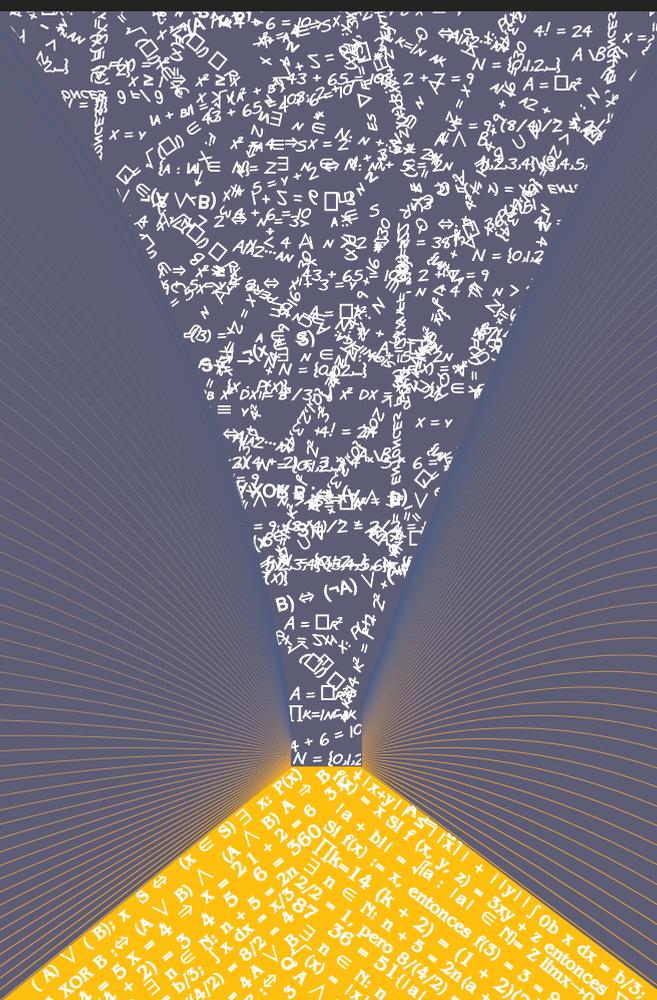


# APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

DESDE UN ENFOQUE COMUNICACIONAL

• ANNA SFARD •



**Aprendizaje de las  
matemáticas escolares  
desde un enfoque comunicacional**

**E&P**

Colección Educación y Pedagogía

## ANNA SFARD

De sólida formación en matemáticas y física, y con intereses académicos, de vieja data, en historia, filosofía y lenguaje, Anna Sfard se especializa en educación matemática. En la actualidad es Professor de la Universidad del Estado de Michigan y de la Universidad de Londres, así como también de la Facultad de Educación de la Universidad de Haifa, donde trabaja desde el año 1995.

Se destaca además su labor como editora y como invitada especial en conferencias y eventos de educación matemática del mundo entero.

A través de sus permanentes investigaciones en educación matemática, el foco principal de su indagación ha sido el desarrollo del discurso matemático, tanto desde el punto de vista histórico como ontogenético. En esta labor el asunto de la objetificación ha ocupado un lugar especial, dirigido por preguntas sobre el origen de los objetos matemáticos y acerca de la transición del pensamiento operacional al pensamiento estructural (reificación).

En particular, en una serie de estudios realizados con estudiantes de doctorado en Israel, Canadá y los Estados Unidos, Sfard ha estado investigando el desarrollo del discurso algebraico, el discurso sobre los números negativos, el discurso numérico inicial, el discurso matemático de estudiantes que alcanzan grandes logros o que han sido diagnosticados con problemas de aprendizaje, y el discurso profesional de profesores de matemáticas de secundaria.

Numerosas publicaciones de artículos en revistas y capítulos en diversos libros, dan cuenta de los resultados teóricos y empíricos de estos estudios, y próximamente aparecerá otro compendio de su trabajo en un nuevo libro. La divulgación de estas ideas novedosas puede contribuir enormemente a la comprensión y evolución de las transformaciones que sufre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la mayor parte de los países

**Aprendizaje de las  
matemáticas escolares  
desde un enfoque comunicacional**  
Anna Sfard

**E&P**

Colección Educación y Pedagogía

Sfard, Anna

Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional / Anna Sfard. — Santiago de Cali : Programa Editorial Universidad del Valle, 2008.

272 p. : il. ; 24 cm. — (Colección libro de investigación)

1. Educación Matemática - Investigación

2. Matemáticas - Aprendizaje I. Tít. II. Serie.

510.7 cd 21 ed.

A1157521

CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

**Universidad del Valle**  
**Programa Editorial**

Título: *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*

Autora: Anna Sfard

ISBN: 978-958-670-633-9

ISBN PDF: 978-958-765-607-7

DOI: 10.25100/peu.183

Colección: Educación y pedagogía

**Primera Edición Impresa**      **marzo 2008**

**Edición Digital**                      **febrero 2018**

Rector de la Universidad del Valle: Édgar Varela Barrios

Vicerrector de Investigaciones: Jaime R. Cantera Kintz

Director del Programa Editorial: Francisco Ramírez Potes

© Universidad del Valle

© Anna Sfard

Diseño de carátula: Programa Editorial

Este libro, o parte de él, no puede ser reproducido por ningún medio sin autorización escrita de la Universidad del Valle.

El contenido de esta obra corresponde al derecho de expresión del autor y no compromete el pensamiento institucional de la Universidad del Valle, ni genera responsabilidad frente a terceros. El autor es el responsable del respeto a los derechos de autor y del material contenido en la publicación (fotografías, ilustraciones, tablas, etc.), razón por la cual la Universidad no puede asumir ninguna responsabilidad en caso de omisiones o errores.

Cali, Colombia, febrero de 2018

## AGRADECIMIENTOS

El Área de Educación Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, se complace en presentar este libro a la comunidad académica del campo de investigación en Educación Matemática. En él se recopilan algunos de los artículos más importantes de la investigadora Anna Sfard, resultado de sus investigaciones sobre el aprendizaje de las matemáticas escolares. El enfoque comunicacional propuesto por Sfard en la reconceptualización del aprendizaje, constituye un valioso aporte para estudiantes, docentes e investigadores, interesados en profundizar sobre los problemas de comprensión y de formación de pensamiento matemático.

Con esta publicación, el Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, da continuidad a la divulgación de obras de relevancia internacional, por su interés académico, para la formación de docentes e investigadores en Educación Matemática.

Esta obra se suma a dos trabajos ya publicados por la Universidad del Valle en esta línea, que han tenido incidencia importante en la formación de pregrado y de postgrado en Educación Matemática en el país: *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* del investigador francés Raymond Duval, y *Aproximación sociocultural a la educación matemática* del investigador inglés Alan Bishop.

Por su contribución a este gran propósito de divulgación, le expresamos a Anna Sfard nuestra profunda gratitud, por aceptar que la Universidad del Valle realice la publicación en español de algunos de sus trabajos. Así mismo, extendemos nuestro agradecimiento a los editores de las publicaciones originales en inglés por autorizar la publicación de las respectivas traducciones.

Luisa Andrade y Patricia Inés Perry, quienes como traductoras y editoras de la traducción han dedicado enormes esfuerzos para hacer realidad esta publicación.

Manifestamos nuestro reconocimiento a la profesora Mercedes Guhl quien, desde el Programa de Especialización en Traducción Inglés-Español de la Universidad Nacional de Colombia, por segunda vez apoya una publicación del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, siendo coordinadora del proceso de traducción de los capítulos cuarto a séptimo de este libro. Hacemos extensivo este reconocimiento a quienes participaron en la traducción: Yezid Arévalo, Sergio E. Cortés, Cilia C. Gómez, María Emilia Aponte, Daniel Orozco, Francisco Pérez, Luz D. Acosta, Giovanni Camacho, Ángela M. Forero, Catalina Ruiz, Diego H. Gómez, Pascual Orduz y Jaime Soler.

## TABLA DE CONTENIDO

<b>Prólogo</b> .....	11
<b>Presentación de la obra</b> .....	15
<b>Capítulo 1. Sobre las metáforas de la adquisición y de la participación para el aprendizaje de las matemáticas</b> .....	23
Introducción .....	23
Aprender matemáticas: la metáfora de la adquisición versus la metáfora de la participación .....	25
¿Qué cambia la metáfora de la participación? .....	31
Pregunta para concluir: ¿hay que elegir una de las dos metáforas? .....	35
<b>Capítulo 2. Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso</b> .....	39
Planteamiento de la pregunta: ¿qué es lo que cambia cuando uno aprende matemáticas? .....	39
Enfoque comunicacional del aprendizaje .....	44
¿Cómo creamos nuevos usos de palabras y mediadores? .....	47
¿Cómo creamos nuevas reglas metadiscursivas y las convertimos en propias? .....	53
Consideraciones finales: ¿cómo afecta todo esto a la práctica? .....	62
<b>Capítulo 3. Enfoque comunicacional para investigar el aprendizaje de las matemáticas</b> .....	65

<b>Capítulo 4. Conducción del discurso por entre la metáfora y el rigor: el análisis focal para investigar el surgimiento de los objetos matemáticos</b> .....	71
¿Qué es la comunicación? .....	75
Una condición necesaria de la eficacia: mantener enfocado el discurso .....	80
Cuando no hay focos discursivos preexistentes: creación de objetos matemáticos .....	87
Resumen, discusión y conclusiones: los objetos matemáticos como producto de la necesidad de comunicarse .....	104
<b>Capítulo 5. La cognición como comunicación: reconsiderar el aprendizaje mediado por la conversación, a través del análisis multifacético de las interacciones matemáticas de los estudiantes</b> .....	111
Introducción: preguntas sobre el aprendizaje mediado por la conversación .....	112
Anotaciones preliminares sobre el pensar como acto comunicativo .....	119
¿Se comunican Ari y Gur? Análisis focal del encuentro inicial entre ellos .....	124
¿Por qué no se comunican? Análisis preocupacional del encuentro inicial de Gur y Ari .....	133
¿Aprenderán a comunicarse? Análisis del encuentro posterior entre Ari y Gur .....	147
Conclusiones: reconsiderar el aprendizaje mediado por la conversación .....	155
Metaconclusiones: reconsideración de nuestras ideas acerca del pensar .....	158
<b>Capítulo 6. En el discurso hay más de lo que se oye: mirar el pensamiento como acto comunicativo para aprender más acerca del aprendizaje matemático</b> .....	163
Preguntas que hemos planteado desde siempre sobre el pensamiento matemático, aún vigentes .....	164
Enfoque comunicacional de la cognición .....	175
¿Cómo cambia el panorama el enfoque comunicacional?	

Retomar las preguntas iniciales .....	188
Epílogo: cambiar mundos con palabras .....	208
<b>Capítulo 7. Sobre el movimiento de reforma y los límites del discurso matemático</b> .....	211
Algunas preguntas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que todo reformista debe formular .....	211
Preparación del escenario para responder las preguntas del reformista: hablar de aprendizaje en términos del discurso .....	215
El uso del lente discursivo para responder las preguntas originales .....	233
La reforma, ¿qué tan bien suple las necesidades del participante inexperto en el discurso matemático? .....	238
¿Qué se puede hacer para salvar tanto el discurso matemático del salón de clase como la reforma (y enseñar los números negativos de una forma significativa)? .....	244
<b>Un glosario para el enfoque comunicacional del pensamiento</b> .....	249
Términos explícitamente redefinidos .....	250
Términos y dicotomías que se han removido del discurso .....	254

**PÁGINA EN BLANCO  
EN LA EDICIÓN IMPRESA**

## PRÓLOGO<sup>1</sup>

Los textos que conforman este libro surgen de dos preocupaciones profesionales muy persistentes: una de índole general y otra personal. Como muchos de mis colegas no he estado satisfecha con la investigación existente sobre aprendizaje, y como muchos otros decidí remediar el problema tratando de revisar los anteojos conceptuales existentes.

El primer problema al que se enfrenta el investigador que está interesado en cómo las personas aprenden en general, y en cómo aprenden matemáticas en particular, es la oscilación entre dos deseos conflictivos: el de ser científico, lo que sea que esta palabra pueda significarle, y el deseo de captar la esencia de los fenómenos inherentes al ser humano. La no tan larga pero muy turbulenta historia de la investigación sobre el aprendizaje humano muestra que las dos metas de esta investigación —la de reproductibilidad científica, rigor y acumulatividad, por una parte, y la de hacer justicia a la complejidad de lo “exclusivamente humano”, por otra— son algo contradictorias y no son fáciles de reconciliar. Además de este dilema de vieja data, hay uno nuevo, generado por avances tecnológicos recientes. En la actualidad, la investigación sobre el aprendizaje se encuentra en estado de perturbación. Desde cuando las grabadoras de audio y de video se convirtieron en herramientas usuales de la actividad investigativa, nuestra capacidad para analizar y explicar las actividades humanas va a la zaga de nuestra capacidad de observar y de ver. A este respecto, nuestra situación actual es comparable a la de los científicos del siglo XVII cuando acababan de

---

<sup>1</sup> Traducción realizada por Patricia Inés Perry y Luisa Andrade. [N.E.]

enfrentarse con el microscopio recientemente inventado: lentes poderosos de alta resolución que revelan lo nunca antes observado deben estar correspondidos por un aparato teórico igualmente poderoso. Los enfoques disponibles para el estudio del aprendizaje, sean tradicionales o nuevos, se quedan cortos en proporcionar técnicas interpretativas que hagan justicia completa al nuevo tipo de información. Bajo un escrutinio recurrente, las réplicas permanentes de eventos de la vida real se muestran demasiado complejas y muy llenas de detalles finos para las herramientas más bien burdas de los enfoques cognitivistas tradicionales. Nuestra indefensión como investigadores se agrava más por el hecho de que las pedagogías actuales de “aulas conversacionales” y de “comunidades de indagación” hacen los procesos de aprendizaje no sólo más visibles sino también mucho más intrincados y confusos.

La razón más personal para mis intentos de reconceptualizar el aprendizaje fue la necesidad hondamente sentida de una mejora en mis propias prácticas de investigación. La insatisfacción con lo que yo había estado haciendo comenzó cuando después de completar mi disertación doctoral descubrí que sus ideas teóricas centrales no eran suficientemente operacionales para guiar la investigación empírica. Mi escrutinio posterior del campo hizo que me diera cuenta de que no estaba sola en este predicamento: la falta de operacionalidad parecía ser una aflicción universal de los discursos sobre el aprendizaje. La imprecisión inherente al vocabulario de los investigadores no carecía de consecuencias: vistos más de cerca, muchos de los desacuerdos actuales que dividen a la comunidad de investigación me parecieron un simple resultado de la falta de reconocimiento de la diversidad en los usos de palabras clave básicas por parte de los investigadores.

En estos días muchos investigadores trabajan en pos de marcos conceptuales que posiblemente ayuden a resolver viejos dilemas y a enfrentar el reto de las nuevas complejidades descubiertas. Se han hecho ya algunas propuestas promisorias y otras están en camino. El enfoque comunicacional presentado en este libro es producto de veinte años de búsqueda de la operacionalidad, combinada con intentos de hallar una ruta segura entre dos necesidades conflictivas, la necesidad de una comprensión útil, por una parte, y la necesidad de comunicabilidad y acumulabilidad, por la otra. Este marco especial, hecho a la medida de las necesidades de investigación sobre el pensamiento matemático y el aprendizaje, se ofrece en este libro como una evidencia de que comprometerse con la segunda necesidad no es el precio necesario para satisfacer la primera. Dicho esto, la tarea de construir el marco no está cerca de completarse. Por tanto, recomiendo ver este volumen como un resumen provisional de los esfuerzos continuados míos y de mis colegas.

Reconocimiento: Estoy en deuda con Luisa Andrade y Patricia Inés Perry por la iniciativa de publicar este libro, por su persistencia y determinación para superar las dificultades que una empresa como esta conlleva. Asimismo extiendo mi agradecimiento a la Universidad del Valle por el invaluable apoyo a esta iniciativa, y por llevarla a feliz término.

Anna Sfard  
Haifa, marzo de 2007

**PÁGINA EN BLANCO  
EN LA EDICIÓN IMPRESA**

## PRESENTACIÓN DE LA OBRA

En las últimas décadas, la comunidad de educación matemática ha estado viviendo un cambio en la forma de concebir e investigar el aprendizaje; de ser visto como una acción esencialmente individual ha pasado a ser visto como una acción inherentemente social y cultural (Yackel, 2000)<sup>1</sup>. Señala Leitão (2001)<sup>2</sup> que probablemente uno de los factores asociados con el creciente interés de los investigadores en la relación entre las prácticas discursivas y los procesos de construcción de conocimiento y, por tanto, en las formas de discurso que emergen en ambientes de aprendizaje, es la gran influencia que las aproximaciones socioculturales al desarrollo mental, lingüístico y psicológico han tenido en la investigación educativa occidental desde los años sesenta. Para estos investigadores, la percepción del lenguaje como una acción significativa y mediada por signos es la clave para comprender cómo los individuos negocian y construyen significado en contextos diseñados para la enseñanza y el aprendizaje.

En particular, en la década de los años noventa se proponen definiciones de aprendizaje que tienen que ver con el hecho de hacer parte de una comunidad de práctica al participar de manera adecuada y competente en ella, originadas

---

1 Yackel, E. (2000). Introduction: Perspectives on semiotics and instructional design. En P. Cobb, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 1-13). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers.

2 Leitão, S. (2001). Analyzing changes in view during argumentation: A quest for method. *Forum: Qualitative Social Research*, 2 (3). (<http://www.qualitative-research.net/fqs/fqseng.htm>, consulta hecha en enero de 2006).

principalmente en los planteamientos de Lave y Wenger (1991)<sup>3</sup>. Según la interpretación de Gómez (2000)<sup>4</sup> de tales planteamientos, el aprendizaje surge de un proceso de negociación de significado a través de la relación simbiótica entre participación y materialización: por medio de la participación se establecen relaciones con otras personas, se define la forma de hacer parte de una comunidad que tiene entre manos la realización de una determinada empresa y, por tanto, la forma de comprometerse en su logro, y se desarrolla la propia identidad; mediante la materialización se proyectan los significados personales y se perciben como existentes en el mundo de tal manera que se logra reflejar la experiencia en cosas concretas. La incorporación de aprendices a las comunidades de práctica se da por un proceso de participación periférica legítima, guiado por un experto.

Aunque este nuevo paradigma del aprendizaje todavía está lejos de estar maduro y de tener unos fundamentos teóricos sólidos y aceptados en general (Cole, 1995)<sup>5</sup>, existen ya aproximaciones bastante precisas, como las ideas y postulados trabajados por la investigadora Anna Sfard para el campo de la educación matemática. Ella es, sin lugar a dudas, una de las más destacadas e importantes académicas de la comunidad internacional en el área.

De la revisión de su trabajo, aun cuando sea superficial y ligera como la que podemos alegar haber hecho las editoras de la traducción que se presenta en esta obra, sobresalen varios aspectos que confirman el reconocimiento y relevancia de su propuesta.

La formulación de manera tan completa y coherente de una teoría, como pocas veces se da, que además de enunciar y explicar los principios teóricos los contraste con otros y los aterrice en la práctica para su utilización. La postura crítica pero a la vez moderada de la investigadora que la convierte en un adalid de la comunidad de educadores matemáticos; su creencia en el beneficio del pluralismo teórico, con respecto a lo cual afirma que “la exclusividad es enemi-

---

<sup>3</sup> Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

<sup>4</sup> Gómez, P. (2000). Teorías de aprendizaje y formación inicial de profesores. (<http://cumbia.ath.cx/pna.htm>, consulta hecha en enero de 2006).

<sup>5</sup> Cole, M. (1995). Socio-cultural-historical psychology: some general remarks and a proposal for a new kind of cultural-genetic methodology. En J.V. Wertsch, P. del Rio y A. Álvarez (Eds.), *Sociocultural studies of mind* (pp. 187-214). Cambridge, Massachusetts: Cambridge University Press.

ga del éxito” (Sfard, 2001, p. 99)<sup>6</sup>, junto con su marcada inclinación a entrar en profundidad en los temas de los que se ocupa en sus escritos, hacen de su voz una que nos invita a ser cada vez más conscientes de la complejidad inherente al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y nos alerta en contra de las soluciones definitivas, las soluciones rotundas. Como una derivación coherente de lo anterior, cabe destacar su interés genuino y sus inescatimables esfuerzos por encontrar formas más justas y objetivas de interpretar y determinar las evidencias acerca de los desempeños, el aprendizaje y el potencial matemático de los estudiantes.

Los aportes de Sfard contenidos en esta publicación no sólo apuntan a proponer una nueva conceptualización para el pensamiento —mediante el establecimiento de un enfoque comunicacional que equipara el proceso de pensar con la actividad comunicativa—, a mirar y abordar el discurso del salón de clase desde dos de sus componentes —las reglas metadiscursivas y las reglas del nivel de los objetos—, sino que también se ocupan de delinear y construir herramientas de análisis —el análisis focal con un foco tripartito y el análisis preocupacional— para indagar, investigar y analizar las actividades comunicativas. Sfard concibe el aprender matemáticas como un proceso de “convertirse en miembro de una comunidad matemática”. Así, la construcción de conocimiento equivale a ser capaz de participar en un discurso específico, y el conocimiento y los conceptos se ven como aspectos de la práctica, del discurso o de la actividad. El vocablo “discurso” supone tanto las ideas como la forma en que se presentan las ideas —reglas del nivel de los objetos y reglas metadiscursivas— y abarca cualquier forma de comunicación, bien sea escrita, oral, gestual e incluso mental, en el caso de la comunicación de una persona consigo misma.

Este libro presenta como capítulos, una selección de artículos de Sfard que constituyen una muestra de los aportes mencionados. Los tres primeros capítulos han sido incluidos por las editoras al considerar, con la anuencia de la autora, que por ser más cortos y concisos presentan una aproximación inicial más sencilla a los planteamientos de la investigadora, hecho que facilita en algún modo la primera lectura y prepara y proporciona una base para la lectura de los demás capítulos, donde ya hay una exposición más amplia y detallada de la propuesta.

El primer capítulo, titulado “Sobre las metáforas de la adquisición y de la participación para el aprendizaje de las matemáticas”, es traducción del original “*On acquisition metaphor and participation metaphor for mathematics learning*”

---

<sup>6</sup> Sfard, A. (2001). Equilibrar algo desequilibrado: los Estándares del NCTM a la luz de las teorías del aprendizaje de las matemáticas (primera parte). *Revista EMA*, 6 (2), 95-140.

publicado en 1996 en C. Alsina, J.M. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures*. Aquí, Sfard contrasta dos metáforas del aprendizaje bajo las cuales se pueden agrupar las diversas teorías al respecto. Por un lado, argumenta que es la metáfora de la adquisición, la que subyace a la mayoría de las teorías del aprendizaje, pues en ellas, éste se ve como un “acto de ganar conocimiento”, es decir, los conceptos se ven como unidades básicas de conocimiento que se pueden acumular, refinar gradualmente, y combinar para formar estructuras cognitivas cada vez más ricas y más complejas. Esta visión del aprendizaje, que parece natural, presenta la idea de una actividad de enriquecerse con mercancías, hace pensar en la mente como un contenedor que debe ser llenado con estas mercancías, y en el estudiante como el dueño de estos bienes. Por otro lado, Sfard designa metáfora de la participación a una nueva visión del aprendizaje como integración a una comunidad en acción más que como un intento de enriquecer una posesión individual. En esta perspectiva participacionista, no hay un punto final claro para el aprendizaje, las actividades matemáticas y la cognición nunca se consideran separadas del contexto dentro del cual están ocurriendo y el alumno se ve como una persona interesada en la participación en una cierta clase de actividades, más que en la acumulación de posesiones privadas.

El segundo capítulo, bajo el título “Aprender matemáticas como la acción de desarrollar un discurso”, es traducción del original “*Learning mathematics as developing a discourse*” publicado en el año 2001 en R. Speiser, C. Maher, C. Walter (Eds.), *Proceedings of 21<sup>st</sup> Conference of PME-NA* (pp. 23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, Mathematics, and Environmental Education. Se resalta aquí cómo desde la perspectiva del enfoque comunicacional, la tarea principal del profesor de matemáticas para promover el aprendizaje, es modificar e intercambiar el discurso existente más que crear uno de la nada. Específicamente, una persona que aprende altera y extiende sus habilidades discursivas de forma que llega a ser capaz de comunicarse sobre tópicos matemáticos con miembros de la comunidad matemática. Entonces, convertirse en un participante del discurso matemático es equivalente a aprender a pensar en una forma matemática. Sfard identifica tres dimensiones en las que difiere el posible discurso de un aprendiz con el discurso escolar típico: el vocabulario, los medios visuales que median la comunicación y las reglas metadiscursivas que conducen el flujo de la comunicación, y analiza las maneras en que puede ocurrir el cambio requerido, es decir las maneras de crear nuevos usos de palabras, mediadores y reglas metadiscursivas.

El tercer capítulo, denominado “Enfoque comunicacional para investigar el

aprendizaje de las matemáticas”, es traducción de la ponencia “*Learning discourse: Communicational framework for investigating mathematics learning*” que fue presentada por la autora en el simposio de la AERA en New Orleans, en abril de 2002. Esta breve exposición aborda también la cuestión de lo que significa aprender matemáticas. Desde la perspectiva del aprendizaje ya expuesta en el capítulo anterior, Sfard sugiere considerar las palabras mismas del estudiante y no lo que usualmente se acostumbra ver a través de ellas, y así el aprendizaje que ocurre puede ser visto como el proceso de cambiar las formas discursivas del estudiante, de una cierta manera bien definida, para llegar a usar las palabras relativas a los temas matemáticos como si se refirieran a entidades autónomas cuya existencia es independiente del discurso, es decir para darles un uso que se puede describir como objetificado. Más adelante, la autora centra el valor del cambio a la perspectiva comunicacional en tres puntos: notar que los factores sociales y culturales son los que en primera medida posibilitan el aprendizaje de las matemáticas; ayudar a explicar una complejidad inherente del aprendizaje de las matemáticas: que la consciencia de los estudiantes del uso apropiado de palabras y símbolos debe preceder a su habilidad para explicar ese uso; generar segundos pensamientos y cuestionamientos sobre muchas otras creencias pedagógicas.

El cuarto capítulo, llamado “Conducción del discurso por entre la metáfora y el rigor: el análisis focal para investigar el surgimiento de los objetos matemáticos” es traducción del original “*Steering (dis)course between metaphor and rigor: Using focal analysis to investigate the emergence of mathematical objects*” publicado en el año 2000 en *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (3), 296-327. El hecho de considerar que la comunicación es la fuerza conductora más importante que hay detrás de cualquier esfuerzo cognitivo humano lleva a Sfard a señalar que los objetos matemáticos se construyen de manera discursiva y surgen de la necesidad de comunicación más que ser elementos preexistentes para la comunicación. Por consiguiente, se resalta la necesidad de que la comunicación sea eficaz, lo cual, alega Sfard, depende en primer lugar, de la calidad del foco de la conversación, es decir, la necesidad de que el foco esté bien definido y sea compartido por las personas que intervienen; en segundo lugar, está supeditada al uso de mediadores visuales, que para el caso de las matemáticas consisten en artefactos simbólicos que reemplazan los objetos visibles y materiales inexistentes. La autora presenta entonces el análisis de un par de episodios de clase, realizado mediante una de las herramientas diseñadas especialmente para esto: el análisis focal.

El quinto capítulo, bajo el título “La cognición como comunicación: recon-

siderar el aprendizaje mediado por la conversación, a través del análisis multifacético de las interacciones matemáticas de los estudiantes” es traducción del original “*Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students’ mathematical interactions*” publicado en el año 2001 en *Mind, Culture, and Activity*, 8 (1), 42-76. La idea que integra el contenido de este texto hace alusión al giro radical en el asunto que era objeto de investigación en el proyecto descrito, como consecuencia de que la información inicial recogida sugería que algo fallaba en el aprendizaje matemático esperado a través de la interacción entre estudiantes. La forma en que los estudiantes se comunican en torno a las matemáticas pasó a ser así el centro del estudio. Sfard da cuenta entonces del proceso en el que surgieron las herramientas de análisis del pensamiento (la comunicación) y de cómo, mediante su empleo para analizar distintos episodios de interacción entre estudiantes, fue posible evidenciar que no se puede dar por sentado que la interacción entre estudiantes garantiza el aprendizaje, y que para que la comunicación conduzca al éxito se debe enseñar el arte de comunicarse.

El sexto capítulo, titulado “En el discurso hay más de lo que se oye: mirar el pensamiento como acto comunicativo para aprender más acerca del aprendizaje matemático”, es traducción del original “*There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning*” publicado en el año 2001 en *Educational Studies in Mathematics*, 46, 13-57. Sfard expone en este capítulo de manera bastante completa las ideas sobre el enfoque comunicacional y sus diferencias con otras perspectivas; además, revisa de nuevo con más detenimiento las metáforas del aprendizaje, introducidas en el primer capítulo. También, a través de dos episodios de clase conceptualiza e ilustra las herramientas diseñadas para el análisis del pensamiento (la comunicación). En las conversaciones correspondientes a tales episodios, Sfard identifica para cada estudiante los tres focos que ha definido y muestra que la divergencia de focos lleva al fracaso de la comunicación y lo explica, a diferencia de una primera mirada a la conversación que no provee razones específicas distintas de los lugares comunes que hemos usado desde siempre: ‘ese estudiante no entiende’. Insatisfecha con este análisis, Sfard propone complementarlo, con lo que llama el análisis preocupacional, es decir, con la determinación de las expectativas, intenciones y deseos de los participantes con respecto a la interacción, elementos que se reflejan en sus participaciones y que parecen interferir bastante en la eficacia de la comunicación.

El último capítulo, denominado “Sobre el movimiento de reforma y los límites del discurso matemático”, es traducción del original “*On reform movement and*

*the limits of mathematical discourse*” publicado en el año 2000 en *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (3), 157-189. Sfard aquí cuestiona críticamente ciertas concepciones populares sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que han sido ampliamente promovidas por las reformas educativas de distintas partes del mundo. Con base en el trabajo sobre matemáticas realizado por estudiantes de dos cursos distintos, dice la autora que mientras se siga creyendo que el conocimiento matemático, el profesor y la tarea a la que se enfrentan los estudiantes son los principales factores responsables de la manera en que los estudiantes se comportan en clase, no hay explicación para las incompatibilidades observadas en el desempeño de los grupos. En el enfoque comunicacional saber matemáticas se conceptualiza como la habilidad de participar en un discurso, y por lo tanto se debe prestar gran atención al asunto de las reglas metadiscursivas que regulan la participación, las cuales deben ser objeto de aprendizaje, aunque sean implícitas. Según esto es posible decir que los dos grupos participaron en diferentes discursos, y que esta diferencia es cuestión de aspectos invisibles del metanivel. Sfard da cuenta entonces de las características de las metarreglas e indica tres principios que podrían guiar la enseñanza de aquellas partes de las matemáticas escolares que exceden los límites del discurso cotidiano.

Para finalizar hemos incluido un glosario en el que Sfard resume los principios básicos del enfoque comunicacional para el aprendizaje y presenta una aproximación a la conceptualización de algunos de los términos involucrados en dichos principios.

En una sociedad como la de nuestro país donde la disciplina de la Educación Matemática hace su aparición recientemente y sus estudiosos son unos pocos grupos de profesores de algunas instituciones educativas y universidades del territorio colombiano, es evidente la urgencia de una reflexión más extendida, detenida y crítica sobre el aprendizaje de las matemáticas. A raíz de que, en general, la formación matemática de los ciudadanos se reconoce como indispensable y de que en diferentes niveles estatales e institucionales se ha hecho patente la preocupación por el escaso aprendizaje matemático de los estudiantes, revelado en los pobres resultados de distintas pruebas estandarizadas que se han realizado, diversos pronunciamientos y propuestas del Ministerio de Educación han intentado darle un viraje a la manera en que se detecta el aprendizaje y hasta cierto punto en lo que significa aprender. Sin embargo, no ha sido fácil para los profesores poner en práctica estos lineamientos y su implementación se ha quedado básicamente en un cambio en la forma de reportar el desempeño de los estudiantes.

La perspectiva del aprendizaje como participación en una comunidad específica abre la puerta a otra posibilidad para enriquecer la reflexión, pero así

mismo, para contar con nuevas herramientas que ayuden a los profesores en el desarrollo y evaluación del aprendizaje de las matemáticas, y a los investigadores en sus indagaciones al respecto. Vale la pena aclarar que ni la autora ni las editoras de este libro, están promoviendo un cambio total de paradigma con referencia al aprendizaje, ni un menosprecio o abandono de posiciones previas al respecto, más bien se destaca aquí la perspectiva participacionista como una posibilidad prometedora del aprendizaje y se aboga por una complementación de los enfoques, pues en concordancia con la misma Sfard y con Mislevy (2003)<sup>7</sup>, se considera que para promover y evidenciar el aprendizaje ocurrido y para la evaluación de éste, generalmente se requiere ver el aprendizaje de los estudiantes desde múltiples perspectivas conjuntas.

Esperamos que esta obra despierte en los lectores gran entusiasmo y les represente una rica fuente de descubrimiento como sucedió con nosotras, que sea una invitación a cuestionarse y profundizar en sus visiones y conocimiento acerca del aprendizaje matemático de los estudiantes, y se traduzca, por tanto, en una práctica con propósitos de aprendizaje más claros y con juicios basados en evidencias más tangibles.

Luisa Andrade

---

<sup>7</sup> Mislevy, R. (2003). *Argument substance and argument structure in educational assessment*. Los Angeles, CA: The Regents of the University of California.

CAPÍTULO 1

SOBRE LAS METÁFORAS DE LA ADQUISICIÓN  
Y DE LA PARTICIPACIÓN PARA EL APRENDIZAJE  
DE LAS MATEMÁTICAS<sup>1</sup>

INTRODUCCIÓN

TEORÍAS COMO METÁFORAS

En la novela *Ardiente Paciencia* —que se llevó a la pantalla en la inolvidable película *Il Postino (The Postman)*— el autor, Antonio Skarmata, cuenta la historia del poeta chileno Pablo Neruda quien explica el concepto de metáfora a su joven admirador, Mario, el cartero. A la pregunta de Mario en relación con la metáfora, “¿Qué clase de cosa es esa?”, el poeta responde: “Para que te hagas una idea, digamos que es presentar algo con la ayuda de otra cosa”. Un tratamiento bien clásico. Es el cartero no educado, y no el poeta sofisticado, quien después de mirar un poco a su alrededor y de explicaciones adicionales, obtiene una conclusión similar a la que en este capítulo se va a fundamentar: “El mundo entero es como una metáfora de algo más”. Lo inmediato de la idea de Mario indica que no es

---

1 Traducción realizada por Patricia Inés Perry y Luisa Andrade. [N.E.]

necesario más que mirar alrededor para advertir la ubicuidad de las metáforas y su poder para crear para nosotros el mundo en el que vivimos.

Aunque la indispensabilidad de las metáforas puede hacerlas prácticamente transparentes, los filósofos de la ciencia estuvieron de acuerdo hace ya mucho tiempo en que ninguna clase de investigación sería posible sin ellas (véase, e.g., Ortony, 1993). Como lo anota Scheffler (1991), “Si se pudiera trazar una línea entre la teoría seria y la metáfora, incluso en ciencia, tendría que ser muy delgada... no hay un punto obvio en el que se pueda decir ‘Aquí paran las metáforas y comienzan las teorías’” (p. 45). En efecto, no hay fronteras claras que separen lo metafórico de lo literal; no hay un contexto de expresiones genuinamente no figurativas en el que la naturaleza metafórica de términos tales como “tensión cognitiva”, “conjunto cerrado” o “construcción de significado” se pueda suprimir del todo. El hecho de que en el juego científico sea obligatorio ocultar los orígenes metafóricos de las ideas, hace difícil reconstruir las raíces figurativas de las teorías científicas. Al margen, permítaseme señalar cómo la distinción básica entre “literal” y “metafórico” pierde su razón de ser cuando se trata de conceptos que surgen a partir de las metáforas.

## METÁFORAS CONCEPTUALES

Muy a menudo, cuando escogemos un concepto, por ejemplo, *enseñanza*, y luego miramos cuidadosamente el lenguaje que solemos usar para hablar sobre dicho concepto, podemos advertir un fenómeno impactante: no obstante haber una gran variedad de expresiones comunes que tienen que ver con el concepto, cualquier subconjunto, de tamaño razonable, de tales expresiones nos conduce de manera sistemática a un cierto dominio bien definido que no parece ser un “ambiente natural” del concepto en cuestión. Así, por ejemplo, bien sea que hablemos de ‘transmitir ideas’, ‘dar o recibir un mensaje’ o ‘poner los pensamientos en palabras’, dejamos en claro que nuestra imagen de *comunicar* se toma en préstamo del dominio relativo al *transporte de mercancías*. Esta observación fue hecha inicialmente en los años setenta por Michael Reddy (1979/1993) en su artículo seminal *Conduit metaphor*. Desde entonces, las correspondencias conceptuales sistemáticas se conocen como *metáforas conceptuales* y se convirtieron en objeto de indagación vigorosa (Sacks, 1978; Lakoff y Johnson, 1980; Lakoff, 1987, 1993; Johnson, 1987). Lo que tradicionalmente se había considerado como una mera herramienta para comprender mejor y memorizar de manera más eficaz, fue entonces reconocido como una fuente primaria de nuestros sistemas conceptuales.

El carácter sistemáticamente impactante de las correspondencias concep-

tuales como las que se presentaron antes, y el hecho de que tales correspondencias sólo pueden surgir y ser disipadas a través del lenguaje, señalan al carácter social, supraindividual, de las metáforas conceptuales. Al ser subproductos de la comunicación interpersonal más que del esfuerzo solitario de un pensador, las metáforas tienen el estatus de posesiones públicas. No es de extrañar entonces que metáforas profundamente arraigadas, como la que vincula la comunicación humana con el transporte de mercancías, se consideren determinadas de manera externa, naturales, e independientes de la mente. Como tales, ellas también tienden a ser metáforas “muertas”, su naturaleza metafórica es difícilmente reconocible detrás de su aparente autoevidencia. Otro aspecto digno de mención es que las metáforas están incrustadas en lo cultural, es decir, son producto de asociaciones que son específicas a la cultura dentro de la cual surgen. Por tanto, se puede decir que la proyección metafórica es un mecanismo a través del cual la cultura dada se perpetúa y se reproduce en un sistema de conceptos que crece continuamente.

El propósito de este capítulo es la elicitación<sup>2</sup> de las metáforas que nos guían en nuestro trabajo como profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática. Antes de proseguir, sin embargo, permítaseme señalar que las cosas que voy a decir (tanto como las que ya dije) son, en sí mismas, metafóricas. Para quienes aceptan la afirmación sobre el papel constitutivo de la metáfora, este hecho debe ser fácilmente comprensible: si creamos nuestros sistemas conceptuales con la ayuda de metáforas, entonces el mecanismo de la metáfora es esencialmente recursivo —autorreferido. O, tal como Ricoeur (1977, p. 66) lo ha señalado, “La paradoja es que no podemos hablar sobre la metáfora a menos que usemos un marco conceptual surgido a partir de una metáfora”.

### APRENDER MATEMÁTICAS: *LA METÁFORA DE LA ADQUISICIÓN VERSUS LA METÁFORA DE LA PARTICIPACIÓN*

Al ir tras las metáforas que guían nuestro trabajo como profesores de matemáticas y como investigadores decidí recurrir a la literatura profesional para buscar allí expresiones características y palabras clave. No tuve que esforzarme mucho para notar que parece haber dos ideas prominentes que guían cuanto hacemos y decimos. En efecto, parece que la investigación en educación matemática se mueve atrapada

---

2 Pese a la no aceptación oficial del término “elicitación”, lo hemos adoptado como traducción del vocablo inglés *elicitation*, con el sentido de “hacer aflorar las creencias y patrones culturales propios de una comunidad de práctica”. [N.E.]

entre dos metáforas que decidí llamar *metáfora de la adquisición* y *metáfora de la participación*. Estas dos metáforas están presentes de manera simultánea en la mayoría de los textos recientes, aunque es usual que una de ellas predomine sobre la otra. En mi pesquisa, rápidamente advertí que la metáfora de la adquisición parece predominar en textos de hace ya varios años mientras que la metáfora de la participación tiene liderazgo principalmente en los estudios más recientes. También es bastante obvio que en la actualidad, algunos investigadores están haciendo un gran esfuerzo para liberarse de la primera metáfora a favor de la segunda.

## METÁFORA DE LA ADQUISICIÓN

Desde los albores de la civilización, se ha concebido el aprendizaje humano como una *adquisición* de algo. En el *Collins Dictionary of the English Language*, aprender se define como “el acto de ganar conocimiento”. A partir de los trabajos de Piaget y de Vygotsky, el crecimiento del conocimiento en el proceso de aprender se ha analizado en términos de *desarrollo de conceptos*. Los conceptos se han de ver como unidades básicas de conocimiento que se pueden acumular, refinar gradualmente, y combinar para formar estructuras cognitivas cada vez más ricas y más complejas. El cuadro no es muy diferente cuando hablamos sobre el aprendiz como una persona que *construye significado*. El enfoque del aprendizaje como adquisición, que en la actualidad parece evidente y natural, trae a la mente la actividad de enriquecerse cada quien con mercancías o bienes. El lenguaje de ‘adquisición de conocimiento’ y ‘desarrollo de conceptos’ nos hace pensar en la mente como si se tratara de un contenedor que debe ser llenado con ciertos materiales, y en el aprendiz, como en alguien que se convierte en el propietario de estos materiales.

Una vez que nos damos cuenta de que la metáfora de la adquisición es la que subyace a nuestro pensamiento sobre el aprendizaje de las matemáticas, inmediatamente nos hacemos conscientes de su presencia en casi toda verbalización común sobre el aprendizaje. Demos una mirada a una serie de títulos<sup>3</sup> tomados de publicaciones aparecidas en las dos últimas décadas: *Acquisition of mathematical*

---

3 A continuación damos una posible traducción de tales títulos: *Adquisición de conceptos y procedimientos matemáticos, Construir matemáticas, Los esquemas de Raquel para construir conocimiento sobre fracciones, El desarrollo de ... el concepto de razón, La construcción de número en los niños, Ampliar el significado de multiplicar y dividir, Tener y usar conocimiento geométrico, El desarrollo del concepto de espacio en el niño, Dificultades conceptuales ... en*

*concepts and processes, Building up mathematics, Rachel's schemes for constructing fraction knowledge, The development of ... ratio concept, Children's construction of number, Extending the meaning of multiplication and division, On having and using geometric knowledge, The development of the concept of space in the child, Conceptual difficulties... in the acquisition of the concept of function.* La idea de que aprendizaje significa adquisición y acumulación de algunos bienes es evidente en todos estos títulos. Ellos pueden apuntar a una recepción gradual o a una adquisición por desarrollo o por construcción, pero al parecer todos ellos implican ganar propiedad sobre alguna clase de entidad independiente.

Hay muchos tipos diferentes de entidades que se pueden adquirir en el proceso de aprendizaje. Se encuentra una gran variedad de términos importantes entre las palabras clave de los marcos de trabajo generados por la metáfora de la adquisición: *conocimiento, concepto, concepción, idea, noción, concepción errónea, significado, sentido, referente, esquema, hecho, representación, material, contenidos, proceso matemático, objeto matemático.* De igual forma hay muchos términos que denotan la acción de apropiarse de tales entidades: *recepción, adquisición, construcción, internalización, transmisión, logro, desarrollo, acumulación, captación.* El profesor puede ayudar al estudiante a alcanzar su meta *entregándole, transmitiéndole, facilitándole, mediando, etc.*

Este surtido terminológico impresionantemente rico fue necesario para hacer diferencias, algunas veces sustanciales y otras un poco sutiles, entre distintas escuelas de pensamiento. En las últimas décadas, se han hecho muchas sugerencias diferentes sobre la naturaleza del mecanismo a través del cual los conceptos matemáticos se pueden convertir en propiedad privada del aprendiz; sin embargo, a pesar de las muchas diferencias con respecto al asunto del “cómo”, no ha habido controversia sobre la esencia: la idea de aprender como ganar posesión sobre algún bien persistió en el espectro amplio de marcos de trabajo, desde el constructivismo moderado hasta el radical, y luego desde las teorías interaccionistas hasta las socio-culturales. Los investigadores han ofrecido una gama de mecanismos de desarrollo de conceptos, que difieren en gran medida. Primero hablaron simplemente sobre la ‘recepción’ pasiva de conocimiento (es decir, de conceptos); luego, sobre la construcción activa por parte del aprendiz; más tarde analizaron las formas en que los conceptos son transferidos desde un plano social a uno individual e interiorizados por el aprendiz; por último vislumbraron el aprendizaje como un proceso de emergencia en una interacción continua con pares, profesores y textos, que nunca termina y que se autorregula. Sin embargo, en la medida en que han investigado el aprendizaje enfocándose en el ‘desarrollo de conceptos’ y en la ‘adquisición de conocimiento’, de manera implícita han estado de acuerdo en que este proceso se