jahrhunderts haben Kontaktmechanik und Reibungsphysik eine Wiedergeburt erlebt. Die Entwicklung experimenteller Methoden zur Untersuchung von Reibungsprozessen auf atomarer Ebene (Atomkraftmikroskop, Friction-Force-Mikroskop, Quartz-Kristall-Mikrowaage, surface force apparatus) und numerischer Simulationsmethoden haben in dieser Zeit ein schnelles Anwachsen der Anzahl von Forschungsarbeiten im Bereich der Reibung von Festkörpern hervorgerufen. Auch die Entwicklung der Mikrotechnik hat wesentlich zum großen Interesse an der Kontaktmechanik und Reibungsphysik beigetragen. Experimentatoren bekamen die Möglichkeit, gut definierte Systeme unter streng kontrollierten Bedingungen zu untersuchen (z.B. die Möglichkeit, die Dicke einer Schicht und die relative Verschiebung von festen Oberflächen mit Genauigkeiten von Bruchteilen eines interatomaren Abstandes zu kontrollieren). Zwischen der klassischen Tribologie und der Nanotribologie gibt es aber eine Lücke, die bisher nicht gefüllt wurde.

1.3 Aufbau des Buches

Kontakt und Reibung gehen immer Hand in Hand und sind in realen Systemen auf vielerlei Weise verflochten. In unserer theoretischen Abhandlung müssen wir sie zunächst trennen. Wir beginnen unsere Behandlung der Kontakt- und Reibungsphänomene mit der Kontaktmechanik. Diese beginnt wiederum mit einer qualitativen Analyse, die uns ein vereinfachtes, aber umfassendes Verständnis der einschlägigen Phänomene liefert. Erst danach gehen wir zur rigorosen Behandlung von Kontaktproblemen und anschließend zu Reibungsphänomenen, Schmierung und Verschleiß über.

2 Qualitative Behandlung des Kontaktproblems – Normalkontakt ohne Adhäsion



Wir beginnen unsere Betrachtung von Kontaktphänomenen mit dem *Normalkontaktproblem*. Bei einem Normalkontaktproblem handelt es sich um zwei Körper, die durch Anpresskräfte *senkrecht zu ihrer Oberfläche* in Berührung gebracht werden. Ein prominentes Beispiel ist das Rad auf einer Schiene. Die zwei wichtigsten Zusammenhänge, welche die Theorie eines Normalkontakts liefern soll, sind:

(1) Der Zusammenhang zwischen der Anpresskraft und der Normalverschiebung der Körper, welcher die Steifigkeit des Kontaktes und somit die dynamischen Eigenschaften des Gesamtsystems mitbestimmt und

(2) die im Kontaktgebiet auftretenden Spannungen, die für den Festigkeitsnachweis erforderlich sind.

Ohne Berührung gibt es keine anderen Kontaktphänomene, keine Reibung und keinen Verschleiß. In diesem Sinne kann man den Normalkontakt als eine Grundvoraussetzung für alle anderen tribologischen Phänomene betrachten. Dabei ist zu bemerken, dass es im Allgemeinen selbst bei einem Normalkontakt eine relative Bewegung von Oberflächen in *tangentialer* Richtung geben kann – aufgrund der unterschiedlichen Querkontraktion kontaktierender Körper. Dadurch kommen auch beim Normalkontaktproblem Reibungskräfte in den Grenzflächen ins Spiel. Wenn wir berücksichtigen, dass die Reibungskräfte selbst wesentlich durch den Kontakt zwischen Mikrorauigkeiten der Oberflächen bestimmt sind, sehen wir, dass Normal-, Tangentialbeanspruchungen und Reibung bereits im einfachsten Kontaktproblem auf verschiedenen Betrachtungsskalen auf komplizierte Weise

verflochten sind. In einer ersten Näherung wollen wir uns von diesen Komplikationen abstrahieren und untersuchen das *reine Normalkontaktproblem*, indem wir annehmen, dass in der Kontaktfläche keine Reibungskräfte wirken. Auch die immer vorhandenen Anziehungskräfte zwischen Oberflächen – Adhäsion – werden zunächst vernachlässigt.

Eine analytische oder numerische Analyse von Kontaktproblemen ist auch in den einfachsten Fällen sehr kompliziert. Ein qualitatives Verständnis von Kontaktproblemen dagegen lässt sich mit sehr einfachen Mitteln erreichen. Wir beginnen daher unsere Diskussion mit Methoden zur qualitativen Analyse von Kontaktphänomenen, die in vielen Fällen auch für zuverlässige quantitative Abschätzungen benutzt werden können. Eine rigorose Behandlung der wichtigsten klassischen Kontaktprobleme folgt in weiteren Kapiteln. Wir werden eine Reihe von Kontaktproblemen zwischen Körpern verschiedener Form untersuchen, die oft als Bausteine für kompliziertere Kontaktprobleme gebraucht werden können.

2.1 Materialeigenschaften

Dieses Buch setzt die Bekanntschaft des Lesers mit den Grundlagen der Elastizitätstheorie voraus. In diesem Abschnitt fassen wir nur Definitionen von wichtigsten Materialparametern zusammen, die für eine qualitative Untersuchung von kontaktmechanischen Fragestellungen von Bedeutung sind. Diese Zusammenfassung ersetzt nicht die allgemeinen Definitionen und Gleichungen der Elastizitäts- und der Plastizitätstheorie.

(a) *Elastische Eigenschaften*. In einem einachsigen Zugversuch wird ein schlanker Stab mit konstantem Querschnitt A und der Anfangslänge l_0 um Δl gedehnt. Das Verhältnis der Zugkraft zur Querschnittsfläche ist die Zugspannung

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (2.1)$$

Das Verhältnis der Längenänderung zur Anfangslänge ist die Zugdehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2.2)$$

Ein typisches Spannungs-Dehnungs-Diagramm für viele Metalle und Nichtmetalle ist in Abb. 2.1 dargestellt. Bei kleinen Spannungen sind diese proportional zur Deformation

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.3)$$

Der Proportionalitätskoeffizient E ist der *Elastizitätsmodul* des Stoffes. Mit der Längsdehnung hängt eine Querkontraktion des Materials zusammen, die durch die

Poissonzahl (oder Querkontraktionskoeffizient) ν charakterisiert wird. Einem *inkompressiblen Medium* entspricht $\nu = 1/2$.

Auf ähnliche Weise wird der Schubmodul als Proportionalitätskoeffizient zwischen der Schubspannung und der von ihr verursachten Scherdeformation definiert. Der Schubmodul hängt mit dem Elastizitätskoeffizienten und der Poissonzahl gemäß

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.4)$$

zusammen. Das Verhältnis der Spannung zur Volumenänderung bei allseitigem Druck wird Kompressionsmodul K genannt:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \quad (2.5)$$

Im elastisch deformierten Körper ist potentielle Energie gespeichert, deren *Energiedichte* E (Energie pro Volumeneinheit) sich wie folgt berechnet:

$$E = \frac{1}{2} \varepsilon \sigma = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (2.6)$$

Bei Scherdeformation gilt

$$E = \frac{1}{2} G \varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2G}. \quad (2.7)$$

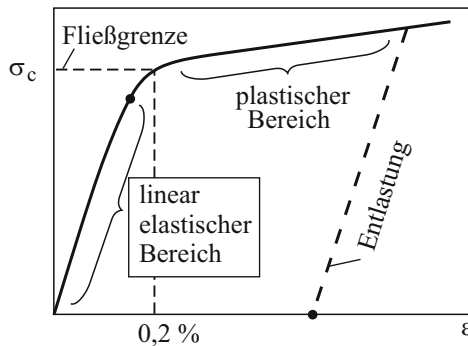


Abb. 2.1 Schematische Darstellung eines Spannungs-Dehnungs-Diagramms für viele Metalle und Nichtmetalle.

(b) *Plastische Eigenschaften.* Nach dem Erreichen der *Fließgrenze* weicht das Spannungs-Dehnungs-Diagramm abrupt von dem ursprünglichen linearen Verlauf ab und geht im weiteren Verlauf fast horizontal: Der Stoff wird plastisch deformiert. Die plastische Deformation wird dadurch gekennzeichnet, dass nach der Entlastung eine Restdeformation bleibt.

Der Übergang vom elastischen zum plastischen Verhalten ist in der Regel schnell aber kontinuierlich, so dass sich keine eindeutige „Fließgrenze“ definieren lässt. Vereinbarungsgemäß wird als Fließgrenze σ_c die Spannung angenommen, bei der die bleibende Deformation 0,2% beträgt.

Die Fließgrenze hängt vom Deformationszustand des Materials ab. Für Reibungsphänomene ist der *stark deformationsverfestigte* Zustand maßgebend, den man in der Oberflächenschicht nach einer tribologischen Beanspruchung in der Regel findet. Das bedeutet, dass wir in tribologischen Anwendungen unter der Fließgrenze in der Regel den Grenzwert dieses Parameters im stark verfestigten Zustand verstehen. Dementsprechend findet bei Deformation keine weitere wesentliche Verfestigung statt und das Material kann in erster Näherung als elastisch-ideal plastisch betrachtet werden.

Eine einfache Methode zur Bestimmung der Fließgrenze eines elastisch-ideal plastischen Mediums ist die *Härtemessung*. Sie besteht im Eindringen eines harten Indenters in die zu untersuchende Oberfläche (Abb. 2.2). Das Verhältnis der Normalkraft zur Fläche des Eindrucks ist die Eindruckhärte oder einfach die *Härte* des Materials¹:

$$\sigma_0 = \frac{F_N}{A}. \quad (2.8)$$

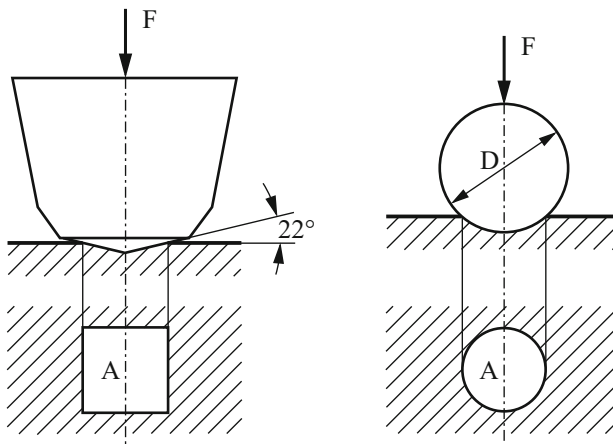


Abb. 2.2 Härtemessung nach Vickers und nach Brinell.

¹ Die Härtewerte nach Vickers und nach Brinell stimmen mit der so definierten Eindruckhärte bis zu einem konstanten Koeffizienten überein: Die Härte nach Vickers ist gleich etwa 0,1 der oben definierten Eindruckhärte. Wir werden in diesem Buch nur die Definition (2.8) benutzen.

Tabor hat sowohl theoretisch als auch experimentell gezeigt, dass in den meisten Fällen die Härte etwa das Dreifache der Fließgrenze beträgt²:

$$\sigma_0 \approx 3\sigma_c. \quad (2.9)$$

Die Härtemessung spielt eine zentrale Rolle in der tribologischen Charakterisierung von Werkstoffen, da tribologische Prozesse im Wesentlichen durch Wechselwirkung von Mikrorauigkeiten bestimmt werden und diese nach ihrer Geometrie sehr ähnlich einem Härtetest sind. Die Eindringhärte hängt von der Form des Indenters nur schwach ab. In erster Näherung kann man diese Abhängigkeit vernachlässigen.

Verschiedene Materialeigenschaften, die für die Kontaktmechanik und Reibung von Interesse sind, wie Elastizitätsmodul, Härte, thermischer Dehnungskoeffizient und Oberflächenenergie weisen starke Korrelationen auf. Umfangreiche experimentelle Daten hierfür können im exzellenten Buch von Ernest Rabinowicz „Friction and wear of materials“ gefunden werden³.

2.2 Einfache Kontaktaufgaben

Am einfachsten können solche Kontaktaufgaben gelöst werden, bei denen die Deformation eindeutig aus den geometrischen Vorgaben folgt. Das ist der Fall in den vier nachfolgenden Beispielen.

(1) Parallelepipet

Das einfachste Kontaktproblem ist der Kontakt zwischen einem rechtwinkligen Parallelepipet und einer glatten, reibungsfreien, starren Ebene (Abb. 2.3). Beim Anpressen an die Ebene wird sich der Körper elastisch deformieren. Definieren wir die „Eindrucktiefe“ d als die Strecke, die das Parallelepipet unter die Ebene „eindringen“ würde, falls die Ebene keinen Widerstand leisten würde.

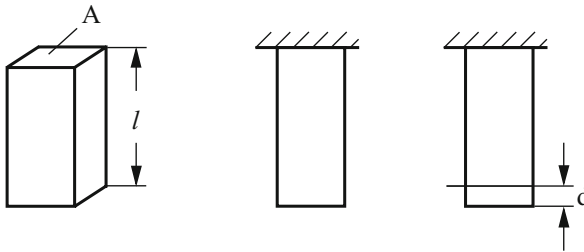


Abb. 2.3 Kontakt zwischen einem elastischen Parallelepipet und einer starren Ebene.

² Tabor, D. The Hardness of Metals, Oxford University Press, Oxford, 1951.

³ E. Rabinowicz, Friction and wear of materials. Second Edition. John Wiley & Sons, inc., 1995.

In Wirklichkeit kann der Körper unter das Niveau der starren Ebene nicht eindringen und wird um den Betrag d deformiert. Ist die Länge des Parallelepipeds viel größer als seine Breite, so liegt ein *einachsiger Spannungszustand* vor und die dabei entstehende elastische Kraft ist gleich

$$F = EA \frac{d}{l}. \quad (2.10)$$

E ist hier der Elastizitätsmodul, A der Flächeninhalt des Querschnitts, l die Länge des Parallelepipeds. Die Kraft ist in diesem Fall proportional zu der Eindrucktiefe d .

(2) Dünne Schicht

Ist die Länge des Parallelepipeds viel kleiner als seine Breite (Abb. 2.4), so kann sich das Medium nicht in der Querrichtung deformieren und es liegt eine *einachsige Deformation* vor. In diesem Fall folgt aus der Elastizitätstheorie

$$F = \tilde{E}A \frac{d}{l} \quad (2.11)$$

mit

$$\tilde{E} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (2.12)$$

Für Metalle gilt $\nu \approx 1/3$, so dass $\tilde{E} \approx 1,5E$ ist. Für Elastomere, die als fast nicht kompressible Medien angesehen werden können, ist $\nu \approx 1/2$ und der Modul für einseitige Kompression $\tilde{E} \approx K$ ist viel größer E (um ca. 3 Größenordnungen):

$$\tilde{E} \approx K \gg E, \quad \text{für Elastomere.} \quad (2.13)$$

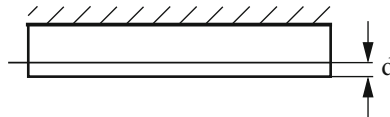


Abb. 2.4 Kontakt zwischen einer dünnen elastischen Schicht und einer starren Ebene.

(3) Sphärischer Aufkleber

Als nächstes untersuchen wir den Kontakt zwischen einem dünnen, sphärischen, elastischen Aufkleber auf einer starren Unterlage und einer starren Ebene (Abb. 2.5).

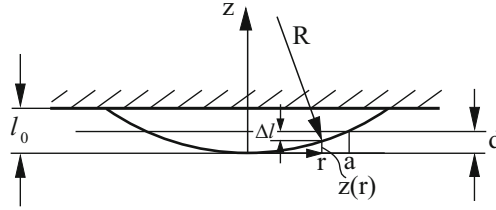


Abb. 2.5 Kontakt zwischen einem elastischen sphärischen Aufkleber und einer starren Ebene.

Die maximale Dicke des Aufklebers sei l_0 und der Krümmungsradius R . Den Radius des Kontaktgebietes bezeichnen wir mit a . Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dass in dem uns interessierenden Bereich der Anpresskräfte folgende geometrische Beziehungen erfüllt sind: $d \ll l_0$, $l_0 \ll a$. In diesem Fall wird sich jedes einzelne Element des Aufklebers einachsig deformieren. Für die einachsige elastische Deformation ist der Koeffizient der einseitigen Kompression \tilde{E} (2.12) maßgebend.

Die Form eines sphärischen Aufklebers mit dem Krümmungsradius R kann in der Nähe des Minimums als

$$z = -\sqrt{R^2 - r^2} + R \approx \frac{r^2}{2R} \quad (2.14)$$

dargestellt werden. Der Abb. 2.5 kann man leicht entnehmen, dass der Zusammenhang zwischen dem Radius a des Kontaktgebietes und der Eindringtiefe d durch die Bedingung $d = a^2 / 2R$ gegeben wird. Daraus folgt für den Kontaktradius

$$a = \sqrt{2Rd} . \quad (2.15)$$

Die vertikale Verschiebung der Oberfläche bei der Koordinate r ist gleich $\Delta l = d - r^2 / 2R$. Die entsprechende elastische Deformation berechnet sich somit zu

$$\varepsilon(r) = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{d - r^2 / 2R}{l_0} . \quad (2.16)$$

Die Berechnungen der Spannung und der im Kontaktgebiet wirkenden Gesamtkraft ergeben schließlich:

$$\sigma(r) = \tilde{E}\varepsilon(r) , \quad F = \tilde{E} \int_0^a 2\pi r \left(\frac{d - r^2 / 2R}{l_0} \right) dr = \tilde{E} \frac{\pi}{l_0} R d^2 . \quad (2.17)$$

In diesem Fall ist die Kontaktkraft proportional zum Quadrat der Eindringtiefe. Die größte Spannung (im Zentrum des Kontaktgebietes) ist gleich

$$\sigma(0) = \tilde{E} \frac{d}{l_0} = \left(\frac{\tilde{E}F}{\pi l_0 R} \right)^{1/2}. \quad (2.18)$$

(4) Kontakt zwischen einer dünnen elastischen Schicht auf einer starren zylindrischen Unterlage und einer starren Ebene

Ein weiteres System, das in vielerlei Hinsicht interessant ist, ist ein starrer Zylinder der Länge L , der mit einer dünnen elastischen Schicht (Dicke l_0) bedeckt ist (Abb. 2.6). Unter der Annahme, dass die Eindringtiefe viel kleiner und der Kontaktradius viel größer als die Schichtdicke ist, haben wir es auch in diesem Fall mit einer einachsigen Deformation zu tun. Die Verschiebung von Oberflächenpunkten berechnet sich zu $u_z = d - x^2 / 2R$. Für die Deformation gilt

$$\varepsilon(x) = \frac{u_z}{l_0} = \frac{d - x^2 / 2R}{l_0}. \quad (2.19)$$

Die gesamte Kontaktkraft berechnet sich dann zu

$$F = 2 \int_0^{\sqrt{2Rd}} \tilde{E}L \left(\frac{d - x^2 / 2R}{l_0} \right) dx = \frac{4}{3} 2^{1/2} \frac{\tilde{E}LR^{1/2}}{l_0} d^{3/2}. \quad (2.20)$$

Die maximale Spannung (in der Mitte des Kontaktgebietes) beträgt

$$\sigma(0) = \left(\frac{9F^2 \tilde{E}}{32L^2 R l_0} \right)^{1/3}. \quad (2.21)$$

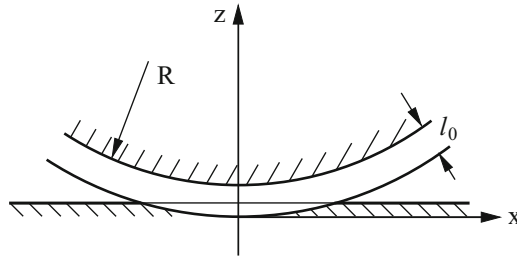


Abb. 2.6 Zylinder mit einer elastischen Schicht im Kontakt mit einer starren Ebene.

2.3 Qualitative Abschätzungsmethode für Kontakte mit einem dreidimensionalen elastischen Kontinuum

(1) Kontakt zwischen einem starren zylindrischen Indenter und einem elastischen Körper

Betrachten wir nun einen starren zylindrischen Indenter in Kontakt mit einem *e-lastischen Halbraum* (Abb. 2.7 a). Am Beispiel dieser Aufgabe erklären wir die wichtigste Idee, die in der Kontaktmechanik für qualitative Abschätzungen benutzt wird.

Wirkt eine Spannungsverteilung auf ein endliches Gebiet der Oberfläche mit einer charakteristischen Länge D (Abb. 2.7 b), so haben die Deformation und die Spannung im gesamten Volumen mit den Abmessungen D in allen drei räumlichen Dimensionen die gleiche Größenordnung. Außerhalb dieses "stark deformierten Volumens" fallen die Deformation und die Spannung nach dem Gesetz $\propto r^{-2}$ ab. Das führt dazu, dass in dreidimensionalen Systemen das genannte Volumen $\sim D^3$ den größten Beitrag zu allen energetischen oder Kraftbeziehungen liefert⁴.

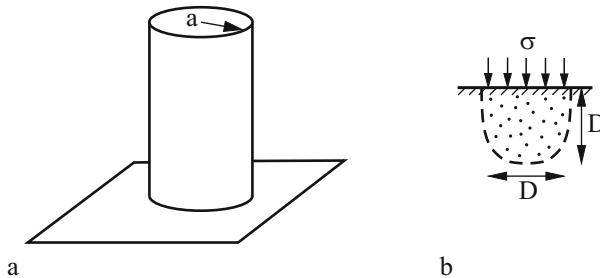


Abb. 2.7 (a) Kontakt zwischen einem starren zylindrischen Indenter und einem elastischen Halbraum. (b) Stark deformierter Bereich des elastischen Halbraumes.

Für eine erste grobe qualitative Abschätzung reicht es daher anzunehmen, dass die Deformation im genannten Volumen konstant ist und dass nur dieses Volumen deformiert wird. Selbstverständlich ist das nur eine sehr grobe Darstellung der in Wirklichkeit kontinuierlichen Verteilung von Deformationen und Spannungen im

⁴ Dass die charakteristische "Eindringtiefe" der Spannungen und Deformationen dieselbe Größenordnung haben muss wie die Abmessungen r des Druckgebietes folgt bereits aus Dimensionsgründen. In der Tat enthält die Gleichgewichtsgleichung der Elastizitätstheorie keine Faktoren mit der Dimension Länge. Die Lösung einer beliebigen Gleichgewichtsaufgabe darf daher keine Längenparameter enthalten außer der Länge, die durch die Randbedingungen vorgegeben wurde.

Kontinuum. Sie liefert aber in den meisten Fällen bis auf einen konstanten numerischen Faktor der Größenordnung 1, der entweder durch analytische oder durch numerische Simulationen bestimmt werden kann, den korrekten qualitativen Zusammenhang zwischen der Kontaktkraft und der Eindringtiefe sowie für den Kontaktradius.

Wenden wir diese einfache Abschätzungsregel auf unser Beispiel mit dem starren Indenter an. Ist der Durchmesser des Zylinders gleich $2a$, so ist ein Volumen mit den Abmessungen $2a$ in allen drei Richtungen stark deformiert. Da dieses Volumen um d eingedrückt wird, schätzen wir die Deformation als $\varepsilon \approx d/2a$ ab. Für die Spannung ergibt sich $\sigma \approx E\varepsilon \approx Ed/2a$. Für die Kraft $F \approx \sigma(2a)^2 \approx 2Eda$: Die Kontaktkraft ist proportional zur Eindringtiefe und zum Kontaktradius a . Es ist interessant, diese Abschätzung mit der exakten Lösung der Aufgabe (s. Kapitel 5) zu vergleichen. Das exakte Ergebnis lautet

$$F = 2E^* da \quad (2.22)$$

mit $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$. Für metallische Werkstoffe ($\nu \approx 1/3$) beträgt der Unterschied zwischen der Abschätzung und dem exakten Ergebnis nur 10%. Dieses Beispiel zeigt eindrucksvoll, dass die beschriebene Abschätzungsmethode nicht nur für qualitative sondern auch für relativ gute quantitative Abschätzungen benutzt werden kann.

Gleichung (2.22) besagt, dass die Eindringtiefe proportional zur Normalkraft ist. Der Koeffizient zwischen der Kraft F und der Verschiebung d wird *Steifigkeit des Kontaktes* genannt:

$$c = 2E^* a. \quad (2.23)$$

Wir unterstreichen, dass diese Steifigkeit proportional *zum Radius* des Kontaktes ist (nicht der Kontaktfläche!).

(2) Kontakt zwischen einer starren Kugel und einem elastischen Körper

Betrachten wir den Kontakt zwischen einer elastischen Kugel mit dem Radius R und einer starren Ebene. Auch in diesem Fall beschränken wir uns an dieser Stelle auf eine qualitative Abschätzung. Eine rigorose Abhandlung befindet sich im Kapitel 5.

Gäbe es keine elastische Wechselwirkung zwischen der Kugel und der Fläche, so hätten wir bei der Eindringtiefe d den Kontaktradius $a \approx \sqrt{2Rd}$ und die Kontaktfläche

$$A = \pi a^2 \approx 2\pi R d. \quad (2.24)$$

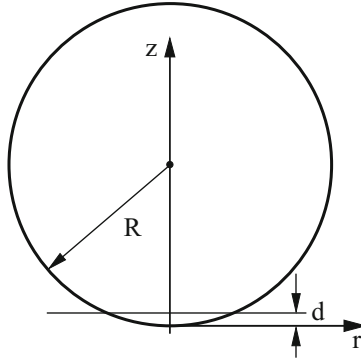


Abb. 2.8 Zum Hertz'schen Kontaktproblem.

Nach der oben formulierten Abschätzungsregel sind die Abmessungen des stark deformierten Bereichs von der gleichen Größenordnung wie der Kontaktdurchmesser $2a$. Die Größenordnung der elastischen Deformation in diesem Gebiet ist $\varepsilon \approx d / 2a$, die Größenordnung der Spannung ist somit gleich $\sigma \approx E \frac{d}{2a}$. Für die Kraft ergibt sich $F = \sigma A \approx \frac{Ed}{2a} \pi a^2 \approx \frac{Ed}{2} \pi \sqrt{2Rd} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} Ed^{3/2} R^{1/2}$. Die Kraft ist somit proportional zu $d^{3/2}$. Dies ist zu vergleichen mit dem exakten Ergebnis

$$F = \frac{4}{3} E^* R^{1/2} d^{3/2} . \tag{2.25}$$

Sie unterscheiden sich um einen Faktor $\approx 1,5$.

Wird die Kugel plastisch deformiert, so gilt der Zusammenhang (2.8) zwischen der Normalkraft und der Kontaktfläche⁵

$$\sigma_0 = \frac{F_N}{A} . \tag{2.26}$$

Unter Berücksichtigung von (2.24) ergibt sich

$$F_N = 2\pi\sigma_0 R d . \tag{2.27}$$

Im plastischen Bereich ist die Kraft proportional zur Eindringtiefe. Die mittlere Spannung bleibt dabei konstant und ist gleich der Härte des Materials.

⁵ Für den Normalkontakt ist es ohne Bedeutung, ob es sich um einen Kontakt einer elastischen Kugel mit einer starren Ebene oder einer starren Kugel mit einer elastischen Ebene handelt.

(3) Kontakt zwischen einem starren Zylinder und einem elastischen Körper

Als nächstes untersuchen wir den Kontakt zwischen einem elastischen Zylinder und einer starren Ebene (Abb. 2.9). Der Kontaktradius wird wie im Fall einer Kugel mit $a \approx \sqrt{2Rd}$ abgeschätzt. Die Größenordnung der Spannung ist $Ed/2a$ und der Kontaktfläche $2La$, wobei L die Länge des Zylinders ist. Für die Kraft ergibt sich $F \approx \frac{Ed}{2a} 2La = ELd$. Das exakte Ergebnis lautet

$$F = \frac{\pi}{4} E^* L d . \quad (2.28)$$

Auch in diesem Fall unterscheidet sich das exakte Ergebnis nur geringfügig von der einfachen Abschätzung. Die Kraft ist in diesem Fall linear proportional zur Eindringtiefe und hängt nicht vom Radius des Zylinders ab. Auch in diesem Fall lässt sich die Kontaktsteifigkeit als Koeffizient zwischen der Kraft und der vertikalen Verschiebung definieren:

$$c = \frac{\pi}{4} E^* L . \quad (2.29)$$

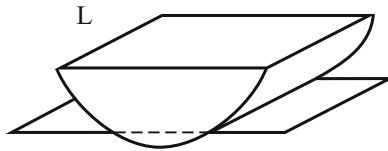


Abb. 2.9 Kontakt zwischen einem zylindrischen Körper und einer starren Ebene.

Im plastischen Bereich gilt

$$F_N \approx \sigma_0 2aL \approx 2^{3/2} \sigma_0 LR^{1/2} d^{1/2} . \quad (2.30)$$

(4) Kontakt zwischen einem starren Kegel und einem elastischen Körper

Der Kontaktradius bestimmt sich in diesem Fall aus der Bedingung $a \tan \theta = d$ (Abb. 2.10). Die Deformation wird zu $\varepsilon \approx d/2a = \frac{1}{2} \tan \theta$ abgeschätzt. Die mittlere Spannung hat die Größenordnung

$$\sigma \approx E\varepsilon \approx \frac{1}{2} E \tan \theta \quad (2.31)$$

und hängt nicht von der Eindringtiefe ab. Für die Normalkraft erhalten wir die Abschätzung