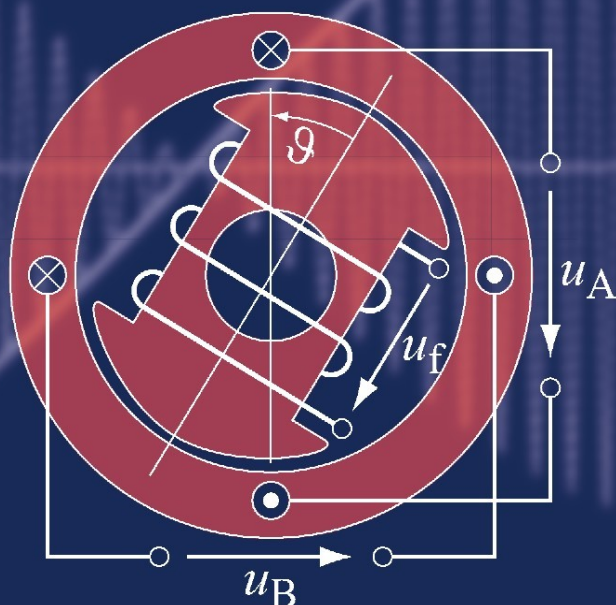


Ekbert Hering · Rolf Martin  
Jürgen Gutekunst · Joachim Kempkes

# Elektrotechnik und Elektronik für Maschinenbauer

2. Auflage



# Elektrotechnik und Elektronik für Maschinenbauer

Weitere Bände siehe  
[www.springer.com/series/3482](http://www.springer.com/series/3482)

Ekbert Hering • Rolf Martin  
Jürgen Gutekunst • Joachim Kempkes

# Elektrotechnik und Elektronik für Maschinenbauer

2. vollständig überarbeitete und aktualisierte Auflage

 Springer

Prof. Dr. Dr. Ekbert Hering  
Hochschule Aalen  
Beethovenstr.1  
73430 Aalen  
Deutschland  
ekbert.hering@htw-aalen.de

Prof. Dr. Dr. h.c. Rolf Martin  
Hochschule Esslingen  
Kanalstr. 33  
73728 Esslingen  
Deutschland  
rolf.martin@hs-esslingen.de

Unter Mitarbeit von:  
Dipl. - Ing. Klaus Bressler  
Dipl. - Ing. Alois Vogt

Dipl.-Ing. Jürgen Gutekunst  
Eichenweg 18  
72622 Nürtingen  
Deutschland  
jgutekunst@web.de

Prof. Dr. Joachim Kempkes  
Hochschule Würzburg-Schweinfurt  
Mechatroniklabor I  
Elektrische Aktoren  
Ignaz-Schön-Str. 11  
97421 Schweinfurt  
Deutschland  
joachim.kempkes@fhws.de

ISBN 978-3-642-12880-6                      e-ISBN 978-3-642-12881-3  
DOI 10.1007/978-3-642-12881-3  
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;  
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

*Einbandentwurf:* WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

# Vorwort zur zweiten, vollständig überarbeiteten Auflage

Im Maschinenbau werden die Anlagen und Maschinen immer komplexer, unter anderem weil immer mehr Elektrotechnik, Elektronik und Kommunikationstechnik eingebaut wird. Deshalb werden die Grundlagen dieser Bereiche und ihre praktischen Anwendungen im Maschinenbau immer wichtiger.

Die erste Auflage des erfolgreichen Standardwerkes für den Ingenieur wurde zu diesem Zweck völlig neu konzipiert und strukturiert. Die Grundlagen in Kapitel A wurden didaktisch überarbeitet, die Definitionen und Ableitungen der Formelzusammenhänge ausführlich dargestellt und mit Anwendungen praxisgerecht aufbereitet. Im nächsten Kapitel B wurden alle Grundlagen und Anwendungen der Halbleitertechnik zusammengefasst. Daran schließt sich das verbesserte Kapitel C über Leistungselektronik an. Völlig neu in das Werk aufgenommen wurden die sehr wichtigen Kapitel D: Elektrische Maschinen, Kapitel E: Antriebstechnik und Kapitel F: Energieversorgung. Diese Anwendungen werden auch vor den Hintergrund der zunehmenden Elektromobilität und einer Ressourcen schonenden Energieversorgung immer bedeutender. Diese Kapitel wurden von unserem neuen Autor, Prof. Dr. *Joachim Kempkes* von der Hochschule Würzburg-Schweinfurt in hervorragender Weise in Theorie und Praxis herausgearbeitet. Im nächsten Kapitel G werden die Sensoren und Aktoren behandelt, die im Maschinen- und Anlagenbau eine immer wichtigere Rolle spielen. Die vielfältigen Signale müssen zu den Auswerte- und Aktorstationen transportiert werden. Deshalb spielen die dazu notwendigen Kommunikationstechnologien eine wichtige Rolle, wie sie bei den Feldbussen vorliegt (Kapitel H). Das Werk schließt im Kapitel I mit der Messtechnik und ihren Anwendungen. Die meisten Kapitel enthalten Übungsaufgaben, mit denen der Leser seine Kenntnisse prüfen und vertiefen kann. Am Ende jedes Kapitels wird auf weiterführende Literatur verwiesen, durch die der Leser seine erworbenen Kenntnisse vertiefen kann.

Jeder Abschnitt ist in gleicher Weise gegliedert: Eine strukturierte Übersicht zeigt die Zusammenhänge auf, Beispiele verdeutlichen die Rechnungen und die Gedankengänge, Diagramme und Fotos zeigen anschaulich die Anwendungen.

Das Werk ist speziell für Maschinenbauingenieure geschrieben, die entweder noch studieren oder im Beruf elektronische Anwendungen in der Praxis einsetzen müssen. So ist dieses Werk ein Lehrbuch und ein praktisches Nachschlagewerk.

Interessanterweise wird dieses Werk auch von Wirtschaftsingenieuren und Mechatronikern wegen seines übersichtlichen Aufbaus, seines strukturierten Wissens und seiner didaktischen Konsistenz sehr geschätzt.

Zu danken haben wir zahlreichen Unternehmen, die uns durch Anschauungsmaterial und durch Beispiele im praktischen Einsatz unterstützt haben. Ganz besonderer Dank gilt dem Springer-Verlag, hier insbesondere Frau *Eva Hestermann-Beyerle* und Herrn Dr. *Hubertus von Riedesel*, die in gewohnter exzellenter Weise dieses Werk betreut haben. Ein herzliches Dankeschön gilt aber auch den Damen und Herren der Herstellung, die oft komplizierte Zeichnungen in eine optimale, lesegerechte und verständliche Form gebracht haben. Nicht vergessen möchten wir unsere Ehefrauen und Kinder, die uns mit viel Verständnis bei der Arbeit begleitet haben.

Wir hoffen, dass dieses völlig neu konzipierte Werk den Studierenden der Ingenieurwissenschaften, speziell den Maschinenbauern, aber auch den Wirtschaftsingenieuren und Mechatronikern, eine gute Hilfe bei der Erarbeitung des Wissens bietet und den Ingenieuren im Beruf ein wertvoller Begleiter bei den praktischen Umsetzungen sein wird. Gerne nehmen wir Kritik und Verbesserungsvorschläge aus dem Leserkreis entgegen und wünschen Spaß und Kenntnisgewinn mit diesem Werk.

Heubach, Esslingen, Nürtingen und Schweinfurt  
Juli 2011

Ekbert Hering  
Rolf Martin  
Jürgen Gutekunst  
Joachim Kempkes

# Inhaltsverzeichnis

<b>A Grundlagen der Elektrotechnik</b> .....	1
A.1 Physikalische Grundgesetze und Definitionen .....	1
A.1.1 Ladung .....	1
A.1.2 Spannung .....	2
A.1.3 Strom .....	3
A.1.4 Ohm'sches Gesetz .....	4
A.1.5 Widerstand .....	5
A.1.6 Arbeit und Leistung .....	6
A.1.7 Kirchhoff'sche Regeln .....	7
A.2 Gleichstromkreise mit linearen Komponenten .....	10
A.2.1 Zweipolquellen .....	10
A.2.2 Reihenschaltung von Widerständen .....	14
A.2.3 Parallelschaltung von Widerständen .....	15
A.2.4 Gemischte Schaltungen .....	16
A.2.5 Messung elektrischer Größen .....	23
A.3 Elektrisches Feld .....	28
A.3.1 Feldbegriff .....	28
A.3.2 Kondensator .....	29
A.3.3 Laden und Entladen von Kondensatoren .....	32
A.3.4 Energieinhalt des elektrischen Feldes .....	32
A.4 Magnetisches Feld .....	35
A.4.1 Feldbegriff .....	35
A.4.2 Kraftwirkungen im Magnetfeld .....	39
A.4.3 Materie im Magnetfeld .....	42
A.4.4 Magnetischer Kreis .....	46
A.4.5 Elektromagnetische Induktion .....	54
A.4.6 Selbstinduktion .....	58
A.4.7 Gegeninduktion .....	60
A.4.8 Ein- und Ausschalten von Stromkreisen mit Induktivitäten .....	62
A.4.9 Energieinhalt des magnetischen Feldes .....	63

A.5	Wechselstromkreise .....	66
A.5.1	Benennungen und Definitionen .....	66
A.5.2	Sinusförmige Ströme und Spannungen .....	69
A.5.3	Zeigerdiagramm .....	72
A.5.4	Widerstand, Spule und Kondensator bei sinusförmigem Wechselstrom .....	78
A.5.5	Wechselstromschaltungen von Widerstand, Spule und Kondensator .....	80
A.5.6	Blindstromkompensation .....	90
A.5.7	Schwingkreise .....	92
A.5.8	Ortskurven .....	99
A.5.9	Transformator .....	101
A.6	Drehstrom .....	115
A.6.1	Entstehung der Dreiphasenwechselspannung .....	115
A.6.2	Sternschaltung .....	117
A.6.3	Dreieckschaltung .....	121
<b>B</b>	<b>Halbleitertechnik .....</b>	<b>127</b>
B.1	Bauelemente .....	127
B.1.1	Leitungsmechanismen .....	127
B.1.2	Dioden .....	136
B.1.3	Transistoren .....	145
B.1.4	Feldeffekttransistoren (FET) .....	154
B.1.5	Thyristoren und Triacs .....	168
B.1.6	Optoelektronik .....	171
B.2	Analoge integrierte Schaltungen .....	193
B.2.1	Operationsverstärker .....	193
B.2.2	Weitere analoge integrierte Schaltungen .....	197
B.2.3	DA- und AD-Wandler .....	200
B.3	Digitale integrierte Schaltungen .....	211
B.3.1	Logische Verknüpfungen und Schaltzeichen .....	212
B.3.2	Logikfamilien .....	216
<b>C</b>	<b>Leistungselektronik .....</b>	<b>223</b>
C.1	Bauelemente der Leistungselektronik .....	223
C.1.1	Passive Bauelemente .....	224
C.1.2	Aktive Bauelemente .....	245
C.2	Leistungselektronik in der Praxis .....	257
C.2.1	Anwendung passiver Bauelemente .....	257
C.2.2	Aktorsteuerung .....	260
C.2.3	Brückenschaltungen .....	267
C.2.4	Unterbrechungsfreie Stromversorgungen (USV) .....	274
C.2.5	Spannungswandler .....	280



<b>D Elektrische Maschinen</b>	293
D.1 Wirkungsprinzipien elektromechanischer Energiewandler	293
D.1.1 Elektrodynamisches Prinzip	293
D.1.2 Kräfte auf Grenzflächen	295
D.1.3 Prinzipieller Aufbau rotierender elektrischer Maschinen	296
D.2 Leistungsbilanz	299
D.3 Ausführungsvarianten	300
D.4 Ausnutzung und Baugröße	301
D.5 Gleichstrommotor	307
D.5.1 Prinzipieller Aufbau	307
D.5.2 Aufbau des Ankers	308
D.5.3 Kommutierung	311
D.5.4 Induzierte Spannung und Drehmoment	313
D.5.5 Betriebsverhalten	316
D.5.6 Reihenschlussmaschine/Universalmotor	319
D.5.7 Drehzahlverstellung des Universalmotors	322
D.5.8 Typische Daten von Gleichstrommaschinen	323
D.6 Synchronmotor	326
D.6.1 Synchronmotor als elektronisch kommutierter Gleichstrommotor	327
D.6.2 Wechselfelder und Drehfelder	332
D.6.3 Drehfeldwicklungen	335
D.6.4 Ersatzschaltbild und Zeigerdiagramm	338
D.6.5 Drehmoment der Vollpolmaschine	341
D.6.6 Permanent erregter Synchronservomotor	342
D.6.7 Synchronmotoren mit Zahnspulenwicklung	346
D.6.8 Reluktanzmotor	347
D.6.9 Schrittmotoren	350
D.6.10 Klauenpolgenerator („Lichtmaschine“)	351
D.7 Asynchronmotor	353
D.7.1 Bedeutung der Asynchronmaschine	353
D.7.2 Aufbau und Ersatzschaltbild	354
D.7.3 Stromortskurve der Asynchronmaschine	359
D.7.4 Drehmoment und Kloss'sche Formel	362
D.7.5 Drehzahlverstellung der Asynchronmaschine	364
D.7.6 Einphasen-Asynchronmotor	368
<b>E Antriebstechnik</b>	373
E.1 Prozessbeeinflussung durch elektrische Antriebe	373
E.2 System „Arbeitsmaschine – Antriebsmaschine“	374
E.3 Betriebsarten	375
E.4 Bauformen, Schutzarten, Kühlung, Isolation	377
E.4.1 Bauformen	377
E.4.2 Schutzarten	378
E.4.3 Wärmeklassen und Kühlung	379

E.5	Wirkungsgradklassen .....	382
E.6	Optimale Getriebeübersetzung .....	383
E.6.1	Optimale Getriebeübersetzung ohne Drehzahl-Begrenzung .....	384
E.6.2	Optimale Getriebeübersetzung mit begrenzter Lastdrehzahl .....	386
E.6.3	Optimale Getriebeübersetzung mit begrenzter Motordrehzahl .....	388
E.7	Servoantriebe .....	388
E.7.1	Struktur und Komponenten eines Servoantriebs .....	390
E.7.2	Anforderungen .....	391
E.7.3	Sensoren .....	392
E.8	Aktorsysteme für Massenströme (Stellantriebe) .....	395
E.9	Generatorkonzepte für Windkraftanlagen .....	401
E.9.1	Grundlagen .....	401
E.9.2	Polumschaltbare Asynchrongeneratoren .....	403
E.9.3	Doppelt-gespeister Asynchrongenerator .....	403
E.9.4	Synchrongenerator .....	407
<b>F</b>	<b>Elektrische Energieversorgung .....</b>	<b>409</b>
F.1	Energieerzeugung .....	410
F.1.1	Primärenergie .....	410
F.1.2	Belastungskurven .....	411
F.1.3	Kraftwerke .....	413
F.2	Energieübertragung .....	421
F.2.1	Übertragungssysteme .....	421
F.2.2	Drehstromnetze .....	423
F.2.3	Netzstrukturen .....	424
F.2.4	Verbundbetrieb .....	424
F.3	Schutzmaßnahmen .....	425
F.4	Niederspannungsschaltanlagen .....	429
<b>G</b>	<b>Sensoren und Aktoren .....</b>	<b>433</b>
G.1	Sensoren .....	433
G.1.1	Grundlagen .....	433
G.1.2	Weg- und Positions-Sensoren .....	435
G.2	Aktoren .....	460
G.2.1	Hydraulische Aktoren .....	461
G.2.2	Pneumatische Aktoren .....	463
G.2.3	Piezo-Steller .....	464
G.3	Anschluss technik .....	467
G.3.1	Aktorstecker .....	467
G.3.2	Sensorstecker .....	468
G.3.3	Standardisierung der Steckerbelegung und die Vorteile .....	469

