

BestMasters

RESEARCH

Niclas Wego

Der harmonische Oszillator

Eine Reise von der klassischen Physik
in die Quantenwelt



Springer Spektrum

BestMasters

Mit „**BestMasters**“ zeichnet Springer die besten Masterarbeiten aus, die an renommierten Hochschulen in Deutschland, Österreich und der Schweiz entstanden sind. Die mit Höchstnote ausgezeichneten Arbeiten wurden durch Gutachter zur Veröffentlichung empfohlen und behandeln aktuelle Themen aus unterschiedlichen Fachgebieten der Naturwissenschaften, Psychologie, Technik und Wirtschaftswissenschaften. Die Reihe wendet sich an Praktiker und Wissenschaftler gleichermaßen und soll insbesondere auch Nachwuchswissenschaftlern Orientierung geben.

Springer awards “**BestMasters**” to the best master’s theses which have been completed at renowned Universities in Germany, Austria, and Switzerland. The studies received highest marks and were recommended for publication by supervisors. They address current issues from various fields of research in natural sciences, psychology, technology, and economics. The series addresses practitioners as well as scientists and, in particular, offers guidance for early stage researchers.

Weitere Bände in der Reihe <https://link.springer.com/bookseries/13198>

Niclas Wego

Der harmonische Oszillator

Eine Reise von der klassischen
Physik in die Quantenwelt



Springer Spektrum

Niclas Wego
Fachbereich 08 – Institut für Kernphysik
Johannes Gutenberg-Universität Mainz
Mainz, Deutschland

ISSN 2625-3577

ISSN 2625-3615 (electronic)

BestMasters

ISBN 978-3-658-36009-2

ISBN 978-3-658-36010-8 (eBook)

<https://doi.org/10.1007/978-3-658-36010-8>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2021

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geographische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Marija Kojic

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

Mein herzlicher Dank gilt in erster Linie Prof. Dr. Stefan Scherer, der mich mit einer außerordentlich gewissenhaften und hilfreichen Betreuung von Beginn bis zum Ende meiner Masterarbeit begleitet hat. Durch regelmäßige und zeitintensive Treffen konnte ich viele, wichtige Informationen rund um das Thema des harmonischen Oszillators lernen. Zusätzlich wurden in diesem Rahmen weiterführende Gedanken bezüglich der Themen der Masterarbeit angesprochen.

Außerdem möchte ich an dieser Stelle herzlich meinen Eltern Ina Wego und Wolfgang Schmitt sowie meinem Bruder Roman Wego danken, die mich während meiner gesamten Studienzeit bedingungslos unterstützt und damit einen wichtigen Teil meiner universitären Ausbildung geleistet haben.

Vielen Dank!

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung: Der harmonische Oszillator	1
2	Der harmonische Oszillator in der klassischen Physik	5
2.1	Mathematische Grundlagen	5
2.1.1	Funktionale	5
2.1.2	Funktionalableitungen	6
2.2	Der Lagrange-Formalismus	7
2.2.1	Zwangsbedingungen und verallgemeinerte Koordinaten	8
2.2.2	Das Prinzip der kleinsten Wirkung	10
2.2.3	Die Euler-Lagrange-Gleichungen	11
2.3	Der harmonische Oszillator am Beispiel des mathematischen Pendels	14
3	Der harmonische Oszillator in der Quantenmechanik	19
3.1	Der Hamilton-Formalismus	19
3.1.1	Die Hamilton-Funktion	20
3.1.2	Kanonische Gleichungen	21
3.2	Die Schrödinger-Gleichung	22
3.3	Der quantenmechanische harmonische Oszillator	24
3.3.1	Lösung mithilfe der Schrödinger-Gleichung	24
3.3.2	Lösung mit der Dirac'schen Operatormethode	31
4	Die Rolle des harmonischen Oszillators in der Quantenfeldtheorie	39
4.1	Das klassische Strahlungsfeld	39
4.1.1	Die Wellengleichung	39

4.1.2	Das Vektorpotenzial	41
4.1.3	Energie des elektromagnetischen Feldes	44
4.2	Lagrange-Formalismus für relativistische Felder	48
4.2.1	Skalare Felder	49
4.2.2	Das Klein-Gordon-Feld	52
4.3	Quantisierung von Feldern	54
4.3.1	Kanonische Quantisierung des skalaren Feldes	54
4.3.2	Kanonische Quantisierung des Klein-Gordon-Feldes	55
4.3.3	Kanonische Quantisierung des Strahlungsfeldes	58
5	Der harmonische Oszillator im Pfadintegralformalismus	61
5.1	Vorüberlegungen	62
5.2	Operatorordnungen	63
5.3	Herleitung des Pfadintegrals	65
5.4	Pfadintegral eines freien Teilchens	70
5.5	Pfadintegral des eindimensionalen harmonischen Oszillators	71
6	Ausblick	79
7	Nebenrechnungen	83
7.1	Kinetische Energie des mathematischen Pendels	83
7.2	Potenzielle Energie des mathematischen Pendels	84
7.3	Vertauschungsrelation für die Operatoren $\hat{b}$ und $\hat{b}^\dagger$	84
7.4	Nebenrechnung zum Quadrat der Rotation des Vektorpotenzials	85
7.5	Lösung der Klein-Gordon-Gleichung	86
7.6	Hilfreiche Nebenrechnung 1	87
7.7	Hilfreiche Nebenrechnung 2	88
7.8	Vertauschungsrelationen von $a(\vec{k})$ und $a^\dagger(\vec{k})$	90
7.9	Hamilton-Funktion des Klein-Gordon-Feldes	91
7.10	Hilfreiche Nebenrechnung 3	96
7.11	Gauß'sche Integrale 1	97
7.12	Gauß'sche Integrale 2	98
7.13	Gauß'sche Integrale 3	99
7.14	Funktionalableitung zur Herleitung des Pfadintegrals	102

7.15	Berechnung des Pfadintegrals für den harmonischen Oszillator 1	105
7.16	Berechnung des Pfadintegrals für den harmonischen Oszillator 2	106
Literaturverzeichnis		109



Einleitung: Der harmonische Oszillator

1

Die folgende Arbeit beschäftigt sich – wie der Titel bereits verrät – mit dem *harmonischen Oszillator* und speziell mit Anwendungsbereichen im Rahmen der klassischen Physik (vgl. Kapitel 2), der Quantenmechanik (vgl. Kapitel 3 und Kapitel 5) sowie der Quantenfeldtheorie (vgl. Kapitel 4).

Zur Klärung der Frage, was ein harmonischer Oszillator überhaupt ist, soll das folgende einleitende Zitat dienen: „Der harmonische Oszillator stellt eines der wichtigsten Systeme der Physik dar. Er tritt praktisch überall dort auf, wo es um Schwingungen geht – vom Fadenpendel bis zur Quantenfeldtheorie.“¹ Bereits im alltäglichen Leben lassen sich solche Schwingungen – oder physikalisch ausgedrückt: Oszillatoren – beobachten: Ein Kind, das auf einer Schaukel hin und her schwingt, ein Baum, der sich im Wind hin und her bewegt oder eine Gitarrensaiten, die nach dem Anschlagen durch ihre Schwingung einen hörbaren Ton erzeugt, sind nur drei von unzähligen Beispielen aus der mit dem Auge beobachtbaren oder dem Ohr hörbaren Welt. Doch auch im Mikroskopischen (Moleküle, Atome, Kerne etc.) stößt man immer wieder auf solche schwingungsfähigen Systeme. So schwingen beispielsweise die Atome eines Moleküls um den mittleren Abstand r_0 im Minimum des Lennard-Jones-Potenzials als Folge von Absorption und Emission infraroter Wärmestrahlung². Auch Photonen gehören zu solch mikroskopischen Systemen, bei denen man Schwingungen und sogar explizit den harmonischen Oszillator wiederfindet. Dieser Zusammenhang wird im Verlauf dieser Arbeit geklärt und sogar bis hin zur Quantenfeldtheorie Relevanz zeigen.

¹ Aus Pade (2012) [1], S. 53

² Siehe Otten (2009) [2], S. 234

Nach diesen alltäglichen Beispielen soll vorab auf den Begriff des harmonischen Oszillators eingegangen werden: Führt ein schwingungsfähiges System (Oszillator) eine harmonische Schwingung aus, so spricht man von einem harmonischen Oszillator. Eine harmonische Schwingung ist eine Schwingung, bei der die Auslenkung y proportional zum Sinus der Zeit t ist³, also

$$y = C \cdot \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1.1)$$

Dabei stellt C die Amplitude, ω die Kreisfrequenz und φ_0 die Phase des harmonischen Oszillators dar (vgl. dazu auch Gl. 2.10). Die folgenden drei Plots (Abbildung 1.1, 1.2 und 1.3) sollen die Einflüsse der verschiedenen Parameter auf die Schwingung verdeutlichen. Dabei dient der blaue Graph jeweils als Vergleich.

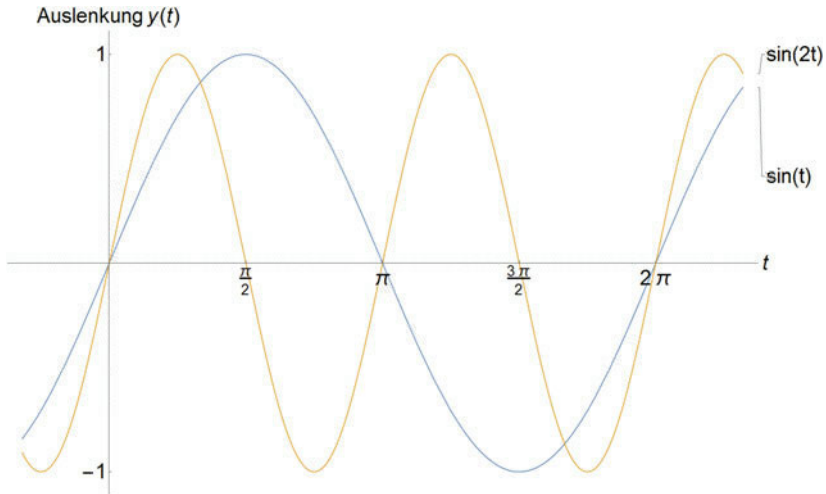
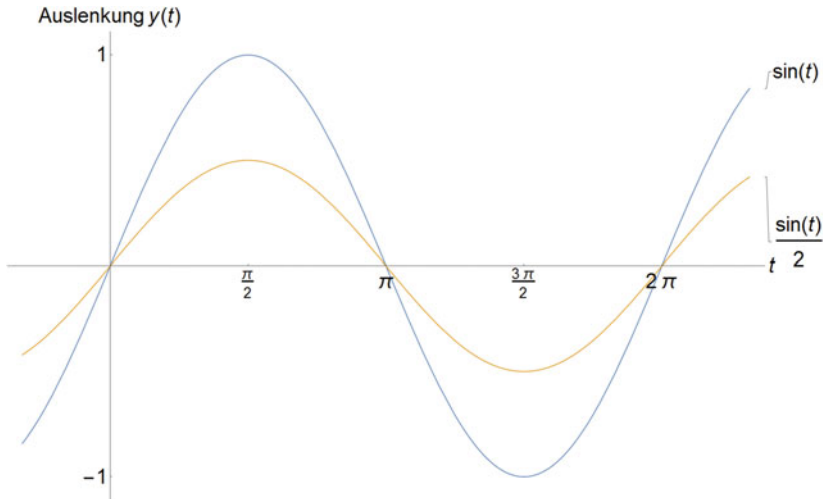
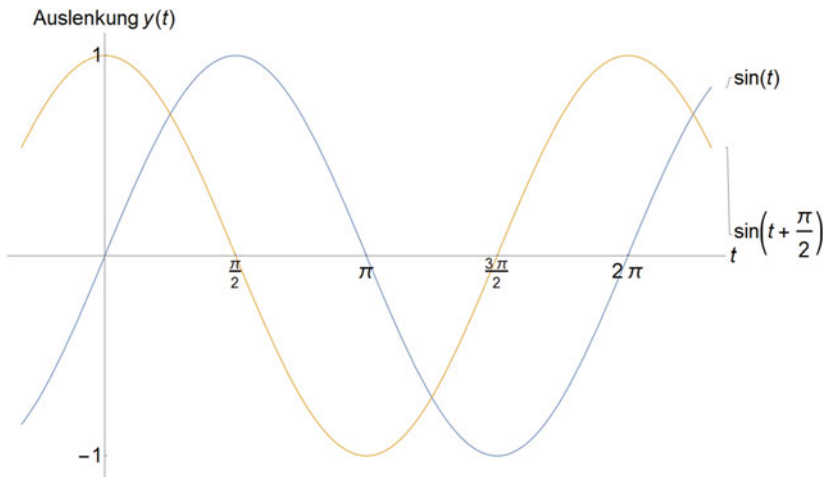


Abbildung 1.1 Verändern der Kreisfrequenz ω

³ Vergleiche Dudenredaktion (Hrsg.) (2001) [3], S. 170 und 376

**Abbildung 1.2** Verändern der Amplitude C **Abbildung 1.3** Verändern der Phase φ_0