Das Unendliche

Rudolf Taschner

Das Unendliche

Mathematiker ringen um einen Begriff

Zweite, verbesserte Auflage
mit 53 Abbildungen

Springer

Professor Rudolf Taschner
Institut für Analysis
und Scientific Computing
Technische Universität Wien
Wiedner Hauptstraße 8–10
A 1040 Wien
E-mail: rudolf.taschner@tuwien.ac.at

math.space
MuseumsQuartier
Museumsplatz 1
A 1070 Wien

Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über *http://dnb.ddb.de* abrufbar.

ISBN 3-540-25797-7 2. Auflage Springer Berlin Heidelberg New York
ISBN 3-540-59093-5 1. Auflage Springer Berlin Heidelberg New York

Springer ist ein Unternehmen von Springer Science+Business Media
springer.de

Umschlaggestaltung: design & production GmbH
Herstellung: Helmut Petri
Druck: Strauss Offsetdruck

SPIN 11423300 Gedruckt auf säurefreiem Papier – 42/3153 – 5 4 3 2 1 0

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

> »Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig.«

Kein Theologe, kein Philosoph, sondern ein Mathematiker, David Hilbert, hat dies geschrieben. Theologen predigen das Unendliche als Eigenschaft Gottes und der Ewigkeit, aber unseren Erkenntnisdrang vermögen sie damit nicht zu stillen. Philosophen ergehen sich in phantastischen Spekulationen über das Unendliche, aber Definitives ist von ihnen nicht zu erfahren. Die *Mathematik* hingegen beansprucht, die wahre *Wissenschaft vom Unendlichen zu* sein, und alles, was wir darüber wissen können, verdanken wir dem Gedankenreichtum der Mathematiker.

Dieses Buch will von ihrem Bemühen um das Unendliche berichten.

Es ist kein Buch über die Geschichte der Mathematik, obwohl aus dem Leben mancher Mathematiker erzählt wird, um den abstrakten Gegenstand in einen lebendigen Bezug zu stellen. Manche bedeutende Forscher wie Euler oder Gauß werden aber bloß erwähnt, viele wie Fermat oder Riemann nicht einmal zitiert. Das Buch erhebt keinerlei Anspruch auf Vollständigkeit, es will allein Aspekte der Mathematik aufzeigen, die mir im Zusammenhang mit dem Unendlichen am wesentlichsten scheinen.

Es ist aber auch kein Mathematiklehrbuch, obwohl in jedem Kapitel zumindest von einem epochalen Resultat der Mathematik die Rede ist. Mathematiklehrbücher sind in ihrem Aufbau nüchterner, in ihrem Stil straffer, Extempores in Philosophie, Psychologie, Musik, Literatur, wie sie hier anzutreffen sind, sind in strengen Lehrbüchern verpönt.

Dieses Buch ist für mathematische Laien geschrieben, welche die Faszination des Unendlichen berührt und die wissen möchten, was die Mathematiker darüber zu erzählen haben. Die Leser dürfen sich nicht vor einigen einfachen Rechnungen fürchten, die ihnen während der Lektüre begegnen. Mehr als die Kenntnis des Bruchrechnens wird nicht erwartet. Ich habe mich bemüht, alle mathematischen Sachverhalte so klar und einfach wie möglich zu präsentieren. Die beigelegten Skizzen bedeuten eine zusätzliche Verständnishilfe, denn bekanntlich sagt ein Bild mehr als tausend Worte. Nur das Lesen des Anhangs erfordert zuweilen ein etwas tieferes Wissen um den Umgang mit Formeln und Gleichungen, das jedoch nie über die übliche Schulmathematik hinausgeht. Der Anhang ist nämlich für jene besonders interessierten Leserinnen und Leser* gedacht, die alles genauer wissen wollen; auf ihn wird mit hochgestellten Zahlen verwiesen. Für das Verständnis des Haupttextes ist das Lesen des Anhangs an keiner Stelle erforderlich.

Manchmal werden die kleinen griechischen Buchstaben α für Alpha, β für Beta, γ für Gamma, φ für Phi, π für Pi und ψ für Psi verwendet. Einerseits bezeichnet man seit jeher so die Winkel im Dreieck und andererseits verwenden wir diese Zeichen für die *unendlichen Dezimalzahlen,* die sich nach und nach als die eigentlichen Helden unserer Geschichte über das Unendliche entpuppen.

Für ihre Unterstützung und ihren Zuspruch beim Abfassen des Textes bin ich meiner Frau Bianca von Herzen dankbar. Karl Riesenhuber danke ich für seine Korrekturen und Verbesserungsvorschläge. Der Springer-Verlag hat sich auch bei der Herausgabe dieses kleinen Werkes in Professionalität und Zuvorkommenheit ausgezeichnet.

Das Buch hat seinen Zweck mehr als erfüllt, wenn die Leser nach der Lektüre noch mehr über die angeschnittenen Themen erfahren möchten. Interessieren sie sich für die Mathematik in all ihren Facet-

* Wenn im Folgenden von »Mathematikern«, »Denkern«, »Philosophen« u.ä. die Rede ist, soll stets das grammatikalische, nie das natürliche Geschlecht gelesen werden: so wie z.B. Hermann Weyl eine philosophische Kapazität (weiblich) und ein mathematisches Genie (sächlich) war.

ten, für das »Mathematisieren« und für die Verbindung der Mathematik zu anderen Wissenschaften, kann man ihnen nur das einzigartige Buch »Erfahrung Mathematik« von Philip Davis und Reuben Hersh ans Herz legen, das im Verlag Birkhäuser erschienen ist. Die philosophisch Interessierten finden in Hermann Weyls glänzend verfasster »Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft« aus dem Verlag Oldenbourg eine Fülle von Anregungen. Sind die Leser bestrebt, mehr über den Bezug der Zahlenwelt zur »Wirklichkeit« zu erfahren, verweise ich sie auf mein im Vieweg-Verlag erschienenes Buch »Der Zahlen gigantische Schatten«.

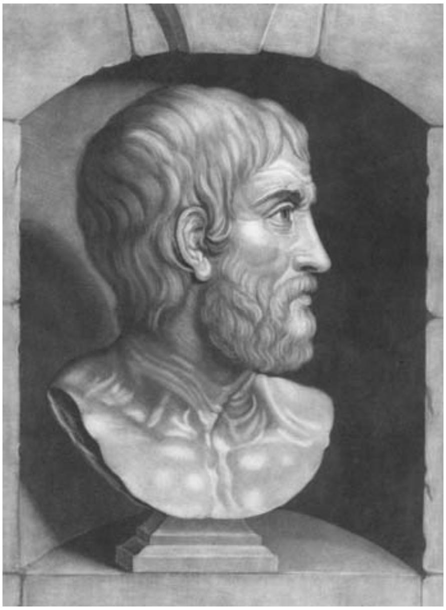
Rudolf Taschner

1 Pythagoras und das Unendliche im Pentagramm

Legenden ranken sich um das Leben des Pythagoras. Man sagt, er sei auf der griechischen Insel Samos, nur wenig mehr als zwei Kilometer westlich vom Festland Kleinasiens gelegen, um 570 v. Chr. geboren. Aus Protest gegen die politischen Verhältnisse in seiner Heimat verließ er diese. Er bereiste Kleinasien, Phönizien, Ägypten, Mesopotamien, lernte vom großen Thales von Milet Mathematik und Astronomie und studierte eingehend astrologische und religiöse Mythen, die in den von ihm besuchten Regionen vorherrschend waren. All dies sog er in sich auf und nutzte es als Grundlage für einen Geheimbund, einen Zirkel sich »Pythagoräer« nennender Weisen, der seinen Sitz im süditalienischen Croton aufschlug[1]. Wie später die Templer, Rosenkreuzer oder Freimaurer erlangte der Verein der Pythagoräer immer mehr politischen Einfluss und wurde dementsprechend immer heftiger von seinen Gegnern angefeindet. Die Rivalen siegten: Es kam zur Vertreibung der Pythagoräer aus Croton, und Pythagoras führte den Rest seiner Anhänger ins süditalienische Metapont, wo er um 480 v. Chr. verstorben sein soll.

Pythagoras als Mathematiker im heutigen Sinn zu bezeichnen, ist sicher falsch[2]. Er war nicht einmal ein Philosoph wie Sokrates, Platon oder Aristoteles, vielmehr haben wir ihn uns als religiösen Lehrer und mystischen Meister vorzustellen, dessen Wort unwidersprochen die letzte Instanz allen Wissens und die unbezweifelbare Antwort auf alle Fragen war. »ER selbst hat es gesagt«, galt bei seinen Jüngern als unerschütterliches Argument im Streitgespräch – und mit ER war der gottgleiche Pythagoras gemeint. Leider ist uns fast keines seiner Worte überliefert, nur ein einziger mythischer Spruch aus seinem Munde bekannt: »*Alles ist Zahl.*«

In diesem Diktum konzentriert sich die Überzeugung des Pythagoras, die gesamte natürliche und soziale Welt sei durch arithmetische



Pythagoras von Samos

Strukturen bestimmt und könne auf Beziehungen zwischen Zahlen zurückgeführt werden. Obwohl uns Heutigen dies auf den ersten Blick befremdlich anmutet, kann man der These des Pythagoras gewisse Plausibilität nicht absprechen. Die Trümpfe in Debatten hat doch der in der Hand, der vorschlagen kann: »Legen wir die Zahlen auf den Tisch«. Scheinbar ist allein mit ihnen eine objektive Sicht der Wirklichkeit möglich. Wenn wir meinen, dass sich etwas »auszahle« – auch Immaterielles, wie eine Reise zu den Kulturdenkmälern Italiens, der Schiausflug nach St. Moritz oder der Besuch eines philharmonischen Konzerts in Wien, führen wir es doch auf einen quantitativen Vergleich mit unserem Einsatz zurück, den wir auf Heller und Pfennig genau anzugeben trachten.

Aber es sind nicht bloß Redeweisen, die als Argumente für die Überzeugung des Pythagoras zählen. Gerade das seit Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts einsetzende Zeitalter des Computers, eines Geräts, das von der programmierbaren Waschmaschine bis zu den Gehaltsausdrucken am Bankschalter all unsere Lebensbereiche im Zeitraum einer Generation schlagartig durchdrang und das wie ein Krebsgeschwür alle Organe unserer politischen und sozialen Welt mit seinen

Metastasen befällt, belegt das Wort des Pythagoras: Denn im elektronischen Hirn des Computers werden nur Zahlen, Unmengen von Zahlen, aber eben bloß nur Zahlen, verschoben, ausgetauscht, verändert, als Inputfutter verwertet und als Outputabfall ausgeschieden. Das über alle Maßen schöne C-Dur-Quintett von Franz Schubert ist auf einer silbernen CD-Scheibe in einen Zahlencode übertragen. Der CD-Player vermag als darauf spezialisierte Rechenmaschine diese gigantische Zahl in sich aufzunehmen und in Frequenzen zu verwandeln, die vom Verstärker und Lautsprecher weitergeleitet an unser Ohr gelangen. Auf diese Weise gaukelt uns eine prosperierende Unterhaltungsindustrie vor, Schuberts C-Dur-Quintett sei nichts anderes als die auf der CD-Scheibe verborgene, riesige Zahl. Wann, wenn nicht heute, wurde besser demonstriert, wie man erfolgreich versucht, die ganze Welt auf Zahlen zurückzuführen, ja sogar auf Zahlen zu reduzieren?

Man kann wohl zurecht vermuten, dass dem mystischen Denker Pythagoras diese vulgäre Bestätigung seiner These, wie sie uns heute ununterbrochen aufgezwungen wird, nie in den Sinn gekommen wäre. Dazu war er zu elitär und im Denken zu weltabgewandt. Trotzdem fand er vor allem in der Musik sein Wort am klarsten bestätigt: Unabhängig davon, ob eine Saite gestrichen oder eine Flöte geblasen wird – die musikalischen Intervalle sind durch die Zahlenverhältnisse der Längen der schwingenden Saite oder der schwingenden Luftsäule bestimmt: Bei der Oktave beträgt dieses Verhältnis 2 : 1, bei der Quint 3 : 2 und bei der Quart 4 : 3. Dies ist die wesentliche Erkenntnis des Pythagoras: Das schnöde Material, ob eine Stahlsaite, eine Darmsaite, eine Blockflöte oder ein Fagott verwendet werden, ist für den Wohlklang unerheblich. Worauf es bei der Harmonie einzig ankommt, sind die richtigen *Zahlen*verhältnisse. Pythagoras glaubte dies im ganzen Universum bestätigt: Die Himmelssphären der sich um die Erde bewegenden Himmelskörper weisen seiner Meinung nach ebenfalls *»wohlklingende« Zahlenverhältnisse* in den gegenseitigen Abständen auf und lassen so die nur den Himmlischen vernehmbare »Sphärenmusik« erklingen.

Nach des Pythagoras Meinung bestimmen allein die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, … die Welt. Darum gebührt den Zahlen eine außerordentliche Wertschätzung. Die Pythagoräer verachten Händler und Meinungsforscher, Ingenieure und Bankiers, überhaupt alle, die ihrer Ansicht nach Zahlen als bloßes Mittel zum artfremden Zweck missbrauchen. Es ist daher nur zu verständlich, dass die Zahlenmystik in den pythagoräischen Kreisen weit verbreitet war. Vor allem

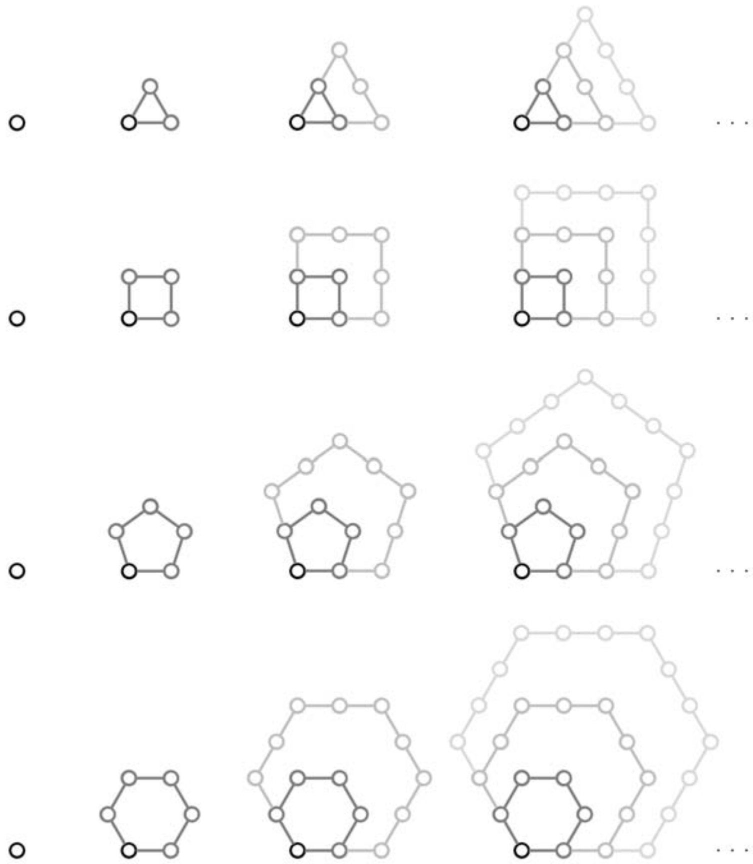


Abb. 1. Die Dreieckszahlen 1, 3, 6, 10, … , die Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, … , die Pentagonalzahlen 1, 5, 12, 22, … , die Hexagonalzahlen 1, 6, 15, 28, … .

jene Zahlen, die eine ästhetisch ansprechende geometrische Deutung als Punktmuster erlauben, werden hoch geschätzt. Dazu gehören vor allem die *Dreieckszahlen,* die *Quadratzahlen,* die *Fünfecks* oder *Pentagonalzahlen,* die *Sechsecks* oder *Hexagonalzahlen* und so weiter (Abb. 1). Allein diese Verbindung von Zahl und geometrischem Muster öffnet den mystisch gesinnten Pythagoräern mit ihren Theorien über Zahlen Tür und Tor.

Verweilen wir beim Fünfeck oder Pentagramm: Diese Figur hat eine bemerkenswerte Eigenschaft: Beim Ziehen aller möglichen Ver-

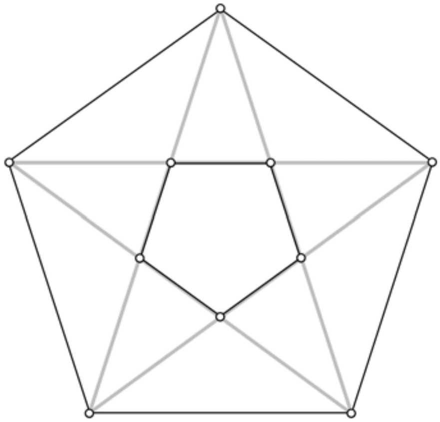


Abb. 2. Das Pentagramm mit seinen Diagonalen liefert im Inneren ein neues, auf den Kopf gestelltes, eingeschriebenes Pentagramm.

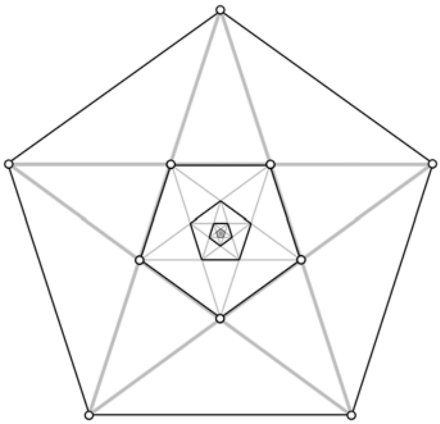


Abb. 3. Zieht man in jedem eingeschriebenen Pentagramm erneut die Diagonalen, erhält man eine unendliche Folge ineinander geschachtelter Pentagramme.

bindungslinien zwischen den Eckpunkten (der so genannten *Diagonalen*) taucht ihr eigenes Abbild in der Mitte verkleinert wieder auf (Abb. 2). Nichts hindert uns daran, auch im inneren Pentagramm alle Diagonalen zu zeichnen und so ein noch kleineres Pentagramm zu erhalten, bei dem wir uns dieselbe Prozedur durchgeführt denken, und so weiter (Abb. 3). Selbst wenn wir von einem im großen Maßstab gezeichneten Pentagramm ausgehen, werden unsere graphischen Hilfsmittel nach höchstens einem Dutzend Wiederholungen dieser Konstruktion den Dienst versagen. Dies ändert aber nichts an unserer *allein* *vom Denken* herrührenden Überzeugung, dass in jedem noch so klein gezeichneten Pentagramm ein noch kleineres als Abbild verborgen liegt, das man durch Ziehen der Diagonalen zum Leben erwecken kann. Und das wiederum ein noch kleineres als Abbild in sich trägt und dies *ohne Ende*.

Das Bild der ineinander geschachtelten Pentagramme vermittelt das Unendliche als eine *ewige Wiederkehr des Gleichen*. Zwei einander geschickt gegenübergestellte Spiegel rufen denselben Eindruck hervor. Auch in der Musik wird die Idee der unendlichen, wenn auch harmonisch ständig modulierten Melodie angedeutet. Ein berühmtes Beispiel ist Johann Sebastian Bachs Canon per Tonos aus dem *Musikalischen Opfer*. Bei den *GoldbergVariationen* wird zuletzt die wunderschöne Arie des Beginns wiederholt, wodurch Bach die Idee des nie endenden Ablaufs der Variationen andeutet. Und auch das *Perpetuum mobile* von Johann Strauß belegt bereits durch seinen Titel, dass die beschwingte Melodie in endlosen Wiederholungen fortzusetzen wäre, würde sie nicht der Dirigent mit einem »und so weiter, und so weiter, … « verklingen lassen.

Zwei weitere geometrische Beispiele seien noch genannt, an denen sich die Unendlichkeit als die ewige Wiederkehr des Gleichen manifestiert:

Im ersten Beispiel gehen wir von einem Dreieck mit drei gleich langen Seiten aus (Abb. 4). Wir löschen von jeder der drei Seiten das mittlere Drittel und setzen stattdessen über die Lücken je *zwei* Seiten, die genauso lang wie das weggenommene mittlere Drittel sind. Nun verfahren wir im nächsten Schritt mit der aus $3 \times 4 = 12$ Seiten bestehenden Figur genauso[3]: Von jeder der zwölf Seiten entfernen wir das mittlere Drittel und setzen stattdessen über die Lücken je zwei Seiten, die genauso lang wie das eben gelöschte mittlere Drittel sind. Als Ergebnis erhalten wir einen bizarrer wirkenden Stern. Mit dieser aus $12 \times 4 = 48$ Seiten bestehenden Figur denken wir uns die gleiche Prozedur durchgeführt und erhalten als Nächstes eine aus $48 \times 4 = 192$ Seiten bestehende Figur, die entfernt an eine Schneeflocke erinnert. Wie wir beim Pentagramm durch Ziehen der Diagonalen das innere Pentagramm und in der ununterbrochenen Aufeinanderfolge des Diagonalenziehens die unendliche Folge der ineinander geschachtelten Pentagramme erhalten, so gewinnen wir in analoger Weise bei diesem, vom schwedischen Mathematiker Niels Fabian Helge von Koch (*1870, †1924) ersonnenen Beispiel eine unendliche Folge immer bizarrer wir-

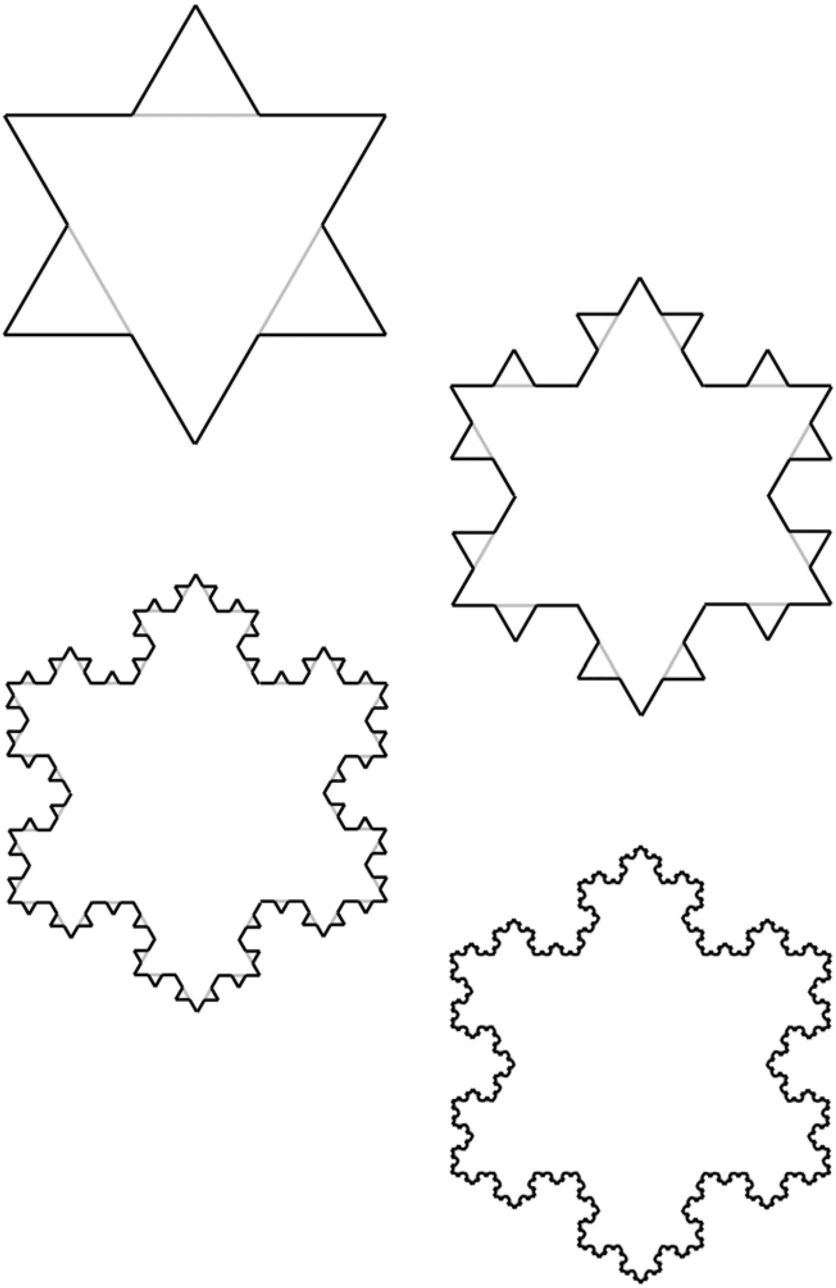


Abb. 4. Die ersten vier Konstruktionsschritte bei der Schneeflockenkurve des Helge von Koch.

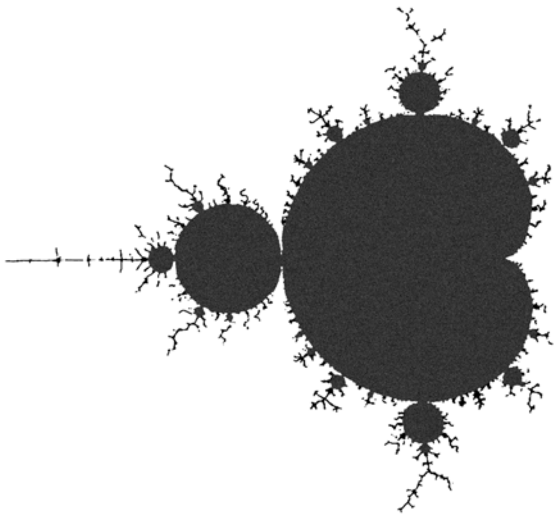


Abb. 5. Die Mandelbrotfigur.

kender »Schneeflocken« mit immer zerklüfteter anmutenden Rändern. Man erkennt ferner sofort, dass jedes Drittel eines Bildes einer vorher gezeichneten »glatteren« Schneeflocke in allen folgenden bizarreren Schneeflocken in immer schrumpfender Verkleinerung – dafür aber an immer mehr Stellen gleichzeitig – auftaucht. Wieder verspüren wir etwas vom ästhetischen Reiz des Unendlichen als der ewigen Wiederkehr des Gleichen[4].

Das zweite Beispiel berührt unser ästhetisches Empfinden noch intensiver. Es handelt sich dabei um eine Figur, die nach dem französisch-amerikanischen Computerspezialisten Benoit Mandelbrot (*1924) benannt wird. Sie entsteht, indem man die Punkte der Ebene nach einem bestimmten[5] mathematischen Verfahren entweder schwarz oder weiß färbt.

Auf die exakte Formulierung des Verfahrens kommt es im Augenblick nicht an, wichtig allein ist, dass man dieses Verfahren so formulieren kann, dass es als Computerprogramm von einer Rechenmaschine »verstanden« wird. Wenn die Auflösung des Computerbildschirms fein genug ist, erhält man das in Abb. 5 gezeigte Bild der Mandelbrotfigur: