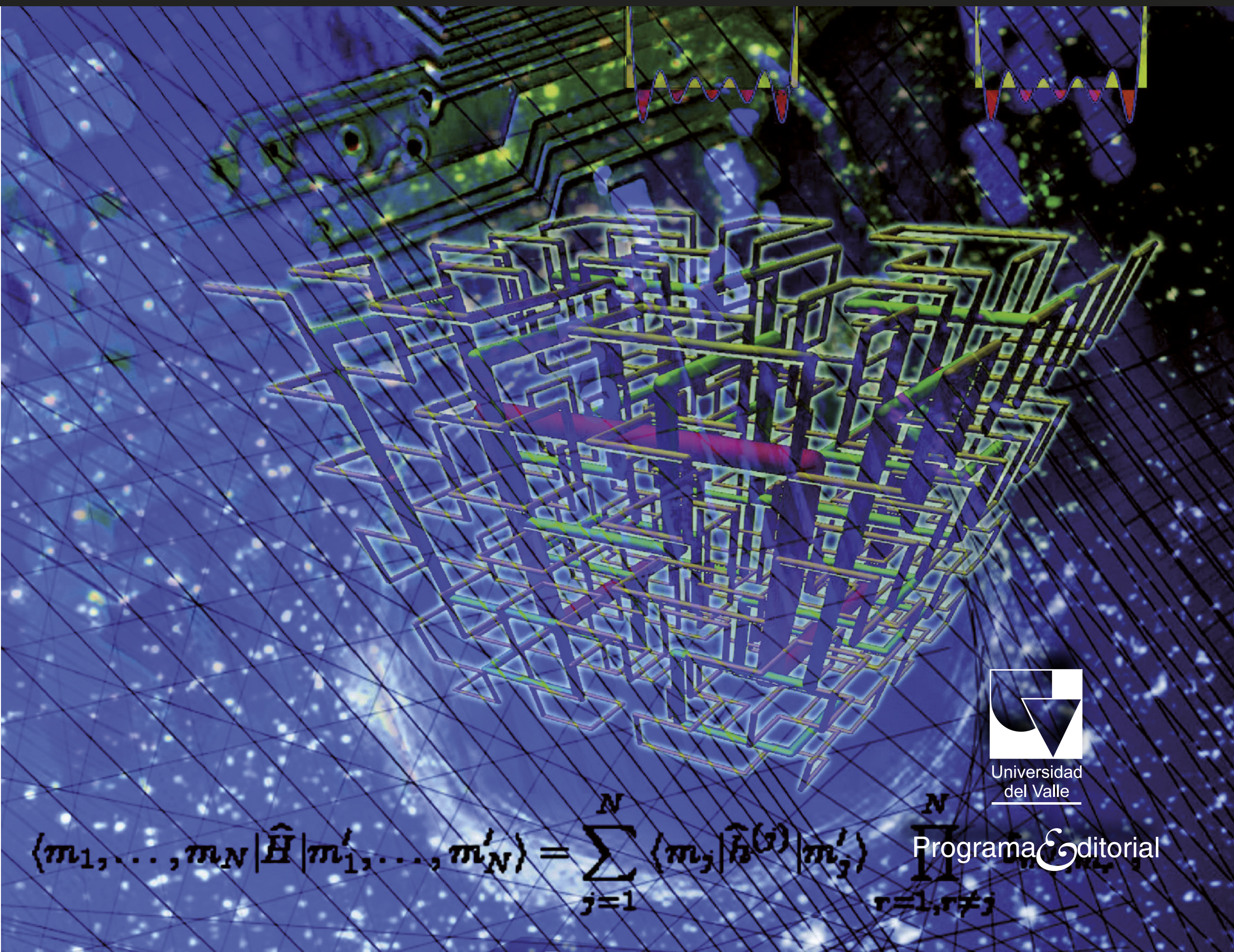
INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS FUNCIONAL

• Guillermo Restrepo Sierra •



Introducción al análisis funcional

Colección Ciencias Naturales y Exactas

En este texto, *Introducción al análisis funcional*, se tratan los temas clásicos del análisis funcional utilizado en diversos campos de la ciencia y tecnología. El acento se pone en la teoría de los espacios de Hilbert, las series de Fourier y los operadores compactos hermitianos. Sobre todo, este texto está pensado para estudiantes avanzados de los programas de pregrado de física y matemáticas o que inician estudios de posgrado. En todo caso, son necesarios, para su comprensión, conocimientos previos de la teoría de los espacios métricos, el álgebra lineal y al integral de Lebesgue. Por ello, para facilitar su lectura, hemos incluido, al final, un apéndice con la definiciones y los enunciados de los teoremas básicos relacionados con estos tópicos.

Universidad del Valle

Programa Editorial

Guillermo Restrepo Sierra

Introducción al análisis funcional

Colección Ciencias Naturales y Exactas

Restrepo Sierra, Guillermo
Introducción al análisis funcional / Guillermo Restrepo Sierra. -- Cali : Editorial Universidad del Valle, 2010.
304 p. : il. ; 24 cm. -- (Colección: Libros de Texto)
Incluye bibliografía e índice.
1. Análisis funcional - Libros de texto 2. Espacios Funcionales - Libros de texto 3. Series de Fourier - Libros de texto I. Tít. II. Serie.
515.7 cd 21 ed.
A1251452
CEP-Banco de la República-Biblioteca Luis Ángel Arango

Universidad del Valle
Programa Editorial

Título: *Introducción al análisis funcional*
Autor: Guillermo Restrepo Sierra
ISBN: 978-958-670-823-4
ISBN PDF: 978-958-765-495-0
DOI: 10.25100/peu.176
Colección: Ciencias Naturales y Exactas - Matemáticas
Primera Edición Impresa octubre 2010
Edición Digital junio 2017

Rector de la Universidad del Valle: Édgar Varela Barrios
Vicerrector de Investigaciones: Javier Medina Vásquez
Director del Programa Editorial: Francisco Ramírez Potes

Diseño de carátula: Anna Echavarria. Elefante
Corrección de estilo: Juan Carlos García M. -G&G Editores

Cali, Colombia, junio de 2017

Universidad
del Valle

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

CONTENIDO

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

PRÓLOGO

En este texto, *Introducción al Análisis Funcional,* se tratan los temas clásicos del análisis funcional utilizados en diversos campos de la ciencia y la tecnología. El acento se pone en la teoría de los espacios de Hilbert, las series de Fourier, la transformada de Fourier y los operadores compactos hermitianos. Por ello se omiten temas tales como la teoría de los espacios vectoriales topológicos, las topologías débiles y la teoría de las distribuciones, que se consideran 'tópicos avanzados'. El texto de Conway [2] es muy apropiado para iniciar el estudio de estos temas. El texto de Prugovecki [6] desarrolla y utiliza la teoría de los espacios de Hilbert para realizar una presentación axiomática de la Mécánica Cuántica.

Sobre todo, este texto está pensado para estudiantes avanzados de los programas de pregrado de física y matemáticas o que inician estudios de posgrado. En todo caso, conocimientos previos de la teoría de los espacios métricos, el álgebra lineal y la integral de Lebesgue son necesarios para su comprensión. Por ello, para facilitar su lectura, hemos incluído, al final, un apéndice con las definiciones y los enunciados de los teoremas básicos relacionados con estos tópicos. Casi todos estos temas son tratados en [3] y [7] de una manera completa.

Conviene hacer una breve síntesis histórica del desarrollo del análisis funcional, lo que a la vez permitirá ubicar el tema de nuestro estudio en el ámbito general de las matemáticas.

Análisis funcional es el nombre genérico de una disciplina matemática en cuyos inicios están los esfuerzos de Maurice Fréchet por estudiar el análisis matemático en el contexto general de los espacios métricos. El programa de

Fréchet fue esbozado en un artículo de 1904 [*Généralization d'un théoreme de Weierstrass*. C. R. Acad. Sci. Paris (1904)]. Se proponía crear un 'análisis general' en espacios abstractos en los cuales pudieran expresarse los conceptos del análisis clásico. Las matemáticas de su época apuntaban en esa dirección, pues se había iniciado la teoría de los espacios métricos completos y los espacios topológicos. Varios matemáticos utilizaban la notación $\|x\|$ (norma de x), cuando x es una función del espacio de las funciones continuas definidas en un intervalo cerrado $[a, b]$ (M. Fréchet) o cuando x es un elemento del espacio de las sucesiones de cuadrado sumable (E. Schmidt). Solamente en 1932, el concepto de norma en un espacio vectorial adquirió plena vigencia con el tratado de Stefan Banach, que inaugura la época de estudio de los hoy llamados espacios de Banach [S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Varsovia (1932)]. Una norma en un espacio vectorial E es una función $x \mapsto \|x\|$ de E en $\mathbb{R}_+$ que satisface las propiedades básicas del valor absoluto $t \mapsto |t|$, cuando t es un número real o complejo.

El libro de Banach es la referencia bíblica de los especialistas en la teoría de los espacios de Banach. El desarrollo de esa teoría ha seguido una línea ascendente hasta nuestros días. Desde un punto de vista intrínseco, la 'teoría pura' de los espacios de Banach se ha concentrado en los aspectos geométricos de los espacios de dimensión infinita y su clasificación desde varios puntos de vista (clasificación topológica, clasificación isomórfica, clasificación isométrica). Muchos de estos problemas fueron abordados por el mismo Banach en el libro mencionado. En forma sistemática, estos problemas han sido estudiados desde una perspectiva "moderna" en dos textos de J. Lindenstrauss y L. Tzafriri: *Classical Banach spaces I: Sequence spaces,* Spinger (1977) y *Classical Banach spaces II: Function spaces,* Springer (1979).

En esta historia hemos omitido muchos temas fundamentales. El lector interesado puede suplir estas omisiones con la lectura de una historia actualizada y completa del análisis funcional realizada por Albrecht Pietsch en su libro titulado *History of Banach Spaces and Linear Operator*, Birkhäuser, Berlin (2007).

Desde este punto de vista general, los espacios de Hilbert constituyen un caso especial de la teoría de los espacios de Banach, cuando la norma es inducida por un producto escalar. Pero esta afirmación es una simplificación de la riqueza estructural de los Espacios de Hilbert, como lo indicaremos a continuación.

En realidad, los espacios de Hilbert constituyen la generalización natural en dimensiones infinitas del teorema de Pitágoras y de las propiedades geométricas de los espacios euclidianos de dimensión finita. Esto hace que las intuiciones geométricas básicas de la geometría euclidiana sean válidas en dimensiones infinitas. Destacamos fundamentalmente las ideas de ortogonalidad, la existencia de proyecciones ortogonales sobre subespacios cerrados y la existencia de bases topológicas ortonormales. Por otro lado, el origen de la teoría de los espacios de Hilbert ha estado muy ligado al estudio de problemas de la física. Inicialmente, estos espacios fueron estudiados por D. Hilbert en contextos muy particulares al realizar sus investigaciones sobre las ecuaciones integrales y H. Weyl en su formulación de la teoría de los grupos en relación con la mecánica cuántica. Quien le dio a estos espacios una presentación madura fue J. von Neumann en su famoso libro *Mathematical foundations of Quantum Mechanics* (1955).

Las series de Fourier fueron inventadas por J. Fourier en su célebre monografía *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822). Él y varios matemáticos posteriores abrigaban la creencia que toda función continua y periódica en el intervalo $[0, 2\pi]$ podía representarse, en el sentido de la convergencia puntual de las series, por una suma infinita de senos y cosenos. En la actualidad, tal creencia ha sido corroborada con la teoría de los espacios de Hilbert, pero utilizando una nueva noción de convergencia de una serie, la convergencia en la media de orden dos. La transformada de Fourier se introdujo para eliminar la representación de las funciones por series de Fourier en intervalos finitos mediante integrales en toda la recta numérica.

* * *

En lo que sigue describimos brevemente el contenido del libro, capítulo por capítulo.

En el capítulo 1 se estudia el concepto de espacio de Banach y se distinguen los espacios de Banach de dimensión finita de aquellos que tienen dimensión infinita. Se analizan varios espacios de Banach clásicos y, entre ellos, los espacios $L^p(\mu)$ de las funciones μ- integrables de orden p. En el espacio $\mathcal{L}(E; F)$ de las funciones lineales continuas del espacio de Banach E en el espacio de Banach F se analiza la convergencia uniforme sobre subconjuntos acotados. La sección 1.7, en la cual se demuestran los teoremas clásicos de Banach-Steinhauss, el principio de la acotación

uniforme y el teorema de Hahn-Banach, es de gran importancia teórica. En la sección 1.8 se demuestra el teorema de la función abierta de Banach. La sección 1.10 sobre medidas radonianas es poco usual, pero la hemos incluido debido a la importancia reciente de estas medidas.
En el capítulo 2 se exponen las ideas básicas en torno a los espacios de Hilbert, aquellos espacios de Banach cuya norma es definida por un producto escalar. El eje de la presentación es el teorema de la proyección ortogonal. Se demuestran el teorema de representación de Riez de las formas lineales continuas en un espacio de Hilbert y el teorema de existencia de bases topológicas ortonormales. Se define la convergencia débil de sucesiones en espacios de Hilbert y se demuestra que para las sucesiones acotadas en un espacio de Hilbert es válido el teorema de Bolzano-Weierstrass respecto a la convergencia débil. Se demuestran las propiedades fundamentales del operador adjunto.

En el capítulo 3 se estudian las series de Fourier y la transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$. Se incluye el tema de la convergencia puntual de las series de Fourier y la integración y diferenciación de estas series. Se define la transformada de Fourier para funciones en $L^1(\lambda^n)$ y se presentan ejemplos de algunas transformadas de Fourier. Especial énfasis se pone en la fórmula de inversión de Fourier y su aplicación en el estudio de la transformada de Fourier en $L^2(\lambda^n)$.

El capítulo 4 es un estudio de los operadores compactos y sus valores propios en los espacios de Hilbert. Se demuestran las propiedades básicas de los operadores hermitianos y se estudian varios ejemplos (el operador integral con núcleo de cuadrado integrable, el operador de Volterra). Se comparan los operadores compactos con los operadores de rango finito. Se demuestra que el conjunto $\mathcal{K}_\circ(E;F)$ de los operadores de rango finito es un subespacio denso del espacio $\mathcal{K}(E;F)$ de los operadores compactos. Se demuestra el teorema de Fredholm (alternativa de Fredholm) y el teorema espectral para los operadores hermitianos compactos. Como aplicación del teorema espectral para los operadores compactos hermitianos, se analizan los operadores de Sturm-Liouville. Termina el capítulo con el estudio de los operadores de Hilbert-Schmidt y los operadores con traza (operadores nucleares), para lo cual es fundamental el teorema de la descomposición polar de un operador.

Hemos seguido ciertos lineamientos generales muy en boga en la actualidad relacionados con un libro introductorio de análisis funcional. Estos lineamientos aparecen claramente marcados en dos textos. En el libro de N.

Young [9; 1988], el autor se orienta hacia las aplicaciones, el estudio de los espacios de Hardy y el problema de aproximación por funciones analíticas. En el libro de Y. Eidelman, V. Milman y A. Tsolomities [10; 2004], los autores rebasan los límites de una teoría elemental y se comprometen con una teoría relativamente avanzada de los espacios de Banach y de las álgebras de Banach. El texto que presentamos coincide con los anteriores en lo que respecta a la teoría general de los espacios de Banach y de Hilbert. Pero, a diferencia de los textos mencionados, éste centra su atención en las series de Fourier, la transformada de Fourier y la teoría de los valores propios de los operadores hermitianos compactos y sus aplicaciones en el estudio de los operadores de Hilbert-Schmidt y los operadores nucleares según lineamientos de R. Schatten [8; 1970] en su libro *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*.

Un curso de un semestre se puede armar basado en los capítulos 2, 3 y 4 más las secciones 1 hasta 6 del capítulo uno. Pero para cubrir todo el texto detalladamente, es necesario un curso anual. Otra opción sería omitir el capítulo 3 y realizar un curso semestral basado en los capítulos 1, 2 y 4.

Finalmente, expreso mis agradecimientos a los estudiantes de varias cohortes del curso de Análisis funcional en el Departamento de Matemáticas de la Universidad del Valle, cuyas críticas han influido de una manera substancial en la presentación final de este texto. Muy especialmente agradezco a mis colegas Dr. Julio Delgado y Dr. Miguel Marmolejo por sus invaluables sugerencias sobre la redacción final de este libro.

Santiago de Cali, diciembre de 2009.

PÁGINA EN BLANCO
EN LA EDICIÓN IMPRESA

1 LOS ESPACIOS DE BANACH

En este capítulo se estudiarán las propiedades elementales de los espacios de Banach reales y complejos. Se caracterizarán los espacios de Banach de dimensión finita. Se definirán los espacios de Banach clásicos de sucesiones p- sumables $l^p(\mathbb{K})$ y los espacios $L^p(\mu)$ de las funciones p- integrables si $1 \leq p \leq \infty$. En el espacio $\mathcal{L}(E;F)$ de los operadores lineales y continuos de un espacio de Banach E en un espacio de Banach F se estudiará la convergencia uniforme sobre conjuntos acotados inducida por la norma $\|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\|$, la convergencia puntual y el teorema de Banach-Steinhauss. Se demostrarán los teoremas de Hahn-Banach y el teorema de la función abierta de Banach.

1.1 NORMAS Y ESPACIOS DE BANACH

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ (ver el apéndice, sección $A3$). Una función $x \mapsto \|x\|$ de E en $\mathbb{R}$ es una **norma** si satisface las condiciones siguientes:

$(N\,1)$ $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ y $\|x\| > 0$ si $x \neq 0$.
$(N\,2)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $(x,\, y) \in E^2$.
$(N\,3)$ $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E$.

A la desigualdad $(N2)$ se le suele llamar **desigualdad triangular**. La función $t \mapsto |t|$ de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ (valor absoluto de t) satisface las propiedades anteriores y es por tanto una norma en $\mathbb{K}$ llamada **norma del valor absoluto**. Aparece, entonces, el concepto de norma como una generalización del concepto de valor absoluto.

La proposición siguiente es básica:

(1.1.1) $$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\| \text{ para todo } (x, y) \in E^2.$$

Demostración. Como $x = (x - y) + y$, entonces $\|x\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ por $(N2)$ y por tanto $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Similarmente, $y = (y - x) + x$, así que $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. Como $(y - x) = (-1)(x - y)$, se deduce de $(N3)$ que $\|y - x\| = \|x - y\|$ y por tanto $\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\|$.

Un **espacio normado** es un espacio vectorial E dotado de una norma $\|\|$. Utilizaremos la expresión $(E; \|\|)$ para indicar que E es un espacio normado con la norma indicada. Si $(E; \|\|)$ es un espacio normado, entonces la función

$$(x, y) \mapsto \ d(x, y) = \|x - y\|$$

es una métrica en E llamada **métrica inducida** por la norma $\|\|$. La **bola abierta** (resp. la **bola cerrada**) de centro x y radio $\epsilon > 0$ es

(1.1.2) $$\begin{cases} \quad\quad B(x; \epsilon) = \{y : \|y - x\| < \epsilon\} \\ \text{resp. } \overline{B}(x; \epsilon) = \{y \in E : \|y - x\| \leq \epsilon\} \end{cases}$$

Si A es un subconjunto de un espacio vectorial E, definimos $x + A = \{z = x + a : a \in A$ y $\lambda A = \{z = \lambda a : a \in A\}$. Con esta notación, es inmediato que $B(x; \epsilon) = x + B(0; \epsilon)$. La topología determinada por la métrica d se llama **topología de la norma** para diferenciarla de otras topologías que se pueden definir en E. Una base de vecindades de cero de la topología de la norma es

$$\mathcal{B}(0) = \{B(0; \epsilon) : \epsilon > 0\}$$

y una base de las vecindades de x es

$$\mathcal{B}(x) = x + \mathcal{B}(0) = \{x + B(0; \ \epsilon) : \epsilon > 0\}.$$

Ejercicio. Demuestre que $B(x;\epsilon)$ es un conjunto abierto y $\overline{B}(x;\epsilon)$ es un conjunto cerrado.

(1.1.3) *Ejemplos* (de normas). En la sección 1.3 daremos más ejemplos de normas y espacios normados. Estos ejemplos tienen un carácter preliminar.

i. En $\mathbb{K}$ la función $x \mapsto |x|$ es una norma por las propiedades del valor absoluto. Se llama **norma del valor absoluto.** Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, la bola abierta de centro x y radio r es el intervalo $B(x;r) =]x-r, x+r[$. Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, la bola abierta de centro x y radio r es $B(x;r) = \left\{x : (x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}} < r\right\}$.

ii. En $\mathbb{R}^2$ las funciones

$$x = (x_1, x_2) \mapsto |x_1| + |x_2| = \|x\|_1$$

$$x = (x_1, x_2) \mapsto max\{|x_1|, |x_2|\} = \|x\|_{max}$$

$$x = (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2+x_2^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_2$$

son normas cuyas bolas unitarias cerradas se muestran en la Figura (1.1.1).

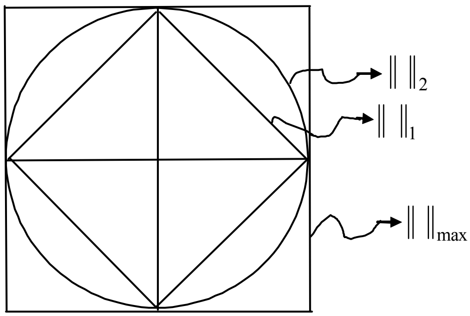


Figura 1.1.1

(1.1.4) Si E es un espacio normado, entonces las operaciones $(x,y) \mapsto x+y$ de $E \times E$ en E y $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ de $\mathbb{K} \times E$ en E son continuas.

Demostración. Sean

$$f(x,y) = x + y \text{ y } z_\circ = f(x_\circ, y_\circ) = x_\circ + y_\circ$$

y supongamos que $\epsilon > 0$. Entonces

$$\begin{aligned}\|f(x,y) - f(x_\circ, y_\circ)\| &= \|(x+y) - (x_\circ + y_\circ)\| \\ &= \|(x_\circ - y_\circ) + (y - y_\circ)\| \leq \|x - x_\circ\| + \|y - y_\circ\|.\end{aligned}$$

Si $\|x - x_\circ\| < \epsilon/2$ y $\|y - y_\circ\| < \epsilon/2$, entonces $\|f(x,y) - f(x_\circ, y_\circ)\| < \epsilon$, lo que prueba que f es continua. Sean ahora $g(\lambda, x) = \lambda x$ y $z_\circ = g(\lambda_\circ, x_\circ) = \lambda_\circ x_\circ$ y supongamos que $\epsilon > 0$. Observemos que

$$g(\lambda, x) - g(\lambda, x_\circ) = \lambda x - \lambda_o x_\circ = \lambda(x - x_\circ) + (\lambda - \lambda_\circ)x_\circ.$$

Si suponemos que $|\lambda - \lambda_\circ| \leq 1$, entonces $|\lambda| \leq 1 + |\lambda_\circ|$. Es fácil ver que si

$$\|x - x_\circ\| < \tfrac{\epsilon}{2(1+|\lambda_\circ|)} \qquad \text{y} \qquad |\lambda - \lambda_\circ| < \min\left\{1, \ \tfrac{\epsilon}{2(1+\|x_\circ\|)}\right\},$$

entonces $|g(\lambda, x) - g(\lambda_\circ, x_\circ)| \leq |\lambda|\|x - x_\circ\| + |\lambda - \lambda_\circ|\|x_\circ\| < \epsilon$, lo que demuestra que g es continua.

(1.1.5) Si $(E; \|\|)$ es un espacio normado, entonces las funciones $x \mapsto x + a = t_a(x)$ (a- traslación) y $x \mapsto \lambda x = h_\lambda(x), \lambda \neq 0$ (λ-homotecia), de E en E son homeomorfismos. Las funciones inversas respectivas son $t_a^{-1}(x) = x - a$ y $h_\lambda^{-1}(x) = \lambda^{-1}x$.

(1.1.6) Si $(E; \|\|)$ es un espacio normado, entonces la función $x \mapsto \|x\|$ es uniformemente continua.

Ejercicio. Demuestre los enunciados anteriores.

Sean $(Y; d)$ un espacio métrico y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y. Esta sucesión es **convergente** si existe un $x \in Y$ (límite de la sucesión) tal que para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_\circ$ implica $d(x_n, x) < \epsilon$. Escribiremos $x_n \to x$ o $\lim\limits_n x_n = x$ para indicar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge a $\boldsymbol{x}$**. Una sucesión convergente tiene un solo límite. Es inmediato que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio normado E converge a x si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_\circ$ implica $\|x - x_n\| < \epsilon$. Dicha sucesión es una ***d*-sucesión de Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_\circ \in \mathbb{N}$ tal que $i, j \geq n_\circ$ implica $d(x_i, x_j) < \epsilon$. Un espacio métrico $(Y; d)$ es **completo** si en él toda sucesión de Cauchy es convergente.

Ejercicio. Demuestre que una sucesión en un espacio métrico converge a lo más a un punto.

Un **espacio de Banach** es un espacio normado y completo. Es decir, es un espacio normado en el cual toda sucesión de Cauchy es convergente. En un espacio normado $(E; \|\|)$ una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x si y sólo si $\|x - x_n\| \to 0$.

(1.1.7) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en un espacio métrico $(Y; d)$ y una subsucesión $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x.

Ejercicio. Demuestre este enunciado.

(1.1.8) Sea $(E; \|\|)$ un espacio normado.

1. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$, entonces $x_n + y_n \to x + y$
2. Si $x_n \to x$, entonces $\lambda x_n \to \lambda x$.
3. Si $x_n \to x$ y $\lambda_n \to \lambda$, entonces $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

Demostración. Por la continuidad de las operaciones $(x, y) \mapsto x + y$ y $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$.

Si $(E; \|\|)$ es un espacio normado y X es un subespacio vectorial, denotaremos por $\|\|_X$ la restricción de la norma de E a X. Es claro que $(X; \|\|_X)$ es un espacio normado. Un **subespacio** de un espacio normado $(E; \|\|)$ es cualquier subespacio de E dotado de la norma de E restringida al subespacio.

(1.1.9) Sean $(E; \|\|)$ un espacio normado y X un subespacio de E. Entonces $adh(X)$ es un subespacio cerrado de E. Además, si E es un espacio de Banach, entonces $adh(X)$ es un espacio de Banach con la norma de E restringida a $adh(X)$.

Demostración. Sean $x, y \in adh(X)$. Demostremos que $x + y \in adhX$. Existen sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X que convergen a x y y respectivamente. Luego $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en X que converge a $x + y$ por la continuidad de la suma y por tanto $x + y \in adhX$. Similarmente, si $x \in adhX$ y λ es un escalar, entonces $\lambda x \in adhX$. Supongamos que E es completo y demostremos que $adh(X)$ es completo. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $adh(X)$, entonces converge a un

$x \in E$ porque E es completo y este $x \in adh(X)$ ya que este conjunto es cerrado.

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Si a y $b \in E$, definimos los conjuntos:

$$]a,\, b[= \{tb + (1-t)a : 0 < t < 1\}$$
(**segmento abierto** de extremos a y b)

$$[a, b] = \{tb + (1-t)a : 0 \leq t \leq 1\}$$
(**segmento cerrado** de extremos a y b).

En forma similar se definen los segmentos $[a, b[$ y $]a, b]$. Un subconjunto B de un espacio vectorial real E es **convexo** si contiene a todos los segmentos cerrados que tienen sus extremos en B. Es inmediato que B es convexo si y sólo si

$$tx + (1-t)y \in B \text{ para todo } (x, y) \in B \times B \text{ y todo } 0 \leq t \leq 1.$$

Una **función convexa** es una función f definida en un subconjunto convexo B y con valores en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

para todo $0 \leq t \leq 1$.

(1.1.10) Las normas en un espacio vectorial son funciones convexas.

Ejercicio. Demuestre este enunciado.

(1.1.11) Los siguientes subconjuntos son subconjuntos convexos de un espacio normado $(E; \|\|)$: los subespacios, los segmentos y las bolas abiertas y cerradas $B(x; r)$ y $\overline{B}(x; r)$.

Ejercicio. Demuestre este enunciado.

A menudo es conveniente definir seminormas en vez de normas. Una **seminorma** en un espacio vectorial E es una función $x \mapsto N(x)$ que satisface todas las condiciones de una norma, salvo que no se requiere que $N(x) = 0$ implique $x = 0$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, la función $N(x) = |x_1|$ es una seminorma pero no es una norma. Un **espacio seminormado** es un espacio vectorial dotado de una seminorma. La mayoría de los teoremas demostrados para las normas son válidos para las seminormas. En los espacios seminormados los límites de las sucesiones no son únicos.

1.2 NORMAS EQUIVALENTES E ISOMORFISMOS

Sean $\|\|_1$ y $\|\|_2$ dos normas en el espacio vectorial E. Diremos que la norma $\|\|_1$ es **más débil** que la norma $\|\|_2$ si la topología inducida por la primera norma es más débil (tiene menos abiertos o menos vecindades en cada punto) que la topología inducida por la segunda. La relación “más débil que” entre normas es una relación de preorden que indicaremos escribiendo $\|\|_1 \preceq \|\|_2$. Es inmediato que $\|\|_1 \preceq \|\|_2$ si y sólo si la función de inclusión $\iota : (E; \|\|_2) \to (E; \|\|_1)$ es continua.

(1.2.1) Sean $\|\|_1$ y $\|\|_2$ dos normas en un espacio vectorial E. Los enunciados siguientes son equivalentes:

1. $\|\|_1 \preceq \|\|_2$.
2. Existe una constante $\beta > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2$.
3. Para todo $\epsilon > 0$ existe un $\eta > 0$ tal que

$$B_1(0;\epsilon) = \{x : \|x\|_1 < \epsilon\} \supseteq B_2(0;\eta) = \{x : \|x\|_2 < \eta\}.$$

Demostración. Demostremos que (1) $\Longrightarrow$ (2). Sea τ_j la topología inducida por $\|\|_j$ ($j = 1, 2$). Por hipótesis $\iota : (E;\tau_2) \to (E;\tau_1)$ es continua ($\iota(x) = x$ para todo x). Luego existe un $\delta > 0$ tal que $\|x\|_2 \leq \delta$ implica $\|x\|_1 \leq 1$. Si $x \neq 0$ y $a = (\|x\|_2)^{-1}(\delta/2)x$, entonces $\|a\|_2 < \delta$ y por tanto $\|a\|_1 = (\|x\|_2)^{-1}(\delta/2)\|x\|_1 \leq 1$. Luego $\|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2$, donde $\beta = 2/\delta$. Demostremos que (2) $\Longrightarrow$ (3). Si $\epsilon > 0$, sea $\eta = \epsilon/\beta$. Entonces $B_2(0;\eta) \subseteq B_1(0;\epsilon)$. Demostremos que (3) $\Longrightarrow$ (1). Sea $x_\circ \in E$. Si $\epsilon > 0$ es dado, sea η tal que $B_2(0;\eta) \subseteq B_1(0;\epsilon)$. Entonces $\|x - x_o\| < \eta$ implica $\|x - x_o\| < \epsilon$. Hemos así demostrado que $\iota : (E;\ \tau_2) \to (E;\tau_1)$ es continua y por tanto $\|\|_1 \preceq \|\|_2$.

Dos normas $\|\|_1$ y $\|\|_2$ en un espacio vectorial E son **equivalentes** si $\|\|_1 \preceq \|\|_2$ y $\|\|_2 \preceq \|\|_1$. Las normas en (1.1.3.2) son equivalentes pero no son iguales. Es claro que dos normas son equivalentes si y sólo si inducen la misma topología. Escribiremos $\|\|_1 \simeq \|\|_2$ para indicar que estas normas son equivalentes. La relación $\simeq$ es una relación de equivalencia en el conjunto de todas las normas definidas en un espacio vectorial. Mostraremos en la sección siguiente que en los espacios de Banach de dimensión infinita existen normas que no son equivalentes.

(1.2.2) $\|\|_1 \simeq \|\|_2$ si y sólo si existen constantes α y $\beta\ > 0$ tales que

$$\alpha\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2$$

para todo $x \in E$.

Demostración. Por (1.2.1).

(1.2.3) Sean $\|\|_1$ y $\|\|_2$ dos normas en el espacio vectorial E.

1. Si $\|\|_1 \preceq \|\|_2$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\|\|_2$- Cauchy, entonces es $\|\|_1$- Cauchy.
2. Si $\|\|_1 \preceq \|\|_2$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión $\|\|_2$- convergente a x, entonces es $\|\|_1$- convergente a x.
3. Si $\|\|_1 \simeq \|\|_2$, entonces E es $\|\|_1$- completo si y sólo si es $\|\|_2$- completo.

La demostración se propone como ejercicio.

(1.2.4) En todo espacio vectorial de dimensión infinita existen normas no equivalentes.

Demostración. Sean E un espacio vectorial de dimensión infinita y $\{a_t : t \in T\}$ una base algebraica de E. Todo $x \in E$ se puede escribir de manera única como $x = \sum_t x_t a_t$, donde $x_t = 0$ en el complemento de un conjunto finito. Consideremos las normas

$$\|x\|_1 = \textstyle\sum_t |x_t| \text{ y } \|x\|_\circ = max_t|x_t|.$$

Demostremos que estas normas no son equivalentes. En efecto, sea $\{a_{t_n} : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto infinito y numerable de $\{a_t : t \in T\}$. Si

$$x_n = a_{t_1} + 2a_{t_2} + \ \cdots \ + \ na_{t_n}$$

entonces $\|x_n\|_\circ = n$ y $\|x_n\|_1 = \frac{n(n+1)}{2}$. Es claro que $\|x\|_\circ \leq \|x\|_1$ para todo x, pero ningún $\alpha > 0$ satisface $\|x\|_1 \leq \alpha\|x\|_\circ$ para todo x.

(1.2.5) *Teorema*. Sean $(E; \|\|_E)$ y $(F; \|\|_F)$ espacios normados. Una función lineal $u : E \to F$ es continua si y sólo si existe una constante $r > 0$ tal que $\|u(x)\|_F \leq r\|x\|_E$ para todo $x \in E$.

Demostración. Supongamos que u es continua. Entonces es continua en $x = 0_E$ y por tanto, dado $\epsilon = 1$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|x\|_E \leq \delta$ implica $\|u(x)\| \leq 1$. Si $x \neq 0_E$, entonces $\left(\frac{\delta}{\|x\|_E} x\right) = y$ tiene norma $\leq \delta$ y por tanto $\|u(y)\|_F = \frac{\delta}{\|x\|_E} \cdot \|u(x)\|_F \leq 1$ y $\|u(x)\|_F \leq r\|x\|_E$, donde $r = \delta^{-1}$. Supongamos que u satisface la desigualdad del teorema. Sea $a \in E$ un punto arbitrario de E. Entonces, por ser u lineal,

$$\|u(x) - u(a)\| = \|u(x - a)\| \leq r\|x - a\|$$

y por tanto $\lim\limits_{x \to a} \|u(x) - u(a)\| = 0$, es decir, $\lim\limits_{x \to a} u(x) = u(a)$.

Sean $(E; \|\|_E)$ y $(F; \|\|_F)$ dos espacios normados. Un **isomorfismo** de E en F es una función lineal y biyectiva $u : E \to F$ tal que u y u^{-1} son continuas. Dos espacios normados $(E; \|\|_E)$ y $(F; \|\|_F)$ son **isomorfos** si existe un isomorfismo de E en F.

(1.2.6) Dos espacios normados E y F son isomorfos si y sólo si existen una función lineal sobreyectiva $u : E \to F$ y constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\alpha\|x\|_E \leq \|u(x)\|_F \leq \beta\|x\|_E \,.$$

La demostración se propone como ejercicio.

(1.2.7) Dos normas $\|\|_1$ y $\|\|_2$ en un espacio vectorial E son equivalentes si y sólo si $\iota : E \to E$ definida por $\iota(x) = x$ para todo x es un isomorfismo de $(E; \|\|_1)$ en $(E; \|\|_2)$.

La demostración se propone como ejercicio.

1.3 ESPACIOS DE BANACH DE DIMENSIÓN FINITA

Recordemos que $\mathbb{K}^h$ $(h \in \mathbb{N})$ es el producto cartesiano h veces de $\mathbb{K}$. Sus elementos son las familias finitas $x = (x_k)_{1 \leq k \leq h}$ de elementos de $\mathbb{K}$. Este espacio es el modelo de todos los espacios de Banach de dimensión finita, como lo demostraremos más adelante. La función

$$x = (x_k)_{1 \leq k \leq h} \mapsto \|x\|_{max} = max\{|x_k| : 1 \leq k \leq n\}$$

es una norma en $\mathbb{K}^h$ llamada norma del maximum. La topología inducida por esta norma es la topología producto ya que

$$B(0; r) = \prod_{k=1}^{h} \{x_k : |x_k| < r\}.$$

(1.3.1) *Teorema*. $(\mathbb{K}^h; \|\|_{max})$ es un espacio de Banach, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Demostración. Recordemos que en $\mathbb{R}$ toda sucesión de Cauchy es convergente. Lo mismo ocurre en $\mathbb{C}$. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}^h$, donde $x_n = (x_{n,k})_{1 \leq k \leq h}$, entonces $(x_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ para cada k. Si su límite es a_k y $a = (a_k)_{1 \leq k \leq h}$, entonces $\lim\limits_{n} x_n = a$.

(1.3.2) *Lema*. Sean $(E; \|\|)$ un espacio normado de dimensión h, $\{a_1, a_2, \cdots, a_h\}$ una base algebraica de E y $\varphi : \mathbb{K}^h \to E$ la función definida por $\varphi(t) = \sum\limits_{k=1}^{h} t_k a_k$. Entonces φ es lineal y biyectiva y existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que

$$\alpha \cdot \|t\|_{max} \leq \|\varphi(t)\| \leq \beta \cdot \|t\|_{max}.$$

Demostración. Que es lineal y biyectiva es obvio. Es claro que

$$\|\varphi(t)\| \leq \sum_{k=1}^{h} |t_k| \|a_k\| \leq \beta \cdot \max_{1 \leq k \leq h} |t_k| = \beta \cdot \|t\|_{max}$$

donde $\beta = \sum\limits_{k=1}^{h} \|a_k\|$. Esta desigualdad muestra que φ es continua. Para demostrar la otra desigualdad, consideremos la función $f(t) = \|\varphi(t)\|$, la cual es continua por ser la composición de dos funciones continuas. Como el $S = \{t : \|t\|_{max} = 1\}$ es un subconjunto compacto de $\mathbb{K}^n$, concluimos que existe un $s \in S$ tal que $f(s) = \inf\limits_{t \in S} f(t) = \|\varphi(s)\| = \alpha > 0$. Por consiguiente, si $t \neq 0$ entonces $\left\|\varphi\left(\frac{t}{\|t\|_{max}}\right)\right\| \geq \alpha$ y por tanto $\|\varphi(t)\| \geq \alpha \cdot \|t\|_{max}$.

(1.3.3) *Teorema*. Sean E y F espacios normados. Si E tiene dimensión finita, entonces toda función lineal de E en F es continua.

Demostración. Sean h la dimensión de E y $\{a_k : 1, k \leq h\}$ una base de E. Para todo $x \in E$, existe una familia única de escalares $t = (t_k)_{1 \leq k \leq h}$ tal que $x = \sum_{k=1}^{h} t_k a_k$ y por el lema anterior existe una constante $\alpha > 0$ tal que $\alpha \cdot \|t\|_{max} \leq \|x\|$. Si $u : E \to F$ es lineal, entonces $u(x) = \sum_{k=1}^{h} t_k u(a_k)$ y

$$\|u(x)\| \leq \sum_{k=1}^{h} |t_k| \|u(a_k)\| \leq m \cdot \max_{1 \leq k \leq h} |t_k| \leq (m\alpha^{-1})\|x\|,$$

donde $m = \sum_{k=1}^{h} \|u(a_k)\|$. Por (1.2.5), la función lineal u es continua.

(1.3.4) *Teorema*. Todo espacio normado $(E; \|\|)$ de dimensión finita h es isomorfo a $(\mathbb{K}^h; \|\|_{max})$.

Demostración. Sean $\{a_1, a_2.\cdots, a_h\}$ una base algebraica de E y $\varphi : \mathbb{K}^h \to E$ definida por $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{h} t_k a_k$, donde $t = (t_k)_{1 \leq k \leq n}$. Por el lema (1.3.2) y por (1.2.6), φ y φ^{-1} son funciones lineales continuas.

(1.3.5) *Teorema*. Un espacio vectorial tiene dimensión finita si y sólo si en él todas las normas son equivalentes.

Demostración. Sea E un espacio vectorial de dimensión finita h. Si $\{a_1, a_2, \cdots, a_h\}$ es una base algebraica de E, entonces todo $x \in E$ se puede escribir de manera única como $x = \sum_{k=1}^{h} t_k a_k$. Sea $\|\|$ una norma arbitraria en E y consideremos la norma particular $x \mapsto \|x\|_* = \|t\|_{max}$. Por el lema anterior existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha\|x\|_* \leq \|x\| \leq \beta\|x\|_*$. Luego $\|\| \simeq \|\|_*$ por (1.2.2).

Supongamos ahora que en E todas las normas son equivalentes. Por el enunciado (1.2.4), E necesariamente tiene dimensión finita.

Vamos a caracterizar los espacios normados de dimensión finita en términos de compacticidad, para lo cual utilizaremos el lema de Riesz. Un subespacio Y de un espacio vectorial E es **propio** si es distinto de E y ϕ.

(1.3.6) *Lema* **(de Riesz)**. Sea Y un subespacio propio y cerrado del espacio normado E. Entonces para todo $0 < r < 1$ existe un x_r (que depende de r) tal que $\|x_r\| = 1$ y $r < \|x_r - y\|$ para todo $y \in Y$.

Demostración. Sea $x \in Y^c$. Por ser Y cerrado, $\beta = d(x, Y) > 0$ y $0 < \beta < \frac{\beta}{r}$ porque $0 < r < 1$. Existe $z \in Y$ tal que $\|x - z\| < \frac{\beta}{r}$. Sea $x_r = (x - z)/\|x - z\|$. Observemos que si $y \in Y$, entonces

$$\begin{aligned} \|x_r - y\| &= \left\| \tfrac{x}{\|x-z\|} - \tfrac{z}{\|x-z\|} - \tfrac{\|x-z\|}{\|x-z\|} y \right\| \\ &= \tfrac{1}{\|x-z\|} \cdot \|x - (z + \|x - z\| y)\| > \tfrac{r}{\beta} \cdot \beta = r \end{aligned}$$

ya que $z + \|x - z\|y \in Y$. Por consiguiente, $\|x_r - y\| > r$ para todo $y \in Y$.

(1.3.7) *Teorema*. Un espacio de Banach E es de dimensión finita si y sólo si la bola unitaria cerrada $\overline{B} = \{x : \|x\| \le 1\}$ es compacta.

Demostración. Supongamos que E tiene dimensión finita h y sea $\varphi : \mathbb{K}^h \to E$ el isomorfismo del lema (1.3.2). Entonces $\varphi^{-1}(\overline{B})$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{K}^h$. Es, además, acotado, pues $\|\varphi^{-1}(x)\| \le \alpha^{-1}$ si $x \in \overline{B}$. Luego $\varphi^{-1}(\overline{B})$ es compacto y por tanto $\overline{B} = \varphi \circ \varphi^{-1}(\overline{B})$ es compacto. Supongamos ahora que la bola unitaria $\overline{B}$ es compacta y demostremos que E tiene dimensión finita. Utilizaremos el lema de Riesz. Supongamos que E tiene dimensión infinita. Sea $0 < r < 1$. Definiremos inductivamente un conjunto infinito $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $d(a_k, a_j) > r$ si $j \neq k$. Escogemos a_1 tal que $\|a_1\| = 1$. Si $Y_1 = lin\{a_1\}$, existe a_2 tal que $\|a_2\| = 1$ y $d(a_2, Y_1) > r$. Si $Y_2 = lin\{a_1, a_2\}$, existe a_3 tal que $\|a_3\| = 1$ y $d(a_3, Y_2) > r$. Este proceso se puede continuar indefinidamente porque hemos supuesto que E tiene dimensión infinita. Claramente $d(a_k, a_j) > r$ si $k \neq j$. Por tanto, el conjunto infinito $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ no tiene puntos de acumulación, lo que no es posible porque B es compacto por hipótesis.

1.4 ESPACIOS DE BANACH : EJEMPLOS

A- El espacio de Banach de las funciones acotadas. Sean T un conjunto y E un espacio normado. Una función $f : T \to E$ es **acotada** si existe una constante $m > 0$ tal que $\|f(t)\| \leq m$ para todo $t \in T$. Se propone como ejercicio comprobar que el conjunto

$$\mathcal{B}(T;E) \text{ de todas las funciones acotadas de } T \text{ en } E$$

es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. La función

$$f \mapsto \|f\|_{sup} = \sup_{t \in T} \|f(t)\|$$

es una norma en $\mathcal{B}(T;E)$ llamada **norma del supremum**. Es fácil comprobar que

> una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{B}(T;E)$ converge a $f \in \mathcal{B}(T;E)$ en la topología inducida por la norma del supremum si y sólo si $f_n(t) \to f(t)$ uniformemente.

Por este motivo se llama **topología de la convergencia uniforme** a la topología inducida por la norma del supremum. Demostraremos que

(1.4.1) $\mathcal{B}(T;E)$ es un espacio de Banach si y sólo si E es un espacio de Banach.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{B}(T;E)$ es un espacio de Banach. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E, denotaremos por f_n a la función constante $t \mapsto x_n$ para todo t. Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(T;E)$ puesto que $\|f_n\| = \|x_n\|_E$. Como $\mathcal{B}(T;E)$ es completo, se concluye que esta sucesión tiene un límite f y $f(t) = \lim_n f_n(t) = \lim_n x_n$ para todo t. Luego f es una función constante. Si $f(t) = b$ para todo t, entonces $\|b - x_n\| = \|f - f_n\|$ para todo n y por tanto $x_n \to b$. Supongamos ahora que E es completo y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(T;E)$. Es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_\circ$ tal que

$$j,k \geq n_\circ \text{ implica } \|f_j - f_k\|_{sup} = \sup_{t \in T} \|f_j(x) - f_k(t)\| < \epsilon \qquad (*)$$

Entonces $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en E para todo $t \in T$. Como E es completo por hipótesis, se concluye que converge a un elemento que denotamos por $f(t)$. La función $t \mapsto f(t) = \lim_n f_n(t)$ es acotada. En efecto, si en $(*)$ $\epsilon = 1$ y fijamos $k \geq n_\circ$, entonces $\|f_j(t) - f_k(t)\|_{sup} \leq 1$ para todo t y por tanto