<b>H</b>	<b>Feldbusse</b>	471
H.1	Grundlagen zu Feldbussen	474
H.1.1	Topologie von Feldbussen	474
H.1.2	Allgemeine Anforderungen an Feldbussysteme	475
H.2	Standard-Feldbusse	476
H.2.1	Profibus	478
H.2.2	CAN-Bus/DeviceNet	482
H.2.3	AS-Interface	488
H.2.4	Interbus-S	490
H.2.5	CC-Link	493
H.3	Ethernet basierende Feldbusse	494
H.3.1	Grundlegendes zur Ethernet-Kommunikation	496
H.3.2	TCP/IP	503
H.3.3	ProfiNet	504
H.3.4	Ethernet/IP	506
H.4	IO-Link	509
<b>I</b>	<b>Elektrische Messtechnik</b>	515
I.1	Grundlagen	515
I.1.1	Definitionen und Begriffe	515
I.1.2	Einteilung elektrischer Messgeräte	518
I.1.3	Übersicht über die Darstellung der Messwerte	519
I.1.4	Messfehler, Genauigkeit und Empfindlichkeit	519
I.2	Messung von Spannung und Strom	526
I.2.1	Gleichstromkreis	526
I.2.2	Wechselstromkreis	528
I.2.3	Zeitlich veränderliche Spannungen	531
I.3	Messung von Widerständen	533
I.3.1	Messung Ohm'scher Widerstände im Gleichstromkreis	533
I.3.2	Messung von Blind- und Scheinwiderständen im Wechselstromkreis	535
I.4	Arbeitsmessung	537
I.5	Leistungsmessung	538
I.6	Zeit- und Frequenzmessung	538
I.6.1	Elektronischer Zähler	538
I.6.2	Zeit- und Frequenzmessung	540
	<b>Lösungen der Übungsaufgaben</b>	543
	<b>Sachverzeichnis</b>	561

# Über die Autoren

**Dipl.-Ing. Jürgen Gutekunst** Der Berufseinstieg erfolgte 1984 bei SEL in Zuffenhausen im Bereich der Flugzeugnavigation. Seit 1990 leitete er bei der Fa. Gebr. Heller GmbH in Nürtingen die Hardware-Entwicklung, bevor er 1999 die technische Geschäftsleitung bei Murrelektronik übernommen hat. Seit 2006 ist er bei der Fa. Balluff GmbH mit dem Auf- und Ausbau des neuen Geschäftsbereiches Networking und Connectivity beauftragt und in verschiedenen Arbeitskreisen zum Thema „dezentrale Installationstechnik“ tätig.

**Prof. Dr. rer. nat. Dr. rer. pol. Ekbert Hering** Er war über 10 Jahre Rektor der Hochschule Aalen und verfügt über eine über 30 Jahre währende Lehrererfahrung. Er hat sich seit dem Erscheinen des Buches „Physik für Ingenieure“ als erfolgreicher Autor von Fach-, Sach- und Lehrbüchern einen Namen gemacht. Der Name Hering steht für die Fähigkeit, mit Hilfe eines kompetenten Autorenteam's Themengebiete vorbildlich strukturiert und praxisnah aufzuarbeiten.

**Prof. Dr.-Ing. Joachim Kempkes** Während seiner Assistentenzeit am Institut für Elektrische Maschinen der RWTH Aachen beschäftigte er sich ab 1987 mit der Optimierung von Servomotoren. Danach war er bei der Siemens AG in Nürnberg ab 1992 als Entwicklungsingenieur im Bereich Bahnantriebe tätig und ab 1994 als Entwicklungsleiter für den Bereich Stellantriebe verantwortlich. 1997 erfolgte der Ruf an die Fachhochschule Würzburg-Schweinfurt für das Lehrgebiet Elektromechanische Energiewandlung und Mechatronische Systeme. Dort leitet er in Schweinfurt das „Mechatroniklabor I - Elektrische Aktoren“.

**Prof. Dr. rer. nat. Dr. h. c. Rolf Martin** In einer typischen Laufbahn des zweiten Bildungswegs folgte auf eine Mechanikerlehre ein Maschinenbau-Studium an der Staatlichen Ingenieurschule Esslingen und anschließend ein Physik-Studium an der Universität Stuttgart mit Schwerpunkt Halbleiterphysik. Als Professor an der Hochschule Esslingen konnte er in über 30 Jahren der Lehre in Physik und Optoelektronik seine Fähigkeiten zur anschaulichen Vermittlung technisch-naturwissenschaftlicher Zusammenhänge weiterentwickeln.

# Kapitel A

## Grundlagen der Elektrotechnik

### A.1 Physikalische Grundgesetze und Definitionen

#### A.1.1 Ladung

Die elektrischen Erscheinungen gehen zurück auf die Existenz elektrischer Ladungen. Ob ein Körper elektrisch geladen ist kann man beispielsweise daran erkennen, dass er auf andere geladene Körper eine Kraft ausübt oder dass er in elektrischen und magnetischen Feldern eine Kraft erfährt.

Es gibt zwei Arten elektrischer Ladungen, die als *positive* und *negative* Ladung bezeichnet werden. Zwischen den verschiedenen Ladungstypen treten folgende Wechselwirkungen auf:

Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an.

Die elektrische Ladung ist quantisiert, das bedeutet, dass die Ladung  $Q$ , die ein Körper trägt, immer ein ganzzahliges Vielfaches der *Elementarladung*  $e$  ist:

$$Q = Ne \quad (\text{A-1})$$

mit  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$ .

Die Maßeinheit der Ladung ist das *Coulomb* oder die *Ampere-Sekunde*:

$$[Q] = 1 \text{ C} = 1 \text{ As}.$$

Die elektrische Ladung ist stets an Materie gebunden. Die Träger der elektrischen Ladung sind die Elementarteilchen, aus denen die Atome aufgebaut sind. Beispielsweise tragen die *Protonen* im Atomkern jeweils eine *positive* Elementarladung, während die *Elektronen* in der Atomhülle jeweils eine *negative* Elementarladung tragen. Insgesamt ist ein Atom elektrisch neutral, da die Zahl der positiven Elementarladungen im Kern so groß ist wie die Zahl der negativen in der Elektronenhülle.

Ist ein Körper geladen, so bedeutet das stets, dass dieses Gleichgewicht gestört ist und zusätzliche Ladungen aufgebracht bzw. Ladungen von dem Körper entfernt wurden. Wird beispielsweise ein Glasstab mit einem Leder kräftig gerieben, dann werden Elektronen abgestreift und der Glasstab bleibt positiv geladen zurück (Vorzeichendefinition nach *Benjamin Franklin*).

### A.1.2 Spannung

Eine räumlich verteilte Ansammlung elektrischer Ladungen spannt ein *elektrisches Feld* auf, d. h. ein Raumgebiet, in dem auf eine Ladung eine Kraft ausgeübt wird (mehr zum Feldbegriff in Abschn. A.3). Die Kraft auf eine *positive Probeladung*  $Q_0$  wird bestimmt durch die elektrische *Feldstärke*  $E$  am Ort der Probeladung:

$$\mathbf{F} = Q_0 \mathbf{E} \quad (\text{A-2})$$

Wird die Ladung  $Q_0$  von einem Ort 1 längs einer beliebigen Kurve zum Ort 2 verschoben, dann erfordert dies die Arbeit

$$W_{12} = - \int_1^2 \mathbf{F} \, ds = -Q_0 \int_1^2 \mathbf{E} \, ds \quad (\text{A-3})$$

Ist diese Arbeit positiv, dann liegt der Punkt 2 auf höherer potenzieller Energie als der Punkt 1, wobei gilt:

$$E_{\text{pot}, 2} - E_{\text{pot}, 1} = W_{12}. \quad (\text{A-4})$$

Die Verschiebearbeit  $W_{12}$  ist nach Gl. (A-3) abhängig von der Probeladung  $Q_0$ . Eine Größe, die nur abhängig ist vom vorhandenen elektrischen Feld ist die *elektrische Spannung*

$$\begin{aligned} U_{12} &= \int_1^2 \mathbf{E} \, ds = -\frac{W_{12}}{Q_0} \\ &= \frac{E_{\text{pot},1}}{Q_0} - \frac{E_{\text{pot},2}}{Q_0} = \varphi_1 - \varphi_2. \end{aligned} \quad (\text{A-5})$$

Die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten 1 und 2 ist also identisch mit der Arbeit, welche die Feldkräfte verrichten, wenn sie die Ladungsmenge  $Q = 1 \text{ C}$  von 1 nach 2 bewegen.

Die Einheit der Spannung ist das Volt:

$$[U] = 1 \text{ V} = 1 \text{ J/C} = 1 \text{ J/(As)}.$$

Mit  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  bezeichnet man die *Potenziale* der Punkte 1 und 2. Deren Absolutwert kann willkürlich festgelegt werden. Die Spannung als Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten des elektrischen Feldes ist unabhängig vom Absolutwert des Potentials. Ist das Potenzial  $\varphi_1$  des Punktes 1 höher als das Potenzial  $\varphi_2$  des Punktes 2, dann ist die Spannung  $U_{12}$  positiv.

In einer Schaltung wird meist einem Punkt das Bezugspotenzial  $\varphi = 0$  zugeordnet. Dieser Punkt wird auch als *Masse* bezeichnet. In der Regel ist die Masse mit dem Gehäuse des elektrischen Gerätes verbunden, das seinerseits *geerdet* ist, also auf gleichem Potenzial wie die Erde liegt. Dies verhindert, dass gefährliche Potenzialunterschiede zwischen Gehäuse und Benutzer entstehen können.

Aufgrund einer Spannung zwischen zwei Punkten werden sich bewegliche positive Ladungsträger vom Ort des höheren Potentials (höhere potenzielle Energie) zum Ort des niedrigeren Potentials (niedrigere potenzielle Energie) bewegen: es fließt ein elektrischer Strom.

### A.1.3 *Strom*

Ladungsträger, die sich beispielsweise durch einen Leiter bewegen, bilden einen elektrischen Strom. Bewegt sich an einer bestimmten Stelle des Leiters in der Zeit  $t$  gleichmäßig die Ladungsmenge  $Q$  vorbei, dann fließt ein *Gleichstrom* der *Stromstärke* (meist kurz *Strom*)

$$I = \frac{Q}{t} \quad (\text{A-6})$$

Die Einheit der Stromstärke ist das Ampere:  $[I] = 1 \text{ A}$ . Sie ist eine Basiseinheit im SI-System:

1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stromes, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 m voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 m Leiterlänge die Kraft  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton hervorruft.

Fließt die Ladung nicht gleichmäßig, so ist die Stärke eines zeitlich veränderlichen Stromes

$$i(t) = \frac{dQ}{dt}. \quad (\text{A-7})$$

Für die zwischen den Zeitpunkten  $t_1$  und  $t_2$  transportierte Ladung gilt:

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t) dt. \quad (\text{A-8})$$

Wird die Stromstärke  $I$  auf den Querschnitt  $A$  bezogen, durch den der Strom fließt, dann ergibt sich die *Stromdichte*

$$J = \frac{I}{A}, \quad (\text{A-9})$$

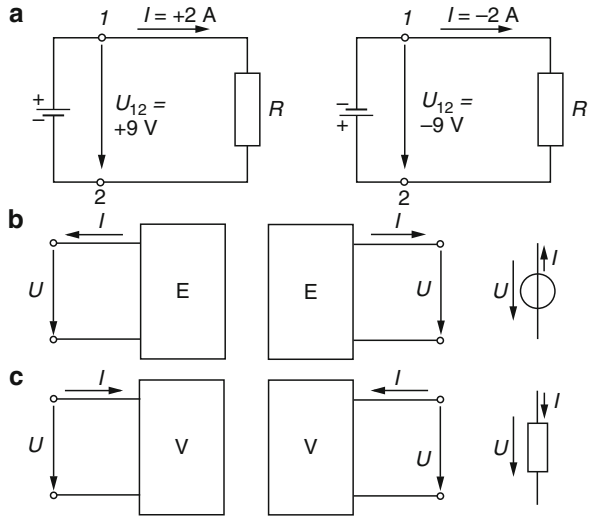
mit der Einheit  $[J] = 1 \text{ A/m}^2$ .

Die Stromdichte in einem Draht darf einen bestimmten Grenzwert nicht überschreiten. Hinweise zur *Strombelastbarkeit* von Kabeln finden sich in DIN VDE 0298, Teil 4.

Der *Richtungssinn* des elektrischen Stromes stimmt nach DIN EN 60375 mit der Bewegungsrichtung *positiver* Ladungsträger überein. Diese Richtung wird auch als *technische Stromrichtung* bezeichnet. Durch diese an sich willkürliche Festlegung ergibt sich, dass in metallischen Leitern bei denen der Ladungstransport auf der Bewegung negativ geladener Elektronen beruht, die Bewegung der Ladungsträger entgegengesetzt zum Richtungssinn des Stromes erfolgt.

In einer Schaltung wird für den Strom ein *Bezugssinn* gewählt, der durch einen Bezugspfeil in den Schaltplan eingezeichnet wird (Bild A-1a). Ist der Strom positiv, dann stimmen Bezugssinn und Richtungssinn überein. Bei negativem Strom ist die Stromrichtung dem Bezugspfeil entgegengesetzt gerichtet.

**Bild A-1** Pfeilsysteme,  
**a)** Strom – und Spannungspfeile mit verschiedenen Vorzeichen,  
**b)** Erzeugerpfilsystem mit idealer Spannungsquelle als Anwendungsbeispiel,  
**c)** Verbraucherpfilsystem mit Widerstand zur Veranschaulichung



Darüberhinaus unterscheidet man das *Erzeuger-* und *Verbraucherpfilsystem* (Bild A-1b und c). Bei einem Erzeuger sind Strom- und Spannungspfeil entgegengesetzt gerichtet. Bei einem Verbraucher haben Strom- und Spannungspfeil dieselbe Richtung. Diese Festlegung hat auch Konsequenzen hinsichtlich der umgesetzten Leistung (Abschn. A.1.6).

### A.1.4 Ohm'sches Gesetz

G.S. *Ohm* fand durch viele Experimente, dass bei metallischen Leitern der Strom  $I$  proportional zur angelegten Spannung  $U$  wächst (lineare Kennlinie). Dieser Sachverhalt wird als Ohm'sches Gesetz bezeichnet:

$$\begin{aligned} I &\sim U, \\ I &= GU = U/R. \end{aligned} \tag{A-10}$$

Die Proportionalitätskonstanten im Ohm'schen Gesetz sind:

- $R$ : Widerstand,
- $G$ : Leitwert.

Das Ohm'sche Gesetz ist für Metalle und Elektrolyte bei konstanter Temperatur gut erfüllt. Für andere Werkstoffe und Bauteile (beispielsweise Halbleiterdioden, Gasentladungsröhren) ist die Strom-Spannungs-Kennlinie nicht linear.



### A.1.5 Widerstand

Der elektrische Widerstand ist ein Maß für die Hemmung des Ladungsträgertransportes durch ein Bauteil. Durch Umformung von Gl. (A-10) folgt:

$$R = \frac{1}{G} = \frac{U}{I}. \quad (\text{A-11})$$

Der elektrische Widerstand beträgt 1 Ohm, wenn zwischen zwei Punkten eines Leiters beim Spannungsabfall 1 Volt der Strom 1 Ampere fließt.

Die Einheit des Widerstandes ist das *Ohm*:

$$[R] = 1\Omega = 1\text{ V/A};$$

die Einheit des Leitwertes ist das *Siemens*:

$$[G] = 1\text{ S} = 1\Omega^{-1} = 1\text{ A/V}.$$

In Schaltplänen wird der Widerstand durch ein offenes Rechteck symbolisiert (Bild A-1).

#### Beispiel

A-1: Wie groß ist der Widerstand in der Schaltung von Bild A-1?

Lösung:

$$R = \frac{U_{12}}{I} = \frac{9\text{ V}}{2\text{ A}} = 4,5\Omega, \quad \text{oder}$$

$$R = \frac{-9\text{ V}}{-2\text{ A}} = 4,5\Omega.$$

Hinweis: Der Widerstand ist stets positiv.

Ist der Widerstand eines Bauteils nicht konstant, dann kann ein differentieller Widerstand (Kehrwert der Steigung im  $I$ - $U$ -Diagramm) definiert werden:

$$r = \frac{dU}{dI} \quad (\text{A-12})$$

Der Widerstand eines *linearen* Leiters (konstanter Querschnitt  $A$ , Länge  $l$ ) ist

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad (\text{A-13})$$

Die materialabhängige Proportionalitätskonstante  $\rho$  ist der *spezifische Widerstand* oder die *Resistivität*. Zahlenwerte ausgewählter Werkstoffe sind in Tabelle A-1 zusammengestellt.

**Tabelle A-1** Spezifischer elektrischer Widerstand  $\rho$ , Leitfähigkeit  $\gamma$  und Temperaturkoeffizient  $\alpha$  bei  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$

Werkstoff	$\rho$ in $\Omega \text{ mm}^2/\text{m}$	$\gamma$ in $\text{S m}/\text{mm}^2$	$\alpha$ in $10^{-3} \text{ K}^{-1}$
Aluminium	0,028	36	3,8
Blei	0,21	4,8	4
Eisen	0,10	10	4,5
Gold	0,023	43	3,8
Grauguss	0,80	1,2	1,9
Konstantan	0,50	2,0	0,03
Kupfer	0,0178	56	3,9
Messing	0,07 bis 0,08	12 bis 14	1,6
Nickelin	0,43	2,3	0,1
Silber	0,016	62	4,2
Stahl (0,1 % C, 0,5 % Mn)	0,13	7,7	4,5
Zink	0,063	16	4,2
Zinn	0,11	9,1	4,6

Für den Leitwert gilt:

$$G = \gamma \frac{A}{l} \quad (\text{A-14})$$

dabei ist  $\gamma = 1/\rho$  die elektrische *Leitfähigkeit*.

Der spezifische elektrische Widerstand  $\rho$  und damit auch der Widerstand  $R$  sind temperaturabhängig. Für metallische Leiter gilt näherungsweise:

$$\begin{aligned} \rho(\vartheta) &\approx \rho_{20}[1 + \alpha(\vartheta - 20^\circ\text{C})], \\ R(\vartheta) &\approx R_{20}[1 + \alpha(\vartheta - 20^\circ\text{C})]. \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

$R_{20}$  bzw.  $\rho_{20}$  sind Widerstand bzw. Resistivität bei  $\vartheta = 20^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  ist der *Temperaturkoeffizient* des Widerstandes (Tabelle A-1). Der Temperaturkoeffizient gibt die relative Widerstandsänderung pro  $\Delta T = 1 \text{ K}$  Temperaturänderung an:

$$\alpha = \frac{\Delta R}{R \Delta T} = \frac{\Delta \rho}{\rho \Delta T} \quad (\text{A-16})$$

Nichtmetallische Werkstoffe und Flüssigkeiten zeigen eine andere Abhängigkeit des Widerstandes von der Temperatur. Insbesondere bei Halbleitern fällt der Widerstand mit steigender Temperatur.

### A.1.6 Arbeit und Leistung

Wenn sich ein Ladungsträger in einem elektrischen Feld bewegt und dabei die Potenzialdifferenz oder Spannung  $U$  durchquert, so hat nach Gl. (A-5) das Feld an der Ladung die Arbeit  $W = QU$  verrichtet. Fließt ein Strom der Stärke  $i(t)$ , dann ist mit Gl. (A-7) die Arbeit

$$W = U \int i(t) \, dt \quad (\text{A-17})$$

und speziell bei Gleichstrom:

$$W = U I t, \quad (\text{A-18})$$

mit der Einheit  $[W] = 1 \text{ J} = 1 \text{ VAs}$ .

Die umgesetzte Leistung ist mit  $P = dW/dt$

$$P = U I, \quad (\text{A-19})$$

mit der Einheit  $[P] = 1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ VA}$ .

Ein Zweipol kann Leistung entweder abgeben oder aufnehmen. Beispielsweise gibt eine Autobatterie während des Startens Leistung ab, sie ist im Sinne von Bild A-1b ein *Erzeuger*; wenn die Batterie während der Fahrt von der Lichtmaschine geladen wird, nimmt sie Leistung auf, sie ist nach Bild A-1c ein *Verbraucher*. Werden die in Bild A-1b und c festgelegten Vorzeichen für Strom und Spannung beachtet, dann wird nach Gl. (A-19) die von einem Verbraucher aufgenommene Leistung positiv, die von einem Erzeuger abgegebene negativ.

In einem stromdurchflossenen Widerstand geben die Ladungsträger die ihnen zugeführte Energie durch Stöße an das Kristallgitter ab, d. h. es wird Wärme erzeugt. Durch Einsetzen des Ohm'schen Gesetzes Gl. (A-10) in Gl. (A-19) kann diese *Joule'sche Wärme* wie folgt berechnet werden:

$$P = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (\text{A-20})$$

### Beispiel

A-2: Welche Wärmeleistung wird im Widerstand der Schaltung von Bild A-1 erzeugt?

Lösung:

$$P = U I = 9 \text{ V} \cdot 2 \text{ A} = 18 \text{ W}, \quad \text{oder}$$

$$P = I^2 R = (2 \text{ A})^2 \cdot 4,5 \Omega = 18 \text{ W}, \quad \text{oder}$$

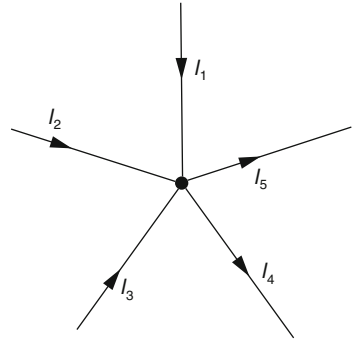
$$P = U^2 / R = (9 \text{ V})^2 / 4,5 \Omega = 18 \text{ W}.$$

## A.1.7 Kirchhoff'sche Regeln

**Knotenregel** Treffen verschiedene Leitungen eines Netzwerkes an einem *Knoten* zusammen (Bild A-2), dann muss aus Gründen der Ladungserhaltung die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden sein. Für den Knoten in Bild A-2 gilt also:

$$I_1 + I_2 + I_3 = I_4 + I_5.$$

**Bild A-2** Knoten eines Netzes



Versieht man die Ströme mit Vorzeichen (z. B. positiv für zufließende, negativ für abfließende), dann lautet das *erste Kirchhoff'sche Gesetz*:

$$\sum_k I_k = 0. \quad (\text{A-21})$$

Die Summe aller vorzeichenbehafteten Ströme, die in einen Knoten münden, ist null.

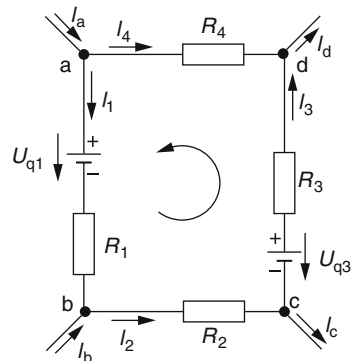
Für den Knoten in Bild A-2 gilt damit:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0.$$

**Maschenregel** Ausgehend von einem Netzknoten kann man immer auf einem geschlossenen Weg zum Ausgangspunkt zurückkehren, ohne dass ein Pfad zweimal durchlaufen wird. Ein solcher geschlossener Weg wird als *Masche* bezeichnet.

In der Masche von Bild A-3 seien die Potenziale der vier Eckpunkte  $\varphi_a$ ,  $\varphi_b$ ,  $\varphi_c$  und  $\varphi_d$ . Nach Gl. (A-5) gilt für die Spannungen zwischen den Eckpunkten:

$$\begin{aligned} U_{ab} &= \varphi_a - \varphi_b, \\ U_{bc} &= \varphi_b - \varphi_c, \\ U_{cd} &= \varphi_c - \varphi_d, \\ U_{da} &= \varphi_d - \varphi_a. \end{aligned}$$



**Bild A-3** Masche eines Netzes

Die Summe aller Spannungen ist damit:

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} = 0.$$

Für beliebige Maschen gilt das *zweite Kirchhoff'sche Gesetz*:

$$\sum_k U_k = 0. \quad (\text{A-22})$$

Die Summe aller vorzeichenbehafteten Spannungen in einer Masche ist null.

Für die Anwendung der Maschenregel muss jeder Zweig mit einem willkürlich wählbaren Bezugspeil für den Richtungssinn des Stromes versehen werden. Alle Spannungsquellen erhalten Spannungspfeile, die vom Plus- zum Minuspol weisen. Von einem willkürlichen Knoten aus wird in beliebig wählbarem Umlaufsinn die Masche durchlaufen. Alle Spannungen, die in Zählrichtung zeigen, werden positiv, die anderen negativ in Gl. (A-22) eingesetzt.

Für die Masche in Bild A-3 ergibt sich:

$$U_{ab} = U_{q1} + I_1 R_1,$$

$$U_{bc} = I_2 R_2,$$

$$U_{cd} = -U_{q3} + I_3 R_3,$$

$$U_{da} = -I_4 R_4.$$

Nach Gl. (A-22) gilt also für die *Umlaufspannung*:

$$U_{q1} + I_1 R_1 + I_2 R_2 - U_{q3} + I_3 R_3 - I_4 R_4 = 0.$$

### Beispiel

A-3: Wie groß ist die Spannung  $U_{ac}$  zwischen den Punkten a und c der Masche in Bild A-3?

Lösung:

Für die Masche, die gebildet wird aus dem linken und dem unteren Zweig sowie der Diagonale von a nach c (Bild A-3) gilt:

$$U_{q1} + I_1 R_1 + I_2 R_2 - U_{ac} = 0 \text{ und}$$

$$U_{ac} = U_{q1} + I_1 R_1 + I_2 R_2.$$

## ÜBUNGSAUFGABEN

Ü A.1-1: Wieviele Elektronen fließen pro Sekunde durch ein Strommessgerät, wenn ein Strom von  $I = 1 \text{ A}$  gemessen wird?

Ü A.1-2: Im rechten Teilbild von Bild A-1 wird dem Punkt 2 das Potenzial  $\varphi_2 = 0$  (Masse) zugewiesen. Welches Potenzial  $\varphi_1$  hat der Punkt 1?

Ü A.1-3: Eine Kupferleitung hat  $d = 0,5 \text{ mm}$  Durchmesser und  $l = 20 \text{ m}$  Länge. Wie groß ist der Widerstand  $R_{20}$  bzw.  $R_{50}$  bei  $\vartheta = 20^\circ \text{C}$  bzw.  $50^\circ \text{C}$ ? Welche

Ströme  $I_{20}$  und  $I_{50}$  fließen bei diesen Temperaturen und welche Leistungen  $P_{20}$  und  $P_{50}$  werden umgesetzt, wenn die Leitung an eine Konstantspannungsquelle mit  $U = 3 \text{ V}$  angeschlossen wird?

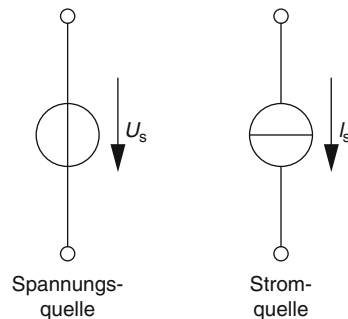
Ü A.1-4: In der Masche von Bild A-3 seien die Ströme  $I_a = I_b = I_c = I_d = 0$  und die Widerstände  $R_1 = 4 \Omega$ ,  $R_2 = 6 \Omega$ ,  $R_3 = 8 \Omega$  und  $R_4 = 6 \Omega$ . Berechnen Sie den Strom  $I$  in der Masche, wenn  $U_{q1} = 12 \text{ V}$  und  $U_{q3} = 6 \text{ V}$  sind. Welche Richtung hat der Strom? Welches Potenzial hat der Pluspol der Spannungsquelle 3, wenn das Potenzial des Punktes b  $\varphi_b = 0$  ist?

## A.2 Gleichstromkreise mit linearen Komponenten

### A.2.1 Zweipolquellen

Eine Quelle, die unabhängig von der Belastung eine konstante Spannung  $U_s$  hält, wird als *ideale Spannungsquelle* bezeichnet. Bild A-4 zeigt das Schaltzeichen nach DIN EN 60375 und 60617-2. Die *eingeprägte* Spannung wird häufig auch als *Urspannung* bezeichnet.

Die *ideale Stromquelle* gibt unabhängig von der Belastung den eingepprägten Strom oder *Urstrom*  $I_s$  ab (Bild A-4).

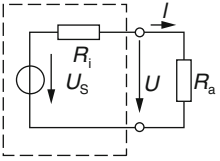
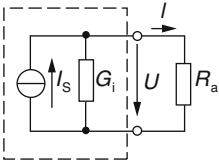
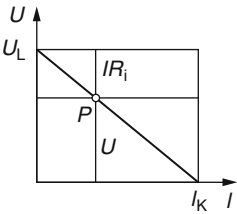
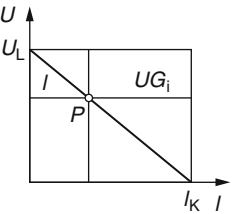


**Bild A-4** Ideale Quellen

Bei einer realen Quelle zeigt sich, dass mit zunehmender Stromentnahme die Klemmenspannung abnimmt. *Lineare* Quellen besitzen eine lineare  $U(I)$ -Kennlinie, die auch als *Arbeitsgerade* oder *Belastungskennlinie* bezeichnet wird (Bild A-5). Eine solche Kennlinie lässt sich durch zwei äquivalente Ersatzschaltungen beschreiben, die in Bild A-5 dargestellt sind.

Die *Ersatz-Spannungsquelle* besteht aus einer idealen Spannungsquelle, die in Reihe zu einem Innenwiderstand  $R_i$  geschaltet ist. Durch Anwenden der Maschenregel ergibt sich die Kennliniengleichung (A-23). Die *Ersatz-Stromquelle* besteht aus einer idealen Stromquelle, der ein Innenleitwert  $G_i$  parallel geschaltet ist. Durch Anwenden der Knotenregel folgt die Kennliniengleichung (A-24).

**Bild A-5** Reale Quellen

Spannungsquelle	Stromquelle
 <p>Ersatz-Spannungsquelle</p>	 <p>Ersatz-Stromquelle</p>
 <p>Belastungskennlinie</p>	
$U = U_s - R_i I$ (A-23) Zweipolgleichung	$I = I_s - G_i U$ (A-24)
$U_L = U_s$ (A-25) Leerlaufspannung	$U_L = I_s / G_i$ (A-26)
$I_K = U_s / R_i$ (A-27) Kurzschlussstrom	$I_K = I_s$ (A-28)

Im Leerlauf (offene Klemmen,  $I = 0$ ) ist die *Leerlaufspannung*  $U_L$  nach Gl. (A-25) bzw. (A-26) abgreifbar. Im Kurzschlussbetrieb ( $U = 0$ ) fließt der *Kurzschlussstrom*  $I_K$  nach Gl. (A-27) bzw. (A-28).

Beide Ersatzschaltungen haben denselben Innenwiderstand:

$$R_i = \frac{1}{G_i} = \frac{U_L}{I_K} \quad (\text{A-29})$$

Der Arbeitspunkt P auf der Kennlinie unterteilt im Falle der Spannungsquelle die maximale Spannung  $U_L = U_s$  in die Klemmenspannung  $U$  und die Spannung  $R_i I$ , die über dem Innenwiderstand abfällt. Im Falle der Stromquelle wird der maximale Strom  $I_K = I_s$  unterteilt in den Anteil  $I$ , der durch den Außenkreis fließt und den Strom  $G_i U$ , der über den parallel geschalteten Innenwiderstand fließt.

Häufig stellt sich die Frage, wie groß der Widerstand  $R_a$  im Außenkreis gewählt werden muss, damit eine maximale Leistung aus der Quelle entnommen werden kann.

Die Leistung im Außenwiderstand ist mit Gl. (A-20)

$$P_a = I^2 R_a = \frac{U_s^2 R_a}{(R_i + R_a)^2},$$

oder mit  $v = R_a/R_i$  als Widerstandsverhältnis:

$$P_a = \frac{U_s^2}{R_i} \cdot \frac{v}{(1+v)^2}.$$

Diese Leistung wird maximal, wenn die Ableitung  $dP_a/dv = 0$  ist. Daraus folgt für den optimalen Außenwiderstand bei *Leistungsanpassung*:

$$v = \frac{R_a}{R_i} = 1 \quad \text{oder} \quad R_a = R_i. \quad (\text{A-30})$$

Die maximale Leistung, die der Quelle entnommen werden kann, beträgt

$$P_{a,\max} = \frac{1}{4} \frac{U_s^2}{R_i} = \frac{1}{4} I_s^2 R_i. \quad (\text{A-31})$$

Die gleiche Leistung wird im Übrigen innerhalb der Quelle am Innenwiderstand umgesetzt und führt zur Erwärmung der Quelle.

### Beispiel

A-4: An einem NiCd-Akku wird bei einer Stromentnahme von  $I_1 = 0,5 \text{ A}$  die Klemmenspannung  $U_1 = 5,9 \text{ V}$  gemessen. Beim Strom  $I_2 = 1,0 \text{ A}$  sinkt die Spannung auf  $U_2 = 5,8 \text{ V}$ .

Wie groß ist der Innenwiderstand  $R_i$  der Ersatzspannungsquelle bzw. der Innenleitwert  $G_i$  der Ersatzstromquelle? Wie groß ist die Leerlaufspannung  $U_L$  und der Kurzschlussstrom  $I_K$ ?

Lösung:

Durch Einsetzen der Spannungen und Ströme in die Zweipolgleichungen (A-23) bzw. (A-24) folgt:

$$R_i = \frac{U_1 - U_2}{I_2 - I_1} = \frac{5,9 \text{ V} - 5,8 \text{ V}}{1,0 \text{ A} - 0,5 \text{ A}} = 0,20 \, \Omega \quad \text{und}$$

$$G_i = 5 \text{ S}.$$

Für die Leerlaufspannung ergibt sich:

$$U_L = U_s = U_1 + R_i I_1 = 5,9 \text{ V} + 0,20 \, \Omega \cdot 0,5 \text{ A} = 6,0 \text{ V}.$$

Der Kurzschlussstrom beträgt:

$$I_K = I_s = \frac{U_s}{R_i} = \frac{U_L}{R_i} = \frac{6 \text{ V}}{0,2 \, \Omega} = 30 \text{ A}.$$



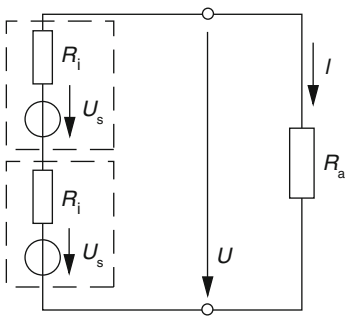
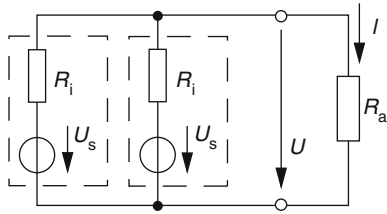
Reihenschaltung	Parallelschaltung
	
$I = \frac{nU_s}{R_a + nR_i} \quad (\text{A-32})$ <p>Strom</p>	$I = \frac{U_s}{R_a + R_i/n} \quad (\text{A-33})$
$I_K = \frac{U_s}{R_i} \quad (\text{A-34})$ <p>Kurzschlussstrom</p>	$I_K = n \frac{U_s}{R_i} \quad (\text{A-35})$
$U = nU_s \frac{R_a}{R_a + nR_i} \quad (\text{A-36})$ <p>Spannung</p>	$U = U_s \frac{R_a}{R_a + R_i/n} \quad (\text{A-37})$
$U_L = nU_s \quad (\text{A-38})$ <p>Leerlaufspannung</p>	$U_L = U_s \quad (\text{A-39})$

Bild A-6 Schaltung von Spannungsquellen

**Schaltung von Spannungsquellen** Zur Erhöhung der Spannung und/oder des Stromes kann man Spannungsquellen zusammenschalten. Bild A-6 zeigt die Zusammenhänge, wenn  $n$  Quellen hintereinander bzw. parallel geschaltet werden.

Aus den Gleichungen (A-35) und (A-38) folgt, dass die Parallelschaltung geeignet ist, um große Ströme, die Serienschaltung, um große Spannungen zu erzeugen.

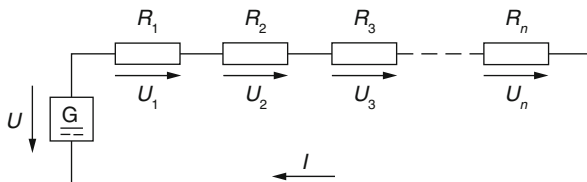
Werden  $n$  Quellen hintereinander und  $m$  solcher Reihen parallel geschaltet, so liegt eine *Gruppenschaltung* vor. Die Stromstärke durch den Außenwiderstand  $R_a$  ist:

$$I = \frac{nU_s}{R_a + \frac{n}{m}R_i} \quad (\text{A-40})$$

## A.2.2 Reihenschaltung von Widerständen

Eine *Reihen-* oder *Serienschaltung* liegt vor, wenn alle Widerstände vom gleichen Strom  $I$  durchflossen werden (Bild A-7).

**Bild A-7** Reihenschaltung



Nach der Maschenregel gilt für die Spannungen

$$U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n - U = 0.$$

Mit dem Ohm'schen Gesetz ergibt sich

$$U = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \cdots + IR_n$$

oder

$$U = I(R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n) = IR.$$

$R$  ist der *Ersatz-* oder *Gesamtwiderstand*, der anstelle der Reihenschaltung in den Stromkreis eingebaut werden könnte, damit derselbe Strom fließt:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_n \quad (\text{A-41})$$

Der Ersatzwiderstand einer Reihenschaltung ist gleich der Summe der Teilwiderstände.

Für das Verhältnis von Spannungen gilt:

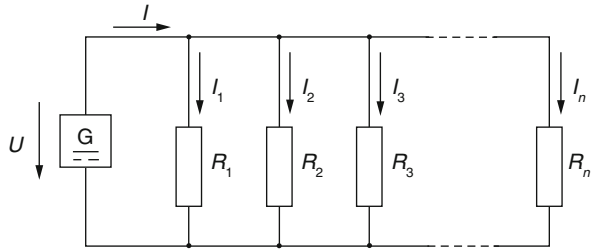
$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{IR_1}{IR_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

oder allgemein:

$$\frac{U_k}{U_m} = \frac{R_k}{R_m} \quad \text{bzw.} \quad \frac{U_k}{U} = \frac{R_k}{R} \quad (\text{A-42})$$

$$m, k = 1, 2, 3 \dots, n$$

Die Spannungen verhalten sich bei einer Reihenschaltung wie die Widerstände (*Spannungsteilerregel*).

**Bild A-8** Parallelschaltung

### A.2.3 Parallelschaltung von Widerständen

Wenn mehrere Widerstände an derselben Spannung liegen, sind sie parallel geschaltet (Bild A-8).

Nach der Knotenregel gilt für die Ströme:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n.$$

In jedem Zweig ist nach dem Ohm'schen Gesetz

$$I_1 = \frac{U}{R_1}, I_2 = \frac{U}{R_2} \quad \text{usw.}$$

Damit ergibt sich

$$I = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} = \frac{U}{R}$$

$R$  ist der *Ersatzwiderstand*, der bei gegebener Spannung  $U$  denselben Strom  $I$  aus der Quelle aufnimmt wie die ganze Parallelschaltung:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \quad (\text{A-43})$$

Der Kehrwert des Ersatzwiderstandes in einer Parallelschaltung ist gleich der Summe der Kehrwerte aller Teilwiderstände.

Eine einfachere Formulierung ist mit den Leitwerten möglich:

$$G = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n. \quad (\text{A-44})$$

Der Gesamtleitwert einer Parallelschaltung ist gleich der Summe der Teilleitwerte.

Für das Verhältnis von Strömen gilt:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{UR_2}{R_1U} = \frac{R_2}{R_1} = \frac{G_1}{G_2}, \quad \text{oder allgemein}$$

$$\frac{I_k}{I_m} = \frac{R_m}{R_k} = \frac{G_k}{G_m} \quad \text{bzw.}$$

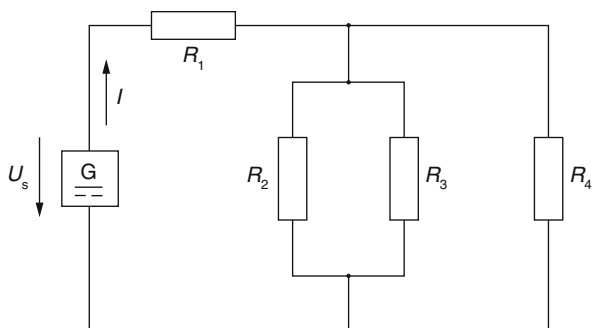
$$\frac{I_k}{I} = \frac{R}{R_k} = \frac{G_k}{G}; \quad m, k = 1, 2, 3, \dots, n \quad (\text{A-45})$$

Die Ströme verhalten sich bei einer Parallelschaltung wie die Leitwerte oder umgekehrt wie die Widerstände (*Stromteilerregel*).

## A.2.4 Gemischte Schaltungen

Häufig kommen in Netzwerken Kombinationen von Parallel- und Hintereinanderschaltungen von Widerständen vor. Die auftretenden Ströme und Spannungen lassen sich bestimmen, wenn die verschiedenen Widerstandsgruppen zusammengefasst und durch ihren Ersatzwiderstand beschrieben werden.

**Bild A-9** Gemischte Schaltung



### Beispiel

A-5: Für die Schaltung von Bild A-9 sollen der Gesamtstrom  $I$  sowie die Ströme  $I_2$ ,  $I_3$  und  $I_4$  durch die Widerstände  $R_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$  bestimmt werden. Welche Wärmeleistungen treten an den Widerständen auf?

Daten:  $U_s = 12 \text{ V}$ ,  $R_1 = 4 \text{ } \Omega$ ,  $R_2 = 16 \text{ } \Omega$ ,  $R_3 = 4 \text{ } \Omega$ ,  $R_4 = 8 \text{ } \Omega$ .

Lösung:

Die beiden Parallelwiderstände  $R_2$  und  $R_3$  lassen sich ersetzen durch

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = 3,20 \text{ } \Omega.$$

$R_4$  liegt parallel zu  $R_{23}$ , für beide zusammen ist der Ersatzwiderstand:

$$R_{234} = \frac{R_{23} R_4}{R_{23} + R_4} = 2,29 \text{ } \Omega.$$

$R_1$  liegt in Reihe zu  $R_{234}$ , so dass sich als Ersatzwiderstand der ganzen Schaltung ergibt:

$$R = R_1 + R_{234} = 6,29 \text{ } \Omega.$$

Der Gesamtstrom ist damit:

$$I = \frac{U_s}{R} = 1,91 \text{ A}.$$

Nach der Spannungsteilerregel Gl. (A-42) ist die Spannung, die über  $R_2$ ,  $R_3$  und  $R_4$  abfällt

$$U_{234} = \frac{R_{234}}{R} U_s = \frac{2,29 \Omega}{6,29 \Omega} \cdot 12 \text{ V} = 4,36 \text{ V}.$$

Für die Ströme folgt mit dem Ohm'schen Gesetz:

$$I_2 = \frac{U_{234}}{R_2} = 0,273 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{U_{234}}{R_3} = 1,09 \text{ A},$$

$$I_4 = \frac{U_{234}}{R_4} = 0,546 \text{ A}.$$

Die Leistungen betragen:

$$P_1 = I^2 R_1 = 14,6 \text{ W}, \quad P_2 = I_2^2 R_2 = 1,19 \text{ W}, \\ P_3 = I_3^2 R_3 = 4,76 \text{ W}, \quad P_4 = I_4^2 R_4 = 2,38 \text{ W}.$$

Die Gesamtleistung ist

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = I^2 R = 22,9 \text{ W}.$$

Durch systematische Anwendung von Knoten- und Maschenregel lassen sich auch kompliziertere Netzwerke berechnen.

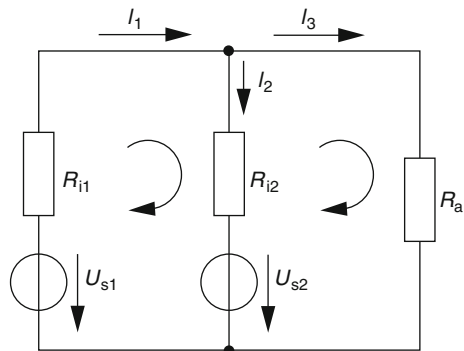
### Beispiel

A-6: In der Schaltung nach Bild A-10 wird der Akku mit  $U_{s2} = 12 \text{ V}$  und  $R_{i2} = 0,2 \Omega$  vom Netzgerät mit  $U_{s1} = 24 \text{ V}$  und  $R_{i1} = 0,5 \Omega$  aufgeladen. Der Außenwiderstand ist  $R_a = 1,0 \Omega$ . Gesucht sind alle Ströme.

Lösung:

Knotenregel:

$$I_1 = I_2 + I_3 \quad (1)$$



**Bild A-10** Netzwerk mit zwei Spannungsquellen

Maschenregel, linke Masche:

$$R_{i1}I_1 + R_{i2}I_2 + U_{s2} - U_{s1} = 0 \quad (2)$$

Maschenregel, rechte Masche:

$$R_a I_3 - U_{s2} - R_{i2}I_2 = 0 \quad (2)$$

Durch Umstellung ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 \\ R_{i1}I_1 + R_{i2}I_2 &= U_{s1} - U_{s2} \\ -R_{i2}I_2 + R_a I_3 &= U_{s2}, \end{aligned}$$

das nach bekannten mathematischen Verfahren gelöst werden kann. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{R_{i2}U_{s1} + R_a(U_{s1} - U_{s2})}{R_{i1}R_{i2} + R_a(R_{i1} + R_{i2})} = 21 \text{ A}, \\ I_2 &= \frac{R_a(U_{s1} - U_{s2}) - R_{i1}U_{s2}}{R_{i1}R_{i2} + R_a(R_{i1} + R_{i2})} = 7,5 \text{ A}, \\ I_3 &= \frac{R_{i1}U_{s2} + R_{i2}U_{s1}}{R_{i1}R_{i2} + R_a(R_{i1} + R_{i2})} = 13,5 \text{ A}. \end{aligned}$$

**Überlagerungssatz** Größere Netzwerke enthalten oft mehrere Spannungs- bzw. Stromquellen. Werden derartige Netzwerke mithilfe der Kirchhoff'schen Regeln behandelt, müssen gegebenenfalls größere Gleichungssysteme gelöst werden. Insbesondere wenn man nicht an einer kompletten Analyse interessiert ist, sondern beispielsweise nur den Strom in einem bestimmten Zweig benötigt, kann das Verfahren mithilfe des *Helmholtz'schen Überlagerungssatzes* (Superpositionsprinzip) erheblich vereinfacht werden.

Der Überlagerungssatz nützt aus, dass jede Quelle in einem Netzwerk auf einen bestimmten Teilstrom einwirkt, und dass sich dieser Strom additiv aus den Beiträgen der verschiedenen Quellen ergibt. Der Überlagerungssatz gilt nur für *lineare Netzwerke*, d. h. für solche, bei denen Strom und Spannung an allen Bauelementen zueinander proportional sind, also das Ohm'sche Gesetz gilt. Ferner müssen die vorhandenen Quellen unabhängig voneinander sein, d. h. rückwirkungsfrei arbeiten.

Vorgehensweise:

Alle Quellen bis auf eine werden außer Kraft gesetzt. Der Strom  $I'$ , der aufgrund dieser Quelle in dem interessierenden Zweig fließt, wird berechnet. Dann wird der Strom  $I''$  aufgrund der zweiten Quelle berechnet usw. Schließlich werden alle Teilströme vorzeichenrichtig zum Gesamtstrom addiert:

$$I = I' + I'' + \dots$$

Die „Außerkraftsetzung“ einer Quelle bedeutet bei einer Spannungsquelle, dass diese durch einen Kurzschluss ersetzt wird; bei einer Stromquelle, dass diese entfernt wird. Dabei bleiben die Innenwiderstände der Quellen bestehen.