Katharina Lambert

Rechenschwäche

Grundlagen, Diagnostik und Förderung

HOGREFE

Rechenschwäche

Rechenschwäche

Grundlagen, Diagnostik und Förderung

von

Katharina Lambert

HOGREFE

GÖTTINGEN · BERN · WIEN · PARIS · OXFORD · PRAG
TORONTO · BOSTON · AMSTERDAM · KOPENHAGEN
STOCKHOLM · FLORENZ · HELSINKI

Dr. Katharina Lambert, geb. 1980. 2000-2006 Studium der Psychologie in Heidelberg. 2007-2009 Tätigkeit als Dyskalkulietherapeutin. Seit 2009 wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Pädagogische Psychologie der Universität Heidelberg. 2011 Promotion. Seit 2012 wissenschaftliche Mitarbeiterin in der Abteilung Empirische Bildungsforschung und Pädagogische Psychologie der Universität Tübingen. Forschungsschwerpunkte: Rechenschwäche und Einflussfaktoren mathematischer Kompetenzen auf die schulische, berufliche und psychosoziale Entwicklung von Kindern und Jugendlichen.

Göttingen • Bern • Wien • Paris • Oxford • Prag • Toronto • Boston
Amsterdam • Kopenhagen • Stockholm • Florenz • Helsinki
Merkelstraße 3, 37085 Göttingen

http://www.hogrefe.de
Aktuelle Informationen • Weitere Titel zum Thema • Ergänzende Materialien

Umschlagabbildung: © Christian Schwier – Fotolia.com
Satz: ARThür Grafik-Design & Kunst, Weimar
Format: PDF

ISBN 978-3-8409-2620-4

Nutzungsbedingungen:

Der Erwerber erhält ein einfaches und nicht übertragbares Nutzungsrecht, das ihn zum privaten Gebrauch des E-Books und all der dazugehörigen Dateien berechtigt.

Der Inhalt dieses E-Books darf von dem Kunden vorbehaltlich abweichender zwingender gesetzlicher Regeln weder inhaltlich noch redaktionell verändert werden. Insbesondere darf er Urheberrechtsvermerke, Markenzeichen, digitale Wasserzeichen und andere Rechtsvorbehalte im abgerufenen Inhalt nicht entfernen.

Der Nutzer ist nicht berechtigt, das E-Book – auch nicht auszugsweise – anderen Personen zugänglich zu machen, insbesondere es weiterzuleiten, zu verleihen oder zu vermieten.

Das entgeltliche oder unentgeltliche Einstellen des E-Books ins Internet oder in andere Netzwerke, der Weiterverkauf und/oder jede Art der Nutzung zu kommerziellen Zwecken sind nicht zulässig.

Das Anfertigen von Vervielfältigungen, das Ausdrucken oder Speichern auf anderen Wiedergabegeräten ist nur für den persönlichen Gebrauch gestattet. Dritten darf dadurch kein Zugang ermöglicht werden.

Die Übernahme des gesamten E-Books in eine eigene Print- und/oder Online-Publikation ist nicht gestattet. Die Inhalte des E-Books dürfen nur zu privaten Zwecken und nur auszugsweise kopiert werden.

Diese Bestimmungen gelten gegebenenfalls auch für zum E-Book gehörende Audiodateien.

Anmerkung:

Sofern der Printausgabe eine CD-ROM beigefügt ist, sind die Materialien/Arbeitsblätter, die sich darauf befinden, bereits Bestandteil dieses E-Books.

Inhalt

Einleitung

„Die Herausforderung des schulischen Lernens besteht darin, dass durchschnittlich begabte Schüler in wenigen Jahren Inhalte erwerben müssen, an deren Entwicklung hochbegabte Wissenschaftler über mehrere Jahrhunderte gearbeitet haben.“ (Stern, 2005, S. 139).

Mathematische Konzepte und Verfahren, die uns heute so einfach und einleuchtend erscheinen, wurden über die Jahrhunderte mühsam entwickelt und verfeinert. Eine einfache Additionsaufgabe kostete die Römer nicht nur viel Zeit, sondern auch ein hohes Maß an Abstraktionsfähigkeit, da ihr Zahlensystem lediglich dafür gedacht war, *ein* Ergebnis zu notieren, keine Zwischenergebnisse. Nur sehr gebildete Menschen konnten unter Zuhilfenahme von Steinchen oder einer Form des Abakus Rechnungen in höheren Zahlenräumen durchführen (vgl. Menninger, 1979). Die Entwicklung der Ziffer 0 als Teil des Positionssystems (etwa 2. Jh. n. Chr.) kann als Durchbruch der arabischen Mathematik angesehen werden (vgl. Haarmann, 2008). Ein Konzept, das uns heute ganz intuitiv logisch erscheint. Wäre die 0 nicht erfunden worden und hätten nicht Mathematiker über einen Zeitraum von mehreren Jahrhunderten dafür gesorgt, dass wir vom Zahlensystem der Römer zu dem der indisch-arabischen Welt wechselten (ab ca. 10. Jh.), so wäre die Entwicklung der modernen Mathematik nie möglich gewesen. Wir wären heute nicht in der Lage Autos zu bauen oder das Internet zu nutzen, wir könnten noch nicht einmal eine einfache schriftliche Addition durchführen (vgl. Haarmann, 2008).

Wenn man sich dies vor Augen führt, verwundert es kaum, dass es Menschen gibt, für die die Welt der Mathematik trotz guter intellektueller Voraussetzungen weitgehend verschlossen bleibt. Während das Phänomen des Nicht-Lesen-oder-Schreiben-Könnens und die Förderung dieser Kompetenzen in den letzten Jahrzehnten viel Aufmerksamkeit erhalten haben, wurde die Rechenschwäche bisher vergleichsweise wenig erforscht, insbesondere der Bereich der Ursachenforschung und Förderung. Dies steht in einem drastischen Widerspruch zu der heutigen Wissensgesellschaft, in der mathematische Kompetenzen zur Bewältigung des Alltags und im beruflichen Kontext unabdingbar sind.

Von früher Kindheit an ist unser Alltag heute von mathematischen Anforderungen durchdrungen. Ein Kindergartenkind ist möglicherweise nicht in der Lage, die Anzahl von Gummibärchen, die es aus einer Tüte herausnehmen darf, richtig abzuzählen; ein Grundschulkind, das von seiner Mutter eine 1 €-Münze zum Kauf einer Süßigkeit bekommen hat, wird möglicherweise das Unterfangen frustriert aufgeben, da es nicht versteht, dass das Preisschild mit der Zahl 0,99 € bedeutet, dass dies ein Betrag unter einem Euro ist, da er ja nach viel mehr aus-sieht. Ein Erwachsener schafft es an der Supermarktkasse nicht, den richtigen Betrag aus dem Geldbeutel herauszusuchen …

Diese Liste könnte endlos weitergeführt werden. Umso wichtiger ist es, Kinder, denen grundlegendes mathematisches Basiswissen fehlt bzw. die dieses nicht entwickeln, rechtzeitig zu erkennen und zu fördern. Im Schulkontext werden Kinder, die große Schwierigkeiten beim Erwerb arithmetischer Fähigkeiten haben, leider immer wieder als dumm oder faul stigmatisiert. Durch kontinuierliches Üben und Wiederholen werden jedoch meist nur geringe oder kurzfristige Erfolge erzielt. Da bisher nicht an allen Grundschulen zusätzliche Fördermöglichkeiten speziell für rechenschwache Kinder angeboten werden oder diese häufig auch nicht ausreichen, wenden sich viele Eltern an kommerzielle Therapie- und Nachhilfeeinrichtungen. Dies ist mitunter mit einer hohen finanziellen Belastung verbunden. Viel zu wenig ist jedoch nach wie vor über die Wirksamkeit der zahlreichen Förderprogramme und Methoden bekannt.

Das vorliegende Buch soll einen Überblick über das breite Themenfeld der Rechenschwäche geben und dabei Forschung und Praxis miteinander verknüpfen. Zunächst wird ein Überblick über die Entwicklung mathematischer Kompetenzen im Säuglings- und Kleinkindalter gegeben und verschiedene Theorien zur Zahlenverarbeitung und Zahlbegriffsentwicklung vorgestellt. Anschließend wird das Phänomen Rechenschwäche ausführlich beleuchtet und die teilweise widersprüchlichen Forschungsergebnisse thematisiert und diskutiert. Neben der Schwierigkeit bei Definition und Diagnostik von Rechenschwäche werden auch die ätiologischen Grundlagen der Rechenschwäche beschrieben. Aus diesen und aus der Praxis werden anschließend Symptome abgeleitet, die bei einer Rechenschwäche häufig auftreten. Fallbeispiele verbinden den theoretischen Rahmen mit der Praxis.

In den nachfolgenden Kapiteln wird auf Erkenntnisse und Methoden der Prävention und Förderung bei Rechenschwäche eingegangen. Dabei werden einige Frühförder- und Förderprogramme vorgestellt, die in schulischer und außerschulischer Förderung eingesetzt werden bzw. werden können. Außerdem wird die Praxis der außerschulischen Förderung unter die Lupe genommen. Zum Schluss wird noch ein Überblick über die schul- und sozialrechtliche Situation in Deutschland gegeben.

Viele Fragen werden unbeantwortet bleiben müssen, da die Forschungslücken und Widersprüchlichkeiten noch immer groß sind. Manche Unklarheiten können nicht aufgelöst werden. Auch kann es für Prävention und Förderung keine Anleitung zum „Richtigmachen“ geben, denn so unterschiedlich die Kinder sind, so unterschiedlich werden auch die Förderansätze auf individueller Ebene sein müssen. „Den optimalen Weg“ gibt es bisher nicht und wird es wohl auch nicht geben, auch wenn eine Reihe von Ratgebern dies suggerieren mag. Das vorliegende Buch bietet hier einen kritischen und umfassenden Überblick darüber, was Rechenschwäche ist, wie man sie feststellt und welche Möglichkeiten es gibt, betroffene Kinder zu unterstützen. Das Buch richtet sich dabei an Psychologen, Dyskalkulietherapeutinnen und -therapeuten, Lehrerinnen und Lehrer, Pädagoginnen und Pädagogen, Ärztinnen und Ärzte, Erzieherinnen und Erzieher, aber auch an Eltern und Studierende, die mit betroffenen Kindern und deren Familien zu tun haben. Durch die besondere Mischung aus Lehr- und Praxisbuch eignet sich *Rechenschwäche – Grundlagen, Diagnostik, Förderung* hervorragend zum Selbststudium und zur Weiterbildung.

1 Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen

Wenn Kinder beginnen in der Schule aufzufallen, weil sie in Mathematik nicht nur schlecht mitkommen, sondern ein grundlegendes Verständnis in diesem Fach vermissen lassen, dann ist diesem Nicht-Verstehen meist eine ganze Reihe von Fehlverläufen an unterschiedlichsten Stellen vorausgegangen. Denn die Entwicklung von mathematischem Verständnis beginnt nicht erst mit dem Eintritt in die Schule. In den letzten Jahren rückte insbesondere die mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenzentwicklung von Kindergartenkindern in den öffentlichen und wissenschaftlichen Fokus; in diesem Alter werden erste Grundlagen für das systematische Erlernen mathematischer Konzepte gelegt. Doch auch ohne formale Unterweisung verfügen Kinder bereits im Kindergarten und sogar in der Krippe über ein basales Verständnis von Mengen und Zahlbeziehungen. Wie sich dieses Verständnis entwickelt und wann Kinder im Durchschnitt welche Kompetenzen erwerben, stellt eine wesentliche Grundlage bei der Untersuchung und Einordnung der Rechenschwäche dar. Dies gilt insbesondere für die Frage, ob rechenschwache Kinder „lediglich" eine Entwicklungsverzögerung aufweisen – ob sie also Kompetenzen in einer ähnlichen Reihenfolge und einer ähnlichen Weise erwerben wie andere Kinder, nur eben deutlich langsamer – oder ob bei diesen Kindern ein grundlegendes Defizit in der Verarbeitung von mathematisch-numerischen Inhalten besteht. Sie würden dann nicht nur mehr Zeit, sondern eine gezieltere oder auch grundlegend andere Art der Unterweisung benötigen. Nur wenn man versteht, wie und wann Kinder bestimmte Fähigkeiten normalerweise erwerben, ist ein frühzeitiges Erkennen und Fördern von Kindern möglich, denen bestimmte Entwicklungsschritte nicht ausreichend gelingen.

Auch wenn das Feld der Mathematik umfassend und komplex ist und aus so vielen unterschiedlichen Teilbereichen besteht, dass es „die eine Entwicklung" nicht gibt, soll im Folgenden ein kurzer Überblick darüber gegeben werden, wie und wann Kinder bestimmte mathematische Grundfertigkeiten erwerben. Dabei wird jeweils kurz darauf Bezug genommen, an welchen Stellen es zu Schwierigkeiten kommen kann. Darüber hinaus sollen die derzeit gängigsten Theorien und Modelle des Zahlbegriffs sowie der Entwicklung mathematischer Kompetenzen dargestellt werden, die auch im Bereich der Erforschung der Rechenschwäche eine zentrale Rolle spielen.

1.1 Präverbales Verständnis von Mengen und ihre Beziehungen

1.1.1 Tierisches Zahlverständnis

Vorläufer der menschlichen Fähigkeit zur Manipulation von Zahlen und diskreten Mengen finden sich auch im Tierreich. Aus Befunden zum Verständnis von Mengen und Zahlen bei Tieren wird häufig eine biologische Basis von mathematischen Fähigkeiten abgeleitet. In einer ganzen Reihe von Untersuchungen konnte gezeigt werden, dass Rhesusaffen Mengen relativ exakt unterscheiden können. Dabei entscheiden sie nicht nur auf Basis von „mehr“ oder „weniger“. Sie zeigen diese Fähigkeit auch bei unterschiedlicher Darbietungsform, also bei angezeigten Objekten, Tönen oder Lichtsignalen; zudem sind sie in der Lage, von einer Modalität auf die andere zu generalisieren. Rhesusaffen können sogar Objekte auf einem Touchscreen in aufsteigender Reihenfolge korrekt anordnen. Allerdings nimmt die Genauigkeit bei Aufgaben dieser Art mit ansteigender Menge zunehmend ab.

Platt und Johnson (1971) trainierten Ratten darauf, einen Hebel 4-, 8-, 16- oder 24-Mal zu drücken. Es ergab sich eine Normalverteilung von Hebeldrücken um diese Mengen. Dabei nahm die Varianz bei steigender Menge deutlich zu; die Ratten waren also nicht in der Lage, die jeweilige Anzahl abzuzählen, vielmehr schienen sie eine unpräzise Repräsentation von Numerositäten zu besitzen. Bei erwachsenen Menschen zeigt sich übrigens ein ähnliches Muster von Hebeldrücken bei ansteigender Zahl, was darauf hindeutet, dass Menschen und Affen eine ähnliche mentale Repräsentation von Zahlen besitzen (Whalen, Gallistel & Gelman, 1999).

Rhesusaffen scheinen darüber hinaus in der Lage zu sein, arabische Zahlen zu erlernen (Washburn & Rumbaugh, 1991). In einem Experiment sollten sie hierfür Zahlen einer bestimmten Menge zuordnen. Außerdem konnten in Experimenten ähnlich der von Wynn (1992a) mit Säuglingen durchgeführten Versuche (siehe dazu im nachfolgenden Abschnitt), frei lebende Rhesusaffen bei der Rechnung $1 + 1$ ein nicht mögliches Ergebnis erkennen (Hauser, Carey & Hauser, 2000; Sulkowski & Hauser, 2000).

Vorläuferfähigkeiten des mathematischen Verständnisses scheinen somit nicht zwangsläufig sprachliche Fähigkeiten vorauszusetzen. Diese Vorläuferfähigkeiten zu spezifizieren und weiterzuentwickeln, bedarf jedoch einer kulturellen Schulung und dafür ist Sprache eine notwendige Bedingung (vgl. Landerl & Kaufmann, 2008).

1.1.2 Präverbales Mengenverständnis bei Babys

Eine Vielzahl von Untersuchungen belegt, dass schon Neugeborene dazu in der Lage sind, zwischen verschieden großen Mengen zu differenzieren. Dies deutet darauf hin, dass wir bereits mit einer Art intuitiver Mathematik ausgestattet auf die Welt kommen, welche durch unser kulturelles Umfeld weiterentwickelt und ausdifferenziert wird. Da man Babys und Kleinkinder noch nicht direkt befragen und testen kann, muss man sich mit anderen Möglichkeiten der Untersuchung behelfen, wie dem in Kasten 1.1 beschriebenen Habituations-Dishabituations-Paradigma.

Kasten 1.1: Habituations-Dishabituations-Paradigma

Die Fähigkeiten zur Unterscheidung von Mengen bei Säuglingen werden meist mithilfe des Habituations-Dishabituations-Paradigmas untersucht. Babys wird mehrfach ein Stimulus präsentiert. Nach etlichen Wiederholungen gewöhnt sich das Kind an den Stimulus, das Interesse nimmt ab und als Folge sinkt die Blickdauer (Habituationsphase). Im Anschluss sieht das Kind einen neuen Stimulus, der sich meist in einem kritischen Merkmal vom ursprünglichen Stimulus unterscheidet (Dishabituationsphase). Erkennt das Kind den Unterschied zwischen den beiden Stimuli, so sollte sein Interesse neu geweckt werden und die Blickdauer auf den Stimulus wieder ansteigen. Die Veränderung der Blickdauer lässt Rückschlüsse auf die kognitiven Prozesse des Kindes zu.

Studien zu numerischen Kompetenzen von Säuglingen betrachten vor allem drei wesentliche Aspekte: Das Verständnis von Mengen oder Numerositäten, das Bewusstsein der Existenz von Ordinalität und die Fähigkeit, das Konzept von Addition und Subtraktion sehr kleiner Mengen zu verstehen (Geary, 2006). Im Folgenden sollen diese drei Aspekte genauer dargestellt werden. Anschließend werden die verschiedenen Erklärungsansätze für die beobachteten Ergebnisse ausgeführt.

Numerosität

Zur Untersuchung des Mengenverständnisses im Säuglingsalter wird meist mit visuellen Stimuli bzw. Material, das die Kinder visuell erfassen müssen, gearbeitet. Von der Arbeitsgruppe um Starkey stammen mit Beginn der 1980er Jahre die ersten großen Versuchsreihen zu numerischen Kompetenzen von Säuglingen (z. B. Starkey & Cooper, 1980; Starkey, Spelke & Gelman, 1990). Mithilfe des Habituations-Dishabituations-Paradigmas konnte die Forschergruppe zeigen, dass Kinder im Alter zwischen 4 und 7,5 Monaten zwei von drei, jedoch nicht vier von sechs Objekten unterscheiden können. Diese Fähigkeit konnte sogar bei Neugeborenen im Alter von nur einer Woche nachgewiesen werden (Antell & Keating, 1983). Ab dem Alter von 10 bis 12 Monaten sind Babys teilweise auch in der Lage, drei von vier Objekten zu unterscheiden (Strauss & Curtis, 1981). In einer ganzen Reihe von weiteren Studien konnten diese Ergebnisse bestätigt werden. Dabei wurden die verwendeten Stimuli und Bedingungen immer wieder variiert.

In einer für Kinder sehr anspruchsvollen Studie gewöhnten Kobayashi, Hiraki und Hasegawa (2005) 6 Monate alte Kinder zunächst an Objekte (zwei oder drei), die auf eine Bühne fielen und beim Aufkommen ein Geräusch machten. Im nächsten Schritt der Studie wurde ein Schirm vor die Bühne geschoben und die Kinder hörten lediglich zwei oder drei Einheiten des Geräuschs. Die Dauer des Geräuschs wurde dabei jeweils konstant gehalten. Anschließend wurde der Schirm entfernt und die Kinder sahen eine Anzahl von Objekten, die entweder der Anzahl der Geräusche entsprach oder nicht. Die Kinder schauten deutlich länger auf das nicht erwartete Ereignis, unabhängig von der Dauer der Geräusche. Diese Befunde deuten darauf hin, dass bereits Säuglinge ein kognitives System besitzen, das abstrakt eine genaue Anzahl abbilden und diese Repräsentation von einer Modalität in eine andere übertragen kann.

Allerdings fanden sich auch widersprüchliche Forschungsergebnisse, die ein gegenteiliges Muster oder gar keine Präferenz aufzeigten (z. B. Mix, Levine & Huttenlocher, 1997). Außerdem wurde bald kritisiert, dass bei den verwendeten Versuchsanordnungen mit der Erhöhung der Anzahl von visuellen Stimuli auch kontinuierliche Merkmale wie Größe, Umrisslänge und Menge verändert werden und die Unterscheidungsfähigkeit der Kinder auf diese Merkmale zurückzuführen sein könnte (Clearfield & Mix, 1999); die Kinder könnten ihre Entscheidungen nicht auf Basis der tatsächlichen Anzahl von Objekten gefällt haben, sondern basierend auf kontinuierlichen Merkmalen. Daraufhin wurden in Studien die Umrisslänge von Punkten und Quadraten in der Dishabituationsphase bei zwei und drei Elementen variiert. Kinder wurden beispielsweise an zwei Punkte gewöhnt und sahen dann drei Punkte, die aber insgesamt keine größere Fläche einnahmen als die zwei Punkte. Bei 6 bis 8 Monate alten Kindern konnte nur dann ein Unterschied in den Blickzeiten festgestellt werden, wenn sich die Umrisslänge der Objekte veränderte. Veränderte sich die Anzahl der Objekte, nicht aber ihre Oberfläche, dann konnten keine Unterschiede in der Blickdauer entdeckt werden.

Andere Untersuchungen zeigten jedoch, dass bereits 6 Monate alte Säuglinge auch bei Kontrolle von Umrisslänge und eingenommener Fläche zur Differenzierung von Numerositäten in der Lage sind; nämlich dann, wenn das Verhältnis der beiden Objektmengen bei 2 : 1 liegt. Werden zwei Mengen mit einem geringeren Verhältnis vorgegeben, so finden sich keine Unterschiede in der Blickdauer von Säuglingen diesen Alters (Xu & Spelke, 2000).

Ordinalität

Die Fähigkeit von Säuglingen, Mengen zu unterscheiden, führt auch zu der Frage, inwieweit sie darüber hinaus Zahlbeziehungen im Sinne von „mehr“ oder „weniger“ wahrnehmen, also eine ordinale Reihenfolge bilden können.

Um der Frage nachzugehen, ob Säuglinge das Prinzip von „mehr als“ und „weniger als“ verstehen können, platzierten Feigenson, Carey und Hauser (2002) vor den Augen des Kindes Kekse unterschiedlicher Größe und Anzahl in zwei undurchsichtige Eimer. Anschließend durfte das Kind immer zu einem der Eimer krabbeln. 10 bis 12 Monate alte Kinder wählten konsistent den Eimer aus, der die größere Anzahl von Keksen enthielt (Vergleich: 1 vs. 2 und 2 vs. 3). Bei vier und mehr Keksen verteilte sich die Wahl auf einem Zufallslevel, auch dann, wenn das Verhältnis 2 : 1 war, wie bei 2 vs. 4 oder 3 vs. 6 Keksen. Wurde die Größe der Oberfläche konstant gehalten (1 großer Keks vs. 2 kleine Kekse), so entschieden sich die Kinder eher für das größere Objekt als für die größere Anzahl.

Babys können Mengen aber nicht nur hinsichtlich „mehr oder weniger“ unterscheiden, sie können auch Rangreihen erkennen, also ob eine Menge mehr wird oder weniger. Brannon (2002) gewöhnte 9 und 11 Monate alte Kinder an eine Sequenz von entweder einer ansteigenden oder einer abnehmenden Anzahl von Punktmustern. Nachdem die Kinder nicht mehr darauf achteten, sahen sie im Anschluss ein ansteigendes und ein absteigendes Muster. Kinder mit 11 Monaten erkannten, wenn sich das Muster änderte, die jüngeren Kinder hingegen nicht. Wenn den Kindern jedoch Stimuli dargeboten wurden, bei denen die ansteigende Anzahl von Punkten gleichzeitig auch das Ansteigen der Punktgröße beinhaltete, konnten auch 9 Monate alte Babys eine ordinale Beziehung erkennen (Suanda et al., 2008). Inzwischen konnte in einer aktuelleren Studie gezeigt werden, dass sogar Kinder im Alter von 7 Monaten auch dann ordinale Relationen erkennen können, wenn die kontinuierliche Dimension – in diesem Fall Umriss und Fläche von Rechtecken – in der Habituationsphase konstant gehalten wird (Picozzi et al., 2010). Hierzu wurden die Stimuli der Habituationsphase so konstruiert, dass der Umriss der Rechtecke und die eingenommene Fläche der darin abgebildeten Objekte konstant sind (siehe Abbildung 1.1). In der Testphase hingegen veränderten sich mit an- bzw. absteigender Reihenfolge auch der Umriss und die Fläche der Rechtecke. 7–8 Monate alte Kinder konnten die ordinale Relation von einer zu- bzw. abnehmenden Punktmenge auf die entsprechende Relation von unterschiedlich langen Balken übertragen (siehe auch De Hevia & Spelke, 2010).

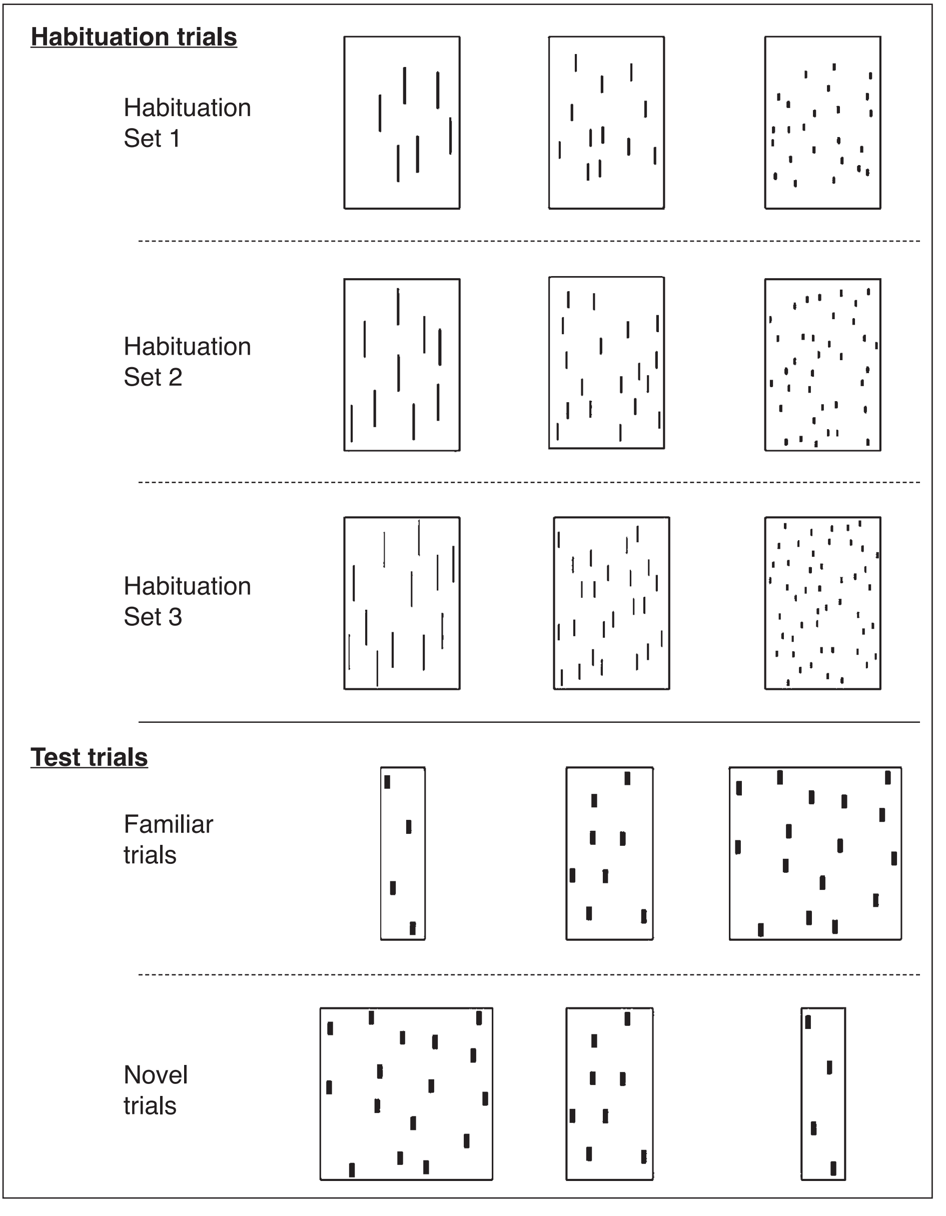

Abbildung 1.1: Stimuli der Habituations- und Testphase von Picozzi et al. (2010, S. 363)

Mit 4 Monaten können Babys immerhin schon erkennen, wenn nach der Gewöhnung an eine ansteigende Menge eine absteigende gezeigt wird. Umgekehrt gelingt ihnen das hingegen noch nicht. Werden sie an eine absteigende Folge gewöhnt, können sie diese hinterher nicht von einer ansteigenden unterscheiden. Es besteht laut der Autoren der betreffenden Studie (Macchi Cassia et al., 2012) eine Asymmetrie in der frühen Verarbeitung von oder der Sensitivität gegenüber Ordinalität. Sie erklären dies zum einen mit der Annahme Piagets, nach der kleinere Kinder Positives bevorzugen. Zum anderen könnte die leichtere und weniger fehleranfällige Verarbeitung von kleineren Zahlen dieses Phänomen erklären. Diese Asymmetrie könnte darüber hinaus das leichtere Verstehen und Erlernen der Addition gegenüber der Subtraktion erklären, das bei Grundschulkindern und insbesondere bei rechenschwachen Kindern gefunden wird. Die Tatsache der asymmetrischen Wahrnehmung von ordinalen Relationen ist auch ein Argument gegen Kritiker, die anmerken, dass durch den Habituations-Dishabituations-Versuchsaufbau lediglich getestet wird, ob Kinder erkennen können, dass ein Stimulus „anders als“ ein anderer ist. Denn würden sie sich ausschließlich auf das „anders als“ konzentrieren, müssten sie einen Unterschied auch dann erkennen können, wenn sie zunächst an eine absteigende Anordnung gewöhnt wurden.

Rechenoperationen

Wenn bereits Säuglinge ein basales Verständnis von „mehr als“ und „weniger als“ besitzen, so liegt weiter die Frage nahe, ob Kinder auch über eine primitive Vorstellung von Addition und Subtraktion verfügen. Um die Beantwortung dieser Frage hat sich insbesondere die amerikanische Wissenschaftlerin Karen Wynn verdient gemacht. Wynn (1992a) ließ 5 Monate alte Kinder einfache Additions- und Subtraktionshandlungen beobachten. Die Kinder betrachteten dabei eine kleine Bühne (siehe Abbildung 1.2), auf die ein Versuchsleiter eine Mickymaus setzte. Danach wurde ein Schirm hochgefahren, sodass die erste Maus nicht mehr sichtbar war. Anschließend wurde eine zweite Maus, für das Kind sichtbar, hinter den Schirm gestellt. Zum Schluss wurde der Schirm wieder gesenkt und das Kind sah entweder eine, drei (falsche Lösungen) oder zwei Mäuse (richtige Lösung). Analog hierzu wurde die Subtraktionsaufgabe „2 – 1“ vorgegeben. Die Kinder schauten sowohl bei der Additions- sowie der Subtraktionsaufgabe länger auf das falsche Ergebnis. Wynn schlussfolgerte daraus, dass bereits Säuglinge über einfache arithmetische Konzepte verfügen.

Als Kritikpunkt könnte man anmerken, dass die Kinder sich weniger an der numerischen Anzahl, als vielmehr an der Identität der Mickymäuse orientierten. Um dieser Frage nachzugehen variierten Simon, Hespos und Rochat (1995) das Experiment dahingehend, dass für die Rechnung 1 + 1, dargestellt mit 1 Ernie-Puppe + 1 Ernie-Puppe, vier verschiedene Ergebnisse präsentiert wurden:

(1) 2 Ernie-Puppen (Menge und Identität richtig)
(2) 1 Ernie-Puppe und 1 Elmo-Puppe (Menge richtig, Identität falsch)
(3) 1 Ernie-Puppe (Menge falsch, Identität richtig)
(4) 1 Elmo-Puppe (Menge falsch, Identität falsch).

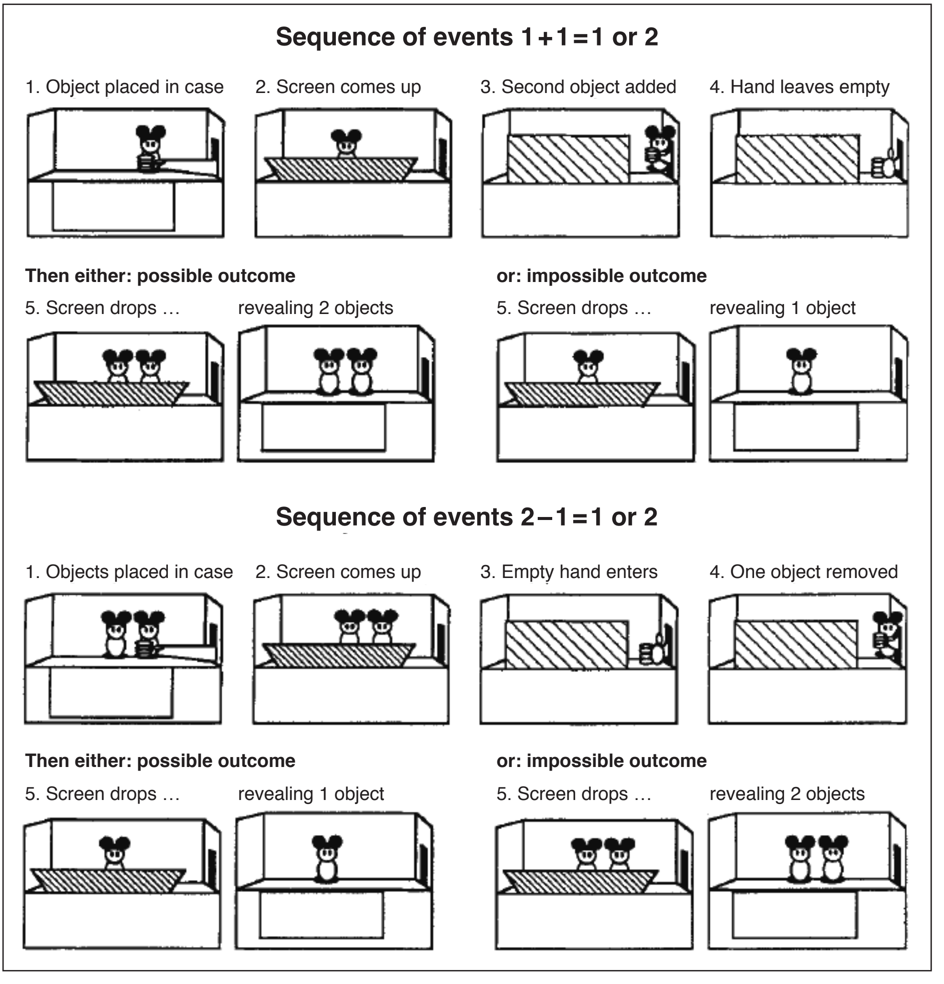

Abbildung 1.2: Versuchsablauf der Additions- und Subtraktionsbedinungen (Wynn, 1992a, S. 749) Reprinted by permission from Macmillan Publishers Ltd: [Nature] (Wynn, K. (1992a). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358,* 749–750), © 1992, www.nature.com/nature/journal/v358/n6389/abs/358749a0.html

Dabei schienen die Kinder sich nicht an der Identität der Puppen zu orientieren, sie zeigten immer eine längere Blickdauer bei einer als bei zwei Puppen, also dem numerisch unmöglichen Ereignis. Allerdings interpretierten die Autoren ihre Ergebnisse dahingehend, dass Kinder lediglich ein intuitives Wissen um physikalische Gesetzmäßigkeiten besitzen. Gestützt wird diese Annahme von den Befunden, die zeigen, dass Kinder in diesem Alter Verletzungen von physikalischen Gesetzmäßigkeiten wie der Objektpermanenz, der räumlichen Kontinuität und der Solidarität erkennen können.

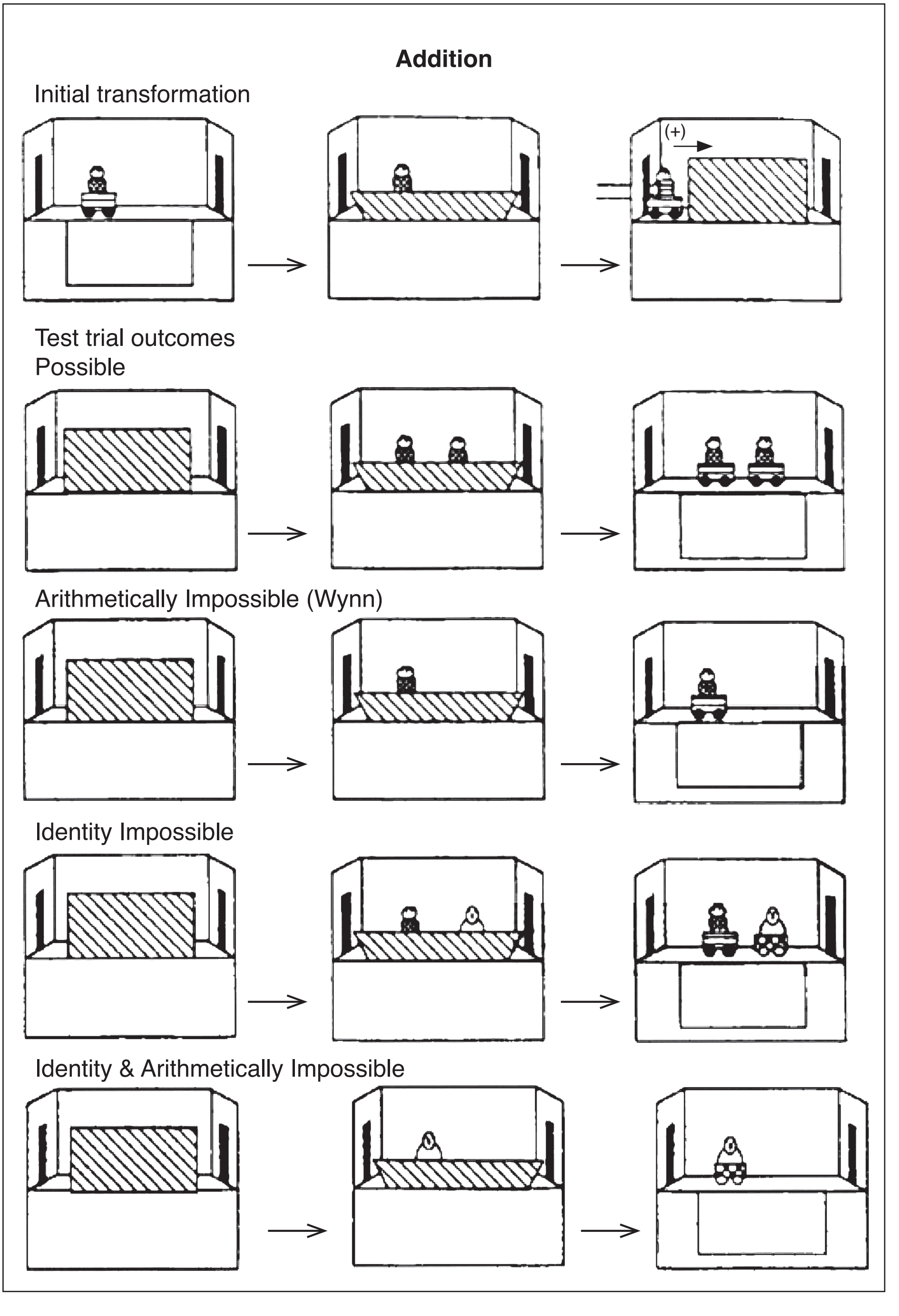

Abbildung 1.3: Versuchsablauf der Additionsbedingung 1 + 1 (Simon, Hespos & Rochat, 1995, S. 260)

Neuere Ergebnisse weisen darüber hinaus darauf hin, dass Kinder im Alter von 9 Monaten nicht nur in der Lage sind, Mengen bis drei zu „addieren und zu subtrahieren“. Sie können auch bei größeren Mengen Verletzungen der mathematischen Logik erkennen. Hierzu sahen die Kinder ein Feld von fünf Rechtecken, die dann hinter einem Schirm verschwanden. Nacheinander kamen weitere fünf Rechtecke hinzu (Subtraktion entsprechend umgekehrt). Anschließend wurde der Schirm wieder entfernt und die Kinder sahen entweder fünf oder zehn Rechtecke. Die Kinder schauten jeweils das unmögliche Ergebnis deutlich länger an, wobei dies natürlich kein Beweis dafür ist, dass sie die Aufgabe „rechnen“ konnten. Sie waren jedoch in der Lage zu erkennen, dass die Menge mehr (oder weniger) geworden sein musste, was auf ein basales Verständnis von Addition und Subtraktion hindeutet.

Fazit

Abschließend lässt sich feststellen, dass Säuglinge über ein präverbales Mengenverständnis verfügen, also eine angeborene Fähigkeit zur mentalen Repräsentation von Numerositäten. Allerdings bleibt die Diskussion darüber bestehen, ob die Quantifizierung ausschließlich auf Grundlage von kontinuierlichen Merkmalen getroffen wird oder aber Säuglinge in so einem frühen Stadium bereits in der Lage sind, die diskrete Anzahl von Elementen zu erkennen. Auch kann die Frage, aufgrund welchen Wissens und Verständnisses die vorliegenden Befunde zustande kommen und welcher Art und welchen Umfangs die numerischen Kompetenzen bei Säuglingen sind, nicht beantwortet werden.

Lange musste die Frage, ob diese sehr frühen mathematischen Basiskompetenzen auch mit späteren Mathematikleistungen zusammenhängen unbeantwortet bleiben. Denn natürlich fanden sich in jeder dieser Studien auch Kinder (die teilweise aus den Stichproben ausgeschlossen wurden), die die Aufgaben einfach nicht beachteten oder bei denen einfach keine Präferenz durch verlängerte Blickzeiten erkennbar war. Die Frage ist nur, ob diese Kinder später auch schlechtere Leistungen in Mathematik zeigen. Eine erste Studie hat sich dieser Frage angenommen und mit „ja“ beantwortet. Starr, Libertus und Brannon (2013) testeten Kinder zum ersten Mal im Alter von 6 Monaten. Sie gaben ihnen dabei Aufgaben vor, bei denen die Kinder erkennen sollten, ob eine Punktmenge sich von einer anderen unterschied, an die sie zuvor gewöhnt worden waren. Zusätzlich sahen die Kinder Bilder, die sich in Form oder Farbe unterschieden, jedoch nichts mit Mengen zu tun hatten. Drei Jahre später (mit dreieinhalb Jahren) wurden die Kinder erneut untersucht. Es stellte sich heraus, dass die Genauigkeit, mit der den Kindern die Unterscheidung als Säuglinge gelungen war, mit der späteren Genauigkeit und auch der Leistung in frühen mathematischen Basiskompetenzen und der Zahlenkenntnis zusammen hing. Dieser Zusammenhang ließ sich sogar dann noch finden, wenn die Leistung in einem Intelligenztest kontrolliert wurde. Kein Zusammenhang mit mathematischen Basiskompetenzen ließ sich hingegen für die nicht numerische Vergleichsaufgabe finden. Umgekehrt wurde festgestellt, dass die Kinder, die mit dreieinhalb Jahren defizitäre Basiskompetenzen hatten, im Alter von 6 Monaten auch eine geringere Genauigkeit beim Erkennen von Mengenunterschieden zeigten. Daraus lässt sich schließen, dass sich bereits in einem so frühen Alter Leistungsunterschiede erkennen lassen, die das Risiko für spätere Schwierigkeiten in Mathematik vorhersagen könnten. Allerdings müssen diese Befunde repliziert und die Vorhersageleistung auch für den Erwerb der Schulmathematik gefunden werden. Sollten sich diese Befunde bestätigten, würde dies die Annahme eines angeborenen Zahlensinns bzw. Number Sense, aber auch von einer angeborenen Disposition zur Ausbildung einer Rechenschwäche stützen.

1.2 Entwicklung von Zählfertigkeiten bei Klein- und Vorschulkindern

Zählen und Zahlen finden sich in allen Gesellschaften, egal, ob in den Industrienationen oder in abgeschiedenen Urbevölkerungen. Die unterschiedlichen Zahlsysteme variieren jedoch beträchtlich. In den meisten Kulturen finden sich im Kindergartenalter typische Aktivitäten, meist in einer spielerischen Eltern-Kind-Interaktion, die das Erlernen von Zahlwörtern und Zählprinzipien unterstützen (Saxe, Gruberman & Gearhart, 1987).

Ausgehend von der Säuglingsforschung nehmen einige Autoren an, dass ein rudimentäres Verständnis von Zahlen und Zählen angeboren ist (Butterworth, 1999; Geary, 1995; Gelman, 1990). Die bewusste Fähigkeit zur Anwendung von Zählkonzepten wird jedoch kulturell im Laufe der Kindheit vermittelt (Fuson, 1988; Piaget & Szeminska, 1975).

Fuson (1988) geht von fünf aufeinanderfolgenden Stufen (Levels) der Zählentwicklung aus, die dabei eng mit dem Erlernen der Zahlwortreihe verknüpft sind:

1. *String Level:* Die Zahlwortreihe wird ähnlich einem Gedicht aufgesagt und ist meist auf eine bestimmte Anzahl begrenzt. Die Abfolge entspricht dabei nicht der tatsächlichen Wortreihe, sondern eher einem undifferenzierten Ganzen, in dem die Zahlen keine eigene Bedeutung aufweisen und nicht klar voneinander getrennt sind.
2. *Unbreakable Chain Level:* In dieser Stufe gelingt erstmals die Eins-zu-Eins-Zuordnung; Zahlen können klar voneinander unterschieden werden. Objekte können nun abgezählt werden, wobei jedem Objekt eine Zahl zugeordnet wird. Häufig zeigen Kinder währenddessen auf die entsprechenden Objekte, was als Unterstützung des Zuordnungsprozesses gewertet werden kann. Sie müssen den Zählprozess von der „1“ an immer von vorne beginnen. Laut Fuson beginnt in dieser Stufe auch die Ausbildung des Kardinalitätsverständnisses. Kin-

der beginnen zu verstehen, dass sie die Frage „Wie viele“ mit dem letzten Zahlwort ihres Zählvorgangs beantworten müssen.
3. *Breakable Chain Level:* In dieser Stufe sind Kinder in der Lage, ihren Zählvorgang von einer höheren (bekannten) Startzahl zu beginnen. Das Kardinalitätsprinzip hat sich soweit ausgebildet, dass Kinder auch verstehen können, dass die entsprechende Startzahl eine Information über die nicht zu zählende Teilmenge enthält. Darüber hinaus können Kinder ab dieser Stufe im kleinen Zahlenraum Vorgänger und Nachfolger bestimmen, Rückwärtszählen und Größer-/Kleiner-Beziehungen benennen.
4. *Numerable Chain Level:* Kinder können nun von jeder beliebigen Zahl weiterzählen und verstehen, dass das entsