

Alla ricerca <---  
della via più breve

Internet si espande ad una velocità vertiginosa. Le stime affermano che attualmente il numero degli utenti della rete ammonta a circa mezzo miliardo di persone. Molti di questi utenti hanno una propria homepage. Tuttavia, come nella “vita vera”, non tutti curano i propri dati con la stessa premura. Le pagine Internet vanno e vengono, scompaiono del tutto dalla rete oppure vengono integrate in sistemi più grandi. Alcune incontrano un successo tale che se all’inizio erano liberamente accessibili, in un secondo momento possono essere visitate solo dietro pagamento. Welcome to the real world!

Questo libro contiene molti indirizzi Internet interessanti per l’argomento trattato. Al momento della stampa essi sono tutti attivi e utilizzabili liberamente. Tuttavia ciò potrebbe cambiare. Già domani la stessa pagina web potrebbe mostrare contenuti diversi, o venire addirittura tolta dalla rete; potrebbero venire richieste tasse sul suo utilizzo o fare la loro comparsa nuovi banner pubblicitari, magari indecenti; tutto secondo la legge di Murphy: “If anything can go wrong, it will!”.

Una lista di tutti i links aggiornata (e cliccabile!) può essere trovata all’indirizzo:

<http://www-m9.ma.tum.de/ruth/linklist.de.html>.

---

Questo libro contiene una serie di rimandi a pagine in Internet. Purtroppo non ci è stato sempre possibile verificare se il contenuto offerto in queste pagine web rispetta i diritti d’autore di terzi. Visitando una pagina web con contenuti che ledono i diritti d’autore, può essere commessa infrazione. Vorremmo segnalare questa circostanza.

Peter Gritzmann  
René Brandenberg

# Alla ricerca della via più breve

Un'avventura matematica

Traduzione di Stefano Ruggerini

 Springer

Prof. Dott. Peter Gritzmann  
Dott. René Brandenburg

TU München  
Zentrum Mathematik  
80290 München, Deutschland  
gritzman@ma.tum.de  
brandenb@ma.tum.de

Titolo originale dell'opera:

Das Geheimnis des kürzesten Weges – Ein mathematisches Abenteuer © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2002, 2003, 2005

Traduzione a cura di:  
Stefano Ruggerini

ISBN 88-470-0255-9

Quest'opera è protetta dalla legge sul diritto d'autore. Tutti i diritti, in particolare quelli relativi alla traduzione, alla ristampa, all'utilizzo di illustrazioni e tabelle, alla citazione orale, alla trasmissione radiofonica o televisiva, alla registrazione su microfilm o in database, o alla riproduzione in qualsiasi altra forma (stampata o elettronica) rimangono riservati anche nel caso di utilizzo parziale. La riproduzione di quest'opera, anche se parziale, è ammessa solo ed esclusivamente nei limiti stabiliti dalla legge sul diritto d'autore ed è soggetta all'autorizzazione dell'editore. La violazione delle norme comporta le sanzioni previste dalla legge.

Springer fa parte di Springer Science+Business Media

springer.it

© Springer-Verlag Italia 2005  
*Stampato in Italia*

L'utilizzo in questa pubblicazione di denominazioni generiche, nomi commerciali, marchi registrati, ecc. anche se non specificamente identificati, non implica che tali denominazioni o marchi non siano protetti dalle relative leggi e regolamenti.

Layout di copertina: KünkelLopka, Heidelberg  
Impaginazione: LE-TjX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig  
Stampa: Signum Srl, Bollate (MI)

## ---> Peter Gritzmann



Nato nel 1954, professore di matematica presso l'Università Tecnica di Monaco di Baviera, lavora a problemi di matematica discreta e di geometria applicata che emergono nel contesto delle scienze economiche, della fisica, della scienza dei materiali, della linguistica e della medicina. Le sue ricerche hanno ottenuto, tra gli altri riconoscimenti, la borsa Fedor Lynen della Fondazione Alexander von Humboldt e il premio Max Planck per la ricerca. Peter Gritzmann è stato dal 2002 al 2003 presidente dell'Unione dei Matematici Tedeschi (DMV).

## ---> René Brandenberg



Nato nel 1970, è ricercatore presso il Centro Matematico dell'Università Tecnica di Monaco di Baviera. Dopo gli studi in matematica applicata compiuti all'Università di Trier, ha conseguito il dottorato nell'ambito della geometria applicata. Conduce inoltre un progetto per lo sviluppo di una biblioteca on-line di software per problemi della matematica discreta.

## ---> Primo contatto

“Ciao mamma.”

“Ciao signorina.”

Era dal giorno del quindicesimo compleanno di Rut che sua madre la chiamava in quel modo: Rut si era lamentata dicendo di non essere più ‘la piccola’.

In quel momento Rut tornava da scuola piuttosto di cattivo umore. Con lo studio non se la cavava male, ma da qualche tempo la maggior parte delle materie la lasciavano indifferente. Già a casa era stato così; da quando poi si trovava all'estero, la situazione non aveva fatto che peggiorare. Sempre più spesso si chiedeva che senso avesse ciò che le veniva insegnato. Da questo punto di vista, la materia peggiore era la matematica. Nonostante fosse sempre stata piuttosto brava in matematica, ultimamente non riusciva più ad interessarsene davvero. A che scopo ficcarsi in testa quella roba astratta? C'è forse qualcuno che calcola con le lettere o usa il teorema di Pitagora o di Talete? All'infuori di suo padre, non sapeva proprio chi davvero potesse avere bisogno di queste cose e, in fondo, nemmeno suo padre era in grado di spiegarle perché tutto ciò fosse importante: lui stesso, in fin dei conti, aveva studiato informatica. Rut andò in camera sua.

“Wow! Non ci posso credere. MAMMA!”

Rut si precipitò in camera di sua madre.

“È per me *quello*?”

“No. L'abbiamo appoggiato solo provvisoriamente lì da te, finché...”

---

2 Sua madre non era proprio capace di fingere e non riuscì a trattenere un sorriso di compiacimento.

“Oh, è fantastico! Grazie Mamma.”

“Ringrazia tuo padre stasera quando torna. È stato lui a portare a casa tutto quanto.”

Rut era davvero al settimo cielo: finalmente il *suo* computer! Quasi tutti i suoi compagni di scuola già ne possedevano uno, soprattutto i maschi. E continuamente si vantavano delle loro prestazioni, dell'arsenale di accessori in dotazione o dell'ultimo, nuovissimo gioco acquistato.

Ebbene, adesso ne aveva uno anche lei. Suo padre aveva già collegato tutto. C'era perfino il modem. Internet, e-mail, newsgroups: tutto era possibile. A dire il vero, Rut avrebbe aiutato volentieri suo padre, durante l'assemblaggio, ma ora non restava che premere il pulsante di accensione e cominciare. Anche così non era male. Ascoltò come il calcolatore si accendesse, con quell'inconfondibile brusio vorticoso. A quanto pare, il software era già installato. Come avrebbe voluto assistere anche a questa operazione! Queste cose, semplicemente, la interessavano. Probabilmente c'erano programmi di ogni tipo. Dall'emozione non sapeva con che cosa cominciare: scrivere subito una lettera o magari direttamente una e-mail? Anche un piccolo gioco non sarebbe stato sgradito.

Un avviso sullo schermo la informò che avrebbe dovuto accendere anche il 'dispositivo di comunicazione'. Ah sì: vicino al calcolatore c'era un apparecchio che Rut non ricordava di aver visto mai a casa dei suoi amici. Doveva essere per forza il dispositivo di comunicazione. Una piccola pressione sull'interruttore e già la spia di controllo era illuminata.

Rut si sforzò di capire cosa volesse dire ogni simbolo sul monitor. Sotto un'icona lesse: 'Solo per giovani donne dai 15 anni in su'. Papà era incline a non prenderla sul serio. Come le dava fastidio questo! I genitori non possono semplicemente accettare il fatto che i loro figli crescono e diventano

adulti? Ancora irritata per quelle righe, cliccò sull'icona e altri simboli apparvero sul video. Uno di questi ritraeva un volto. Rut lo scelse col tasto del mouse.

“Ciao Rut.”

“Cosa? . . . Come sarebbe a dire adesso ‘Ciao Rut?’”

“Ti prego, non così veloce. Mi devo prima abituare alla tua voce e alla tua pronuncia.”

“Non può essere. Questa scatola non solo parla: capisce perfino!”

“Scatola? Intendi dire con ciò. . . me?”

“Ehm. . . veramente sì.”

“Mi chiamo Vim.”

“Vim? E tu lo trovi del tutto normale, stare qui adesso a parlare con me? Chi, cioè. . . che cosa sei e come fai a sapere il mio nome?”

“Non così veloce! Una domanda alla volta. A dire il vero, sono solo un programma, ma di un tipo assolutamente nuovo. Sono stato programmato in modo che con me si possa conversare normalmente. E adesso veniamo alla seconda domanda: il nome Rut è stato introdotto in questo computer come nome utente. Tu sei Rut, non è vero?”

“Non credo a una parola di quello che dici. Un software col quale si può tranquillamente conversare non esiste proprio.”

“Tè l’ho pure detto che sono una novità assoluta.”

“Ma una novità del genere non finisce comunque di certo sul mio computer.”

“A quanto pare ci sono finito e farei anche volentieri amicizia con te.”

“Amicizia con me? Ma se sei solo un programma per computer! Come puoi essere mio amico?”



“Non vedo perché non potrei esserlo. Una caratteristica importante degli amici è quella di poter parlare con loro di tutto. Io so ascoltare bene e ho anche qualcosa da raccontare. . .”

“Credo che mi ci vorrà un po' per digerirlo.”

Rut era alquanto perplessa. Non sapeva proprio come comportarsi con questo programma. Vim un amico? La sera stessa ne avrebbe certamente parlato con papà. Un momento! Perché non farlo subito? Corse al telefono.

“Ciao Rut.”

“Ma come facevi a sapere che ero io?”

“Qui il telefono è così furbo, che mi fa vedere subito il numero di chi chiama.”

“Ma poteva anche trattarsi di mamma.”

“Ma non era lei.”

Come le piacevano queste risposte di suo padre: avrebbe potuto saltargli al collo e abbracciarlo seduta stante.

“Papà, grazie! Che incredibile sorpresa, il computer. Adesso che ne ho uno anch'io, potrò finalmente dire la mia, a scuola. E finalmente potrò scrivere con la posta elettronica ai miei amici a Milano. Sicuramente Sara starà già chiedendosi che fine ho fatto e aspetterà mie notizie. Ma c'è un problemino. . .”

“Su, spara.”

“Sul computer c'è quel software, lo sai, no? Quello per giovani donne dai quindici in su.”

“Non l'ho guardato. Non sembra certo per me.”

“Smettila! Ti conosco. È senz'altro roba tua. Questa faccenda delle giovani donne è sicuramente una tua trovata per farmi arrabbiare.”

“Non so proprio di cosa parli; t'assicuro che sono innocente. Il software che dici tu deve far parte del pacchetto

originale. Assieme a un computer nuovo ci sono sempre un mucchio di cianfrusaglie. E che vuoi che ne sappia io, di cosa sia di moda adesso in Germania.”

Rut, ovviamente, non credeva a una sola parola di ciò che diceva suo padre, ma sapeva benissimo che non avrebbe avuto alcun senso insistere, assillandolo con altre domande: lui avrebbe continuato a negare ogni cosa. E se fosse stato veramente all’oscuro di tutto? Questa alternativa era ancora più emozionante: forse quel programma era stato installato per errore. Una svista. Magari si trattava perfino di software segreto... Vim stesso aveva detto di essere un programma assolutamente nuovo. Rut decise, per il momento, di tenere la cosa per sé.

“Va bene. Adesso devo andare a fare i compiti. Grazie ancora per la bellissima sorpresa. Ti mando un bacione.”

“Ops, arrivato! Allora buon divertimento, ma ricordati che i compiti non si fanno da sé mentre tu giochi al computer.”

“Chiaro. A dopo.”

Rut i compiti li faceva sempre. Quasi sempre. Anche adesso aveva tutta l’intenzione di sedere al tavolo e cominciarli. Forse, però, era doveroso dare almeno una breve occhiata al computer, per controllare che tutto fosse a posto. Funzionerà ancora quel buffo programma? E se il dialogo di prima fosse stato solo frutto dell’immaginazione?

“Ciao Rut.”

Di nuovo ‘Ciao Rut’: ma come facevano a sapere tutti, oggi, che era lei?

“Vim, tu hai detto poco fa di essere capace di raccontare.”

“Sì, so ascoltare e so raccontare.”

“Benissimo. Raccontami allora qualcosa. Dovrei fare i compiti, ma non ne ho la minima voglia.”

“Perché? La scuola non ti piace?”

“Beh, veramente. . . Nella mia classe mi trovo molto bene, ma il cambiamento di scuola non è stato così semplice.”

“Hai cambiato scuola?”

“Ah già, tu non puoi saperlo. Mio padre è stato mandato qui in Germania dalla sua azienda per tre anni. Ci disse che avevano bisogno di lui per lo sviluppo di non so quale software. E così siamo a Monaco dall’anno scorso.”

“Nel capoluogo della Baviera, la terza città tedesca, famosissima per la sua Oktoberfest.”



Lo skyline di Monaco di Baviera, con la vista delle Alpi sullo sfondo

“Ehi, questa è bella! Una foto di Monaco con le Alpi sullo sfondo. Da dove l’hai tirata fuori?”

“Oh beh, stava da qualche parte nei miei archivi. Ma dimmi, ti piace Monaco?”

“La città è fantastica ed ho già anche un mucchio di nuovi amici. Però le lezioni a scuola. . .”

“Perché? Che cosa non ti piace allora della scuola?”

“Si studia tanta roba inutile. . . Preferirei imparare qualcosa di più emozionante, qualcosa che possa servire anche nella vita vera. Figurati la matematica! Nessuno mi sa dire a che serve quell'accozzaglia di cose astratte. Tutti dicono che è importante per la mente, per il pensiero, ma io imparerei davvero più volentieri qualcosa di pratico.”

“Ma la matematica è pratica!”

“Ti prego, non mi parlare di quei problemi ‘pratici’ del tipo: se 3 bottiglie di birra costano 2 Euro, quanto costano 7 bottiglie? Ne ho già avuto abbastanza alle scuole medie!”

“Ma no, che credi? *Molto* più emozionante. Se vuoi, ti racconto qualcosa di un settore della matematica che trova applicazioni concretissime nella vita di ogni giorno e che affronta problemi la cui comprensione è facile. Inoltre, scommetto che perfino il tuo insegnante di matematica ne sa poco.”

“Guarda che se non si tratta delle solite due o tre formule, non mi meraviglierei affatto se il signor Liste non ne avesse ancora sentito parlare. In classe tutti dicono sempre: *‘Niente è più triste di mate con Liste’*. Con il mio insegnante, a casa, andava meglio. Ma dimmi, esiste davvero una matematica che sia allo stesso tempo utile e facile?”

“Calma! Non ho detto che la matematica sia facile. Ti ho solo detto che i problemi sono facili da comprendere. La matematica che ci sta dietro può essere molto difficile. Vi sono tuttavia problemi per i quali anche la matematica, fortunatamente, non è troppo complicata.”

“Benissimo. E di che si tratta?”

“Della pianificazione di un itinerario.”

## ---> Pianificare un itinerario?

“Pianificare un itinerario? E cioè? Ha qualcosa a che fare con i viaggi?”

“Sì. Immagina di voler andare, con i tuoi genitori, da Monaco ad Amburgo.”

“Ad Amburgo siamo già stati la scorsa estate, durante il nostro viaggio attraverso la Germania. Era stato papà ad insistere, dicendo che bisogna cominciare a conoscere la Germania, adesso che ci viviamo.”

“E dimmi, ti è piaciuta?”

“Immensamente! Il viaggio è stato veramente interessante: c'è talmente tanto da vedere! Ma sai che Monaco, in fondo, è la città che preferisco?”

“Ne sono proprio felice. Ammettiamo comunque che vogliate recarvi di nuovo ad Amburgo. Probabilmente deciderete, per prima cosa, se viaggiare in auto oppure in treno, dopodiché cercherete di viaggiare in modo ‘ottimale’. ‘Ottimale’ potrebbe significare per voi arrivare ad Amburgo nel minor tempo possibile, oppure nel modo più economico. Ma potreste anche essere interessati alla possibilità di fare una sosta, lungo il tragitto, in qualche bella città intermedia.”

“La mamma sicuramente insisterebbe per passare da Rothenburg. Dovrebbe essere una città medievale; la nostra vicina viene da là e gliene parla sempre.”

“Bene, allora potreste fare un salto a Rothenburg, sempre che questo non comporti un allungamento eccessivo del vostro viaggio. La scelta dei possibili percorsi ne risulterà

naturalmente ridotta. Sta a guardare: apro una finestra del *browser* per Internet. Anche on-line, infatti, puoi trovare programmi per la pianificazione degli itinerari.”

“Sei capace di lanciare da solo altri programmi e perfino di collegarti ad Internet?”

“Per me non c’è problema. Posso procedere?”

“Ma certo!”

“Bene. Un programma simile si trova, ad esempio, all’indirizzo [www.viamichelin.com](http://www.viamichelin.com); qui puoi vedere la pagina iniziale:”

### Eine Route planen

“Una sorta di navigatore? Intendi dire che ci dirà che strada fare? Mi chiedo se esista qualcosa del genere anche per l’Italia.”

“In Internet ormai si trovano programmi per tutte le principali nazioni, ma per te è sufficiente selezionare la lingua giusta in questa stessa pagina web.”

“I campi da riempire sono gli spazi bianchi al centro della pagina?”

“Esattamente. Adesso non resta che digitare ‘Monaco’ come città di partenza e ‘Amburgo’ come città di arrivo.

Dobbiamo ancora decidere se fargli cercare l'itinerario più veloce o quello più breve.”

“Possiamo anche provarli entrambi.”

“D'accordo, allora lasciamo che i risultati vengano visualizzati in due diverse finestre del browser: a sinistra il tragitto più rapido e a destra quello più corto. Ci sarebbero ancora un paio di ulteriori opzioni da specificare, ma per ora le ignoriamo.”



“Caspita, come ha fatto presto! E i due itinerari sono effettivamente diversi.”

“Sicuro. Il programma calcola i percorsi proposti a partire dalle lunghezze note delle singole strade e da stime statistiche dei loro tempi di percorrenza. L'itinerario più lungo ha un tempo di percorrenza minore perché utilizza maggiormente l'autostrada ed è meno soggetto a code.”

“E cosa viene preso in considerazione, esattamente, in questi diversi calcoli?”

“Non ne ho la più pallida idea! Purtroppo, nella maggior parte dei casi, questi programmi non svelano come facciano ad elaborare gli itinerari proposti. Soprattutto nel caso dell'itinerario con il minor tempo di percorrenza



non è chiaro quali dati vengano utilizzati. Qui servirebbero veramente informazioni sempre attuali circa i possibili fattori di intralcio del traffico. Ma queste informazioni non sono di solito a disposizione e dunque, in questo caso, si può solo sperare in una stima molto approssimativa. Così ci siamo già imbattuti in un problema pratico: come si stabiliscono i valori dei parametri che l'ottimizzazione richiede?"

"Il concetto di 'parametro' non mi è nuovo: l'ho già sentito nominare in matematica. Che cosa voleva dire?"

"Hai fatto molto bene a chiederlo. Siccome abbiamo già un browser aperto, diamo un'occhiata in Internet se troviamo un dizionario on-line da consultare in proposito."

"I miei compagni di classe cercano sempre con Google. Credo che l'indirizzo sia [www.google.com](http://www.google.com)."

"Giusto. Cerchiamo allora con Google un dizionario on-line. Eccone qui uno: non resta che introdurre il lemma 'parametro'..."

Paràmetro, s.m.

1) Matematica:

variabile ausiliaria che compare in funzioni o equazioni a fianco delle variabili effettive; ...

2) ...

"E per quale motivo si usano i parametri?"

"I parametri consentono di formulare e risolvere, in un colpo solo, intere classi di problemi. Dovendo poi affrontare un caso concreto, si sostituiscono ai parametri i rispettivi valori e si ottiene la risposta. Comodo, no? La formula risolutiva delle equazioni di secondo grado ne è un esempio. Invece di risolvere da principio ogni singola equazione quadratica, si utilizzano i parametri  $a$ ,  $b$  e  $c$  per scrivere la generica equazione  $ax^2 + bx + c = 0$ . La soluzione di questa equazione è espressa dalla famosa formula risolutiva, nei parametri  $a$ ,  $b$  e  $c$ ."



“A scuola ci hanno insegnato che se l'equazione è in forma canonica – come la tua – la soluzione è:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .”

“Se  $b^2 - 4ac \geq 0$ . Nei casi concreti, come ho detto, non si fa altro che sostituire ai parametri  $a$ ,  $b$ , e  $c$  i rispettivi valori. Per essere una a cui non piace la matematica, non te la sei cavata male! Ma lasciamo stare la matematica della scuola e torniamo al nostro problema della ricerca di un itinerario. Se vogliamo la strada più corta, la determinazione dei parametri necessari è un po' più semplice: si pone solo la questione se limitarsi alle autostrade o prendere in considerazione anche strade statali e provinciali.”

“Beh, in autostrada si fa notevolmente prima. Qui in Germania non ci sono nemmeno i limiti di velocità.”

“In generale no, ma in molti tratti non è consentito superare i 100 o i 120 Km orari.”

“Tuttavia, con un maggior numero di strade a disposizione, si troverebbe sicuramente un collegamento più breve.”

“Giusto. Lo dimostra l'esempio di prima: permettendo ogni tipo di strada, abbiamo ottenuto un percorso più breve.”

“Ma nessuno farebbe questa strada, perché viaggiare per la campagna richiederebbe troppo tempo.”

“Probabilmente hai ragione. La maggior parte delle persone sceglierebbe una via di mezzo, prendendo in considerazione sia la lunghezza del percorso che il tempo di percorrenza. Ma anche di questo potrebbe tener conto un programma come il nostro. Come puoi vedere, i parametri a disposizione consentono molta libertà.”

“Ma con troppa libertà va a finire che non so più se la strada proposta dal programma è davvero come la volevo io.”

“È vero: per lo meno se il navigatore non rivela con precisione quali criteri segue.”

“E come si fa, alla fine, a trovare la strada più breve? Deve essere molto difficile. Da dove si prendono tutti i dati? E come si calcola, ogni volta, il percorso più corto?”

“Piano! I due problemi sono di natura completamente diversa. La tua domanda circa la provenienza dei dati è certamente importante, ma diamo per scontato di avere già tutti i dati necessari, avendoli presi, ad esempio, dalle tabelle delle distanze di un atlante stradale. La ‘pianificazione degli itinerari’, in tedesco chiamata *Routenplanung*, si occupa principalmente della tua seconda domanda: come si trova una soluzione ottimale, quando i dati sono noti.”

“Ma che c’entra la matematica con tutto ciò? Quello che serve non è semplicemente un bravo programmatore? Nell’azienda dove lavora papà saprebbero senz’altro scrivere un bel software per risolvere questo problema.”

“Non è facile come può sembrare. Con una tale quantità di itinerari possibili da vagliare, occorre una buona idea per riuscire a risolvere il problema in un tempo ragionevole. Se solo si tentasse di passare in rassegna, uno dopo l’altro, ogni singolo percorso, il tempo richiesto sarebbe troppo lungo. Inoltre è proprio la matematica che sviluppa le tecniche che consentono di affrontare problemi analoghi, senza dover, ogni volta, ricominciare da capo.”

“Problemi analoghi?”

“Ma certo! Esistono a proposito tantissimi esempi. Per alcuni di essi si riconosce immediatamente che si tratta di problemi di *Routenplanung*, ma di fronte ad altri, t’assicuro che stenteresti a credere che ci possa essere il

benché minimo collegamento col problema della ricerca di un percorso ottimale.”

“Dai, non farla tanto lunga!”

“Dunque, il problema di trovare la via più breve per andare da un punto  $p$ , come partenza, ad un punto  $t$ , come traguardo, è chiamato dai matematici il *problema del cammino minimo*. A proposito, anche le Ferrovie dello Stato hanno bisogno di un algoritmo per la soluzione del problema del cammino minimo quando forniscono informazioni sui migliori collegamenti disponibili.”

“Hai detto algoritmo? Si tratta di un programma per computer, no?”

“Non proprio. Con il termine algoritmo si intende piuttosto il complesso delle idee che effettivamente stanno dietro il programma. Un algoritmo è indipendente dal linguaggio di programmazione nel quale verrà successivamente scritto il programma. In più, nel trovare un algoritmo ci si preoccupa solo del compito assegnato, tralasciando gli altri dettagli del programma, come l’acquisizione dei dati o la scrittura dei risultati. Guarda cosa dice il nostro dizionario on-line a proposito del lemma ‘Algoritmo’.”

Algoritmo, s.m.

procedimento di calcolo che, a partire da dati in ingresso, fornisce un risultato in uscita, dopo un numero finito di passaggi.

“Insomma: una specie di ricetta.”

“Se vuoi.”

“Quello che hai detto delle Ferrovie mi è chiaro adesso: all’algoritmo non importa se io viaggio in auto o in treno.”

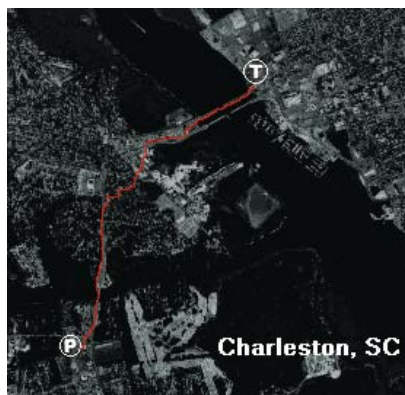
“Alto là. Non puoi cavartela così alla svelta: ci sono delle belle differenze! Con la ferrovia mica sali in treno, ti siedi, si parte e si va dove vuoi tu. Le linee ferroviarie sono rigidamente fissate.”

“Ma certo, eventualmente si cambia treno.”

“Già. E aspettare le coincidenze richiede tempo. Tempo che non dipende dalla distanza tra le città. Ma anche qui, nonostante queste difficoltà, è ancora possibile formulare la questione in termini di un problema di cammino minimo.”

“Okay, ma fin qui i due esempi che tu hai fatto non sono poi tanto diversi tra loro.”

“Hai ragione. Entrambi sono di tipo ‘immediatamente riconoscibile’. Ma che ne dici di quest’altro esempio: dal satellite è stata scattata una fotografia di una determinata regione della superficie terrestre; a partire dall’immagine, un programma dovrebbe adesso scoprire, nel modo più automatico possibile, una strada per andare da un punto di partenza  $p$  ad un traguardo  $t$ . Nella mia banca dati c’è una simile fotografia della città di Charleston negli Stati Uniti.”



Dati resi disponibili da U.S. Geological Survey, EROS Data Center, Sioux Falls, SD

“È chiaro che il programma deve sempre trovare le strade tra due punti, ma che c’entra la pianificazione degli itinerari? Qui, stando a quello che hai detto tu, non si tratta più di fornire il collegamento più breve.”

“In matematica non devi pensare sempre in modo così diretto. A volte devi prima ‘tradurre’ un po’ la nuova

questione. Il problema del satellite può essere formulato in termini di un problema di cammino minimo se si pensa ai singoli pixel dell'immagine come alle città dei nostri esempi precedenti e se si convertono le differenze di colore tra i pixel in distanze tra di esse."

"Non credo di aver capito."

"La cosa migliore è che, per adesso, io ti racconti qualcosa in generale sui diversi esempi. Se poi ti interesserà, ti spiegherò un paio di semplici concetti che sono fondamentali nella pianificazione degli itinerari e potremo ritornare anche sull'esempio della fotografia dal satellite."

"D'accordo. Tu rendi tutto così attraente che va a finire che, anche a casa, mi lascio rifilare dal mio computer una porzione extra di matematica. E va beh, che c'è ancora?"

"Un ulteriore settore dove la messa a punto di itinerari trova applicazione è, naturalmente, la pianificazione urbana. Qui si pone il problema di dove costruire nuove strade, autostrade o ferrovie per migliorare il traffico cittadino."

"Capisco... C'è dell'altro?"

"Finché vuoi! Un altro settore si occupa della determinazione dei percorsi ottimali per la raccolta dei rifiuti, la distribuzione della posta, la pulizia delle strade o lo sgombero delle stesse dalla neve."

"Sembra importante. Lo scorso inverno, sulle autostrade della Baviera, ci furono grossi problemi per l'intervento non immediato dei mezzi spartineve. Molti rimasero bloccati per ore sull'autostrada."

"La colpa non fu dei mezzi spartineve, ma di tutti quegli automobilisti che, nonostante gli avvertimenti, viaggiavano senza pneumatici invernali."

"A quel punto, nemmeno la migliore pianificazione degli itinerari serve più a qualcosa."

“È vero, ma perfino per la coordinazione delle operazioni di soccorso è stata chiamata in causa la pianificazione dei percorsi: pensa alle telecomunicazioni, ai telefoni cellulari o a Internet, per esempio.”

“Perché? Che cosa c’entrano queste cose con la messa a punto di un itinerario?”

“Non ti sei mai chiesta come vengono trasmessi i dati in Internet, oppure come si struttura la rete dei cellulari o, ancora, come si garantisce che i messaggi di posta elettronica o gli *sms* tra cellulari siano fatti pervenire, nel modo più efficiente possibile, dall’emittente al destinatario?”

“Veramente... no. Ma questa non è una questione puramente tecnica? Che c’entra allora la tua Routenplanung?”

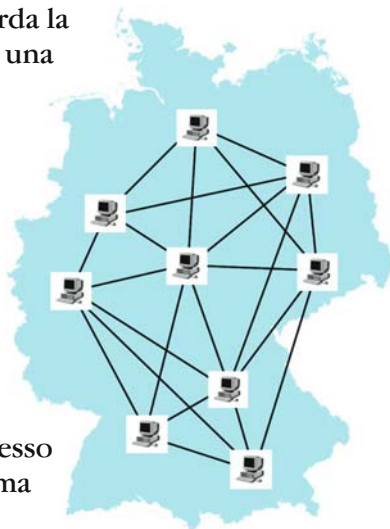
“Prova a riflettere sul modo in cui un messaggio di posta elettronica che tu spedisce dal tuo computer di Monaco finisce a Milano. Ciò accade, per prima cosa, inviando i dati che codificano il messaggio al tuo *provider*; quest’ultimo quindi li inoltra attraverso una serie di stazioni intermedie finché la tua e-mail non arriva a destinazione a Milano. Guarda qui: per quanto riguarda la Germania questa potrebbe essere una rappresentazione schematica dei principali nodi della rete.”

“Davvero graziosi i tuoi piccoli computer.”

“Essi simboleggiano tuttavia grandi apparati di calcolo.”

“Capisco. Considerando la rete nel suo complesso si origina sempre un problema di pianificazione di un itinerario. Solo che adesso non ci sono più strade tra città, ma connessioni tra computer.”

“Stessa cosa tra telefoni.”



“Ci sono ancora altri esempi?”

“Tè l’ho detto: ci sono problemi per i quali, a prima vista, non diresti affatto che si tratti sempre di pianificare un itinerario. Mettiamo ad esempio di voler costruire una casa.”

“Che c’entra con gli itinerari?”

“Se vogliamo costruire una casa, dobbiamo svolgere tutta una serie di lavori intermedi.”

“È chiaro: scavare le fondamenta e la cantina, poi i soffitti e molte altre cose, fino alla tappezzeria.”

“Esatto, ed è chiaro che non si possono compiere questi lavori in un qualsiasi ordine cronologico. Le fondamenta e la cantina devono essere completate *prima* del tetto e così via. Aspetta, qui c’è un semplice esempio con la durata di ogni lavoro – espressa in unità di tempo fittizie – e la dipendenza di ciascun lavoro dagli altri:”

<u>N°</u>	<u>Lavoro da svolgere</u>	<u>Durata</u>	<u>Lavori precedenti</u>
1	Scavo	5	—
2	Fondamenta	5	1
3	Opere murarie negli scantinati	10	1,2
4	Soffitto cantina	5	1,2,3
5	Opere murarie al piano terra	10	1, ... ,4
6	Soffitto primo piano	5	1, ... ,5
7	Struttura del tetto	10	1, ... ,6
8	Impianto idrico (grezzo)	5	1, ... ,6
9	Impianto elettrico (grezzo)	5	1, ... ,6
10	Riscaldamento (grezzo)	5	1, ... ,6
11	Impianti esterni	10	1, ... ,7
12	Copertura del tetto	20	1, ... ,7
13	Infissi	5	1, ... ,7,12
14	Intonacatura interna	10	1, ... ,10,12,13
15	Caldana	5	1, ... ,10,12, ... ,14
16	Essiccazione caldana	10	1, ... ,10,12, ... ,15
17	Intonacatura esterna	10	1, ... ,16
18	Giardinieri	10	1, ... ,17
19	Piastrellisti	5	1, ... ,10,12, ... ,16
20	Pittori	10	1, ... ,10,12, ... ,16,19
21	Installazioni idriche (rifiniture)	2	1, ... ,10,12, ... ,16,19
22	Elettricista (rifiniture)	2	1, ... ,10,12, ... ,16,19,20
23	Riscaldamento (rifiniture)	5	1, ... ,10,12, ... ,16,19,20
24	Finitura pavimenti	5	1, ... ,10,12, ... ,16,19, ... ,23
25	Porte interne	2	1, ... ,10,12, ... ,16,19, ... ,24
26	Trasloco	5	1, ... ,25

“In effetti, quando siamo arrivati qui, i lavori in casa non erano ancora finiti e prima di poter estrarre la roba dai pacchi ho dovuto aspettare che la mia camera fosse imbiancata e i mobili sistemati. Le prime settimane sono state davvero caotiche.”

“Problemi di questo tipo rientrano nell’ambito della *pianificazione di processo*. E tutti i problemi di pianificazione di processo possono essere riformulati in termini di problemi di Routenplanung. Anche nell’organizzazione di un concerto rock nascono questioni analoghe.”

“Come? Vuoi dire che Ligabue, prima di ogni concerto, si studia in camerino la pianificazione di un itinerario?”

“Lui personalmente no, ma i suoi manager sì. Tutta la preparazione del concerto, dalla scelta e l’affitto di una struttura idonea, la pubblicità, la prevendita dei biglietti, la costruzione del palco, l’installazione degli impianti audio e luci, fino alla stesura dell’ordine dei brani, tutto ciò costituisce sempre lo stesso tipo di problema.”

“Non è proprio facile da riconoscere. Poi me lo spieghi meglio.”

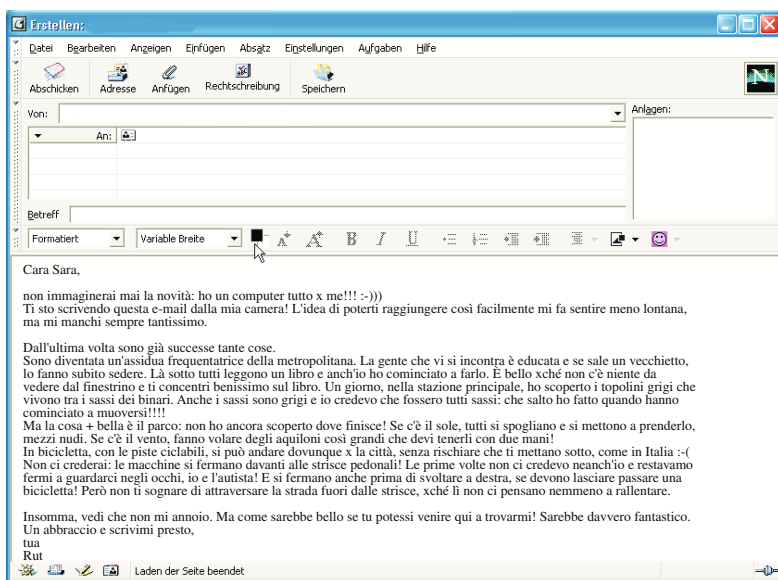
“Due ulteriori esempi sono: la foratura delle schede dei circuiti stampati – quelle usate in televisori, radio e computer, ma anche nelle lavatrici – e la datazione dei reperti archeologici. Il problema di stabilire in quale ordine debbano essere praticati i fori in una piastra conduttrice oppure quello di collocare in ordine cronologico i reperti degli scavi possono essere riformulati entrambi come problemi di Routenplanung.”

“Okay Vim, penso che per ora possa bastare. Gli esempi che hai fatto sono così diversi tra loro che nessuno penserebbe che questi problemi siano tutti riconducibili alla pianificazione di un itinerario. Domani devi assolutamente dirmi qualcosa di più! Adesso però voglio scrivere ancora una e-mail ai miei amici: devono sapere che da oggi anch’io sono on-line. A domani.”



20 Rut ne aveva abbastanza. Non perché trovasse noioso quello che Vim le raccontava, al contrario! Ma era impegnativo: così tante cose nuove e tutte in una volta. La matematica di scuola un vantaggio in questo l'aveva: non era mai così faticosa; spesso, tuttavia, nemmeno altrettanto avvincente.

Rut si prese qualcosa da bere dalla cucina e tornò al computer per scrivere ai suoi compagni di scuola. La stuzzicava proprio il pensiero di far sapere a tutti che adesso aveva un computer tutto suo. Infine scrisse anche a Sara a Milano e questa, naturalmente, fu la lettera più lunga di tutte.



## ---> Piacere, grafo

Rut, la sera, aveva finito per non parlare affatto di Vim a suo padre. Se lui insisteva nel dire di non conoscerlo o mostrava comunque di non volerne sapere, doveva proprio essere lei a raccontargli tutto? Nella migliore delle ipotesi, i suoi genitori avrebbero finito per ripeterle le solite, noiose prescrizioni riguardo al tempo che le era concesso stare davanti al computer. Meglio non toccare l'argomento. Sua madre, per di più, era stata a lungo contraria al fatto che lei avesse un computer personale. E se poi davvero Vim non fosse stato in origine destinato a lei, Rut? Allora suo padre avrebbe sicuramente cominciato a raccontare qualcosa sul segreto di fabbrica o sul copyright e lo avrebbe cancellato per sempre dal suo computer.

Anche a scuola Rut aveva certamente detto ai suoi compagni del computer nuovo, ma di Vim non aveva fatto parola con nessuno. Nemmeno a Martina, la sua migliore amica a Monaco, ne aveva parlato.

Quando le lezioni finalmente furono terminate, Rut corse a casa. Voleva assolutamente conoscere il seguito del racconto.

“Ciao Rut. Già qua? Come è andata a scuola?”

“Benone. Le solite cose. Niente di interessante. Ti posso fare una domanda? Una domanda, per così dire, personale?”

“Ma certo!”

“Di' un po': chi ti ha dato il nome che porti? Genitori non penso tu ne abbia, o mi sbaglio?”

“Beh, i miei programmatori sono per me un po' come genitori. Credo che Vim sia l'abbreviazione di 'Virtual Man'.”

“Mi piace di più Vim.”

“Anche a me.”

“Allora continuiamo con Vim! Mi racconti ancora qualcosa sulla pianificazione degli itinerari? Dai, parlami un altro po' di *Routenplanung*, come la chiami tu.”

“Volentieri. Per prima cosa, vorrei mostrarti come si *modellano* i problemi di *Routenplanung*. Sai cos'è un modello?”

“Certo. Un modello può essere, ad esempio, una copia, una riproduzione di qualcosa.”

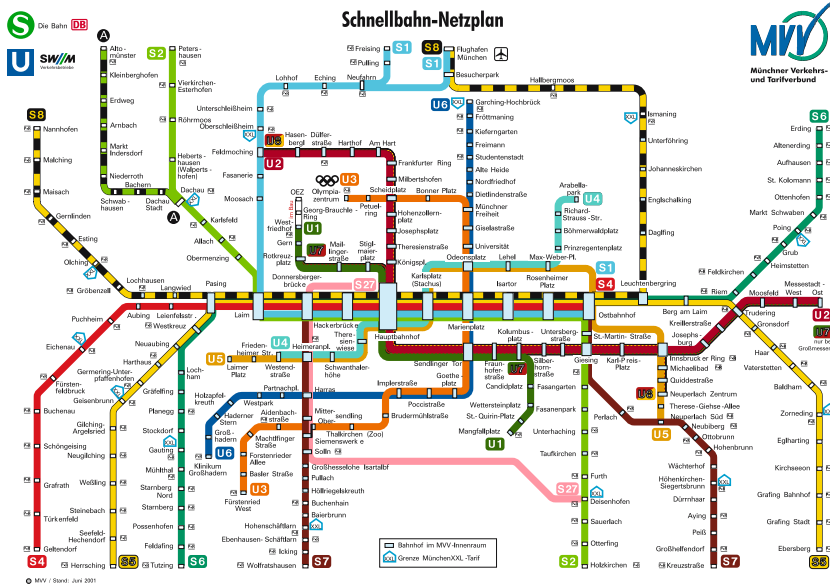
“Precisamente. In matematica questo concetto è particolarmente importante. Un cattivo modello non rappresenta abbastanza bene la realtà; può allora facilmente accadere che le affermazioni che si fanno sulla base del modello non siano di alcuna utilità nella pratica.”

“Intendi dire quando, ad esempio, il navigatore non tiene conto del fatto che certe strade sono sensi unici?”

“Esatto, perché in questo caso il tragitto minimo calcolato potrebbe non essere affatto percorribile in auto. Un modello non dovrebbe però neppure essere troppo complesso: esso dovrebbe rappresentare solo l'essenziale. Altrimenti non sarebbe più possibile ricavarne dei risultati, o ci vorrebbe troppo tempo prima di ottenere delle soluzioni.”

“È chiaro: se voglio andare da Monaco ad Amburgo, non mi servirà certo considerare il centro storico di Berlino.”

“Esattamente così. Allora, come si modella un problema di *Routenplanung*? In internet c'è un bell'esempio all'indirizzo <http://www.mvv-muenchen.de>.”



“La mappa della metropolitana di Monaco? Non vorrai raccontarmi che è un modello matematico!”



“Eccome, invece! Qui c’è uno schizzo della rete sotterranea e dei treni veloci di superficie di Monaco, ma il disegno non si orienta alle vere proporzioni della città. La vera tratta della linea U3 tra Marienplatz ed il Centro Olimpico non corre dapprima esattamente in direzione Nord, per poi fare di colpo una curva a gomito a sinistra e procedere dritta come un fuso in direzione ovest.”

“Certo, non corre esattamente così.”

“La rappresentazione con linee rette verticali, orizzontali e tutt’al più diagonali ha però il pregio di essere più chiara.”

“Dunque non si riproduce il vero percorso, ma lo si rappresenta in modo che esso sia più comprensibile a colpo d’occhio.”

“Esatto: una astrazione della realtà. La forma astratta scelta qui riveste un importante significato in tutti i problemi di pianificazione di un itinerario. In matematica, una cosa del genere si chiama *grafo*; eccoti una definizione: ”

Grafo  $G = (V, E)$

$G$  e’ composto da

$V$ , un insieme finito di *vertici* e da

$E$ , un insieme di coppie di elementi di  $V$ , i *lati*.

“Suona un po’ complicato. Che cosa vuole dire?”

“Dunque, un grafo – chiamiamolo  $G$  – possiede un insieme  $V$  di *vertici*, anche detti *nodi*. Nei problemi più comuni di Routenplanung, laddove si deve trovare un percorso tra due città diverse, i vertici rappresentano appunto le città.”

“Quindi anche le fermate nella mappa della metropolitana di Monaco.”

“Certo; oppure le uscite e gli snodi autostradali nel nostro viaggio Monaco-Amburgo. Ma i vertici potrebbero rappresentare anche i fori del trapano in una piastra conduttrice,

i pixel colorati dell'immagine dal satellite oppure reperti archeologici.” 25

“Ma se ad ogni pixel dell'immagine presa dal satellite corrisponde un vertice, otteniamo in questo modo una quantità pazzesca di vertici.”

“Ciò non sarebbe insolito nei problemi di questo tipo. Se nel viaggio Monaco-Amburgo, oltre alle autostrade, considerassimo anche le strade provinciali e comunali, allora otterremmo ugualmente tantissimi incroci e svincoli.”

“Dunque anche qui una montagna di vertici.”

“E oltre ai vertici c'è l'insieme  $E$  dei *lati*, a volte detti anche *spigoli*. I lati possono essere visualizzati meglio come collegamenti tra due vertici. Ma attenzione: questi collegamenti possono essere molto astratti! I lati possono rappresentare strade tra due città oppure tratti di linea della metropolitana tra due fermate nella cartina. Potrebbero però anche esprimere la vicinanza tra pixel confinanti nell'immagine presa dal satellite. In questo caso si otterrebbe un grafo a griglia come il seguente:”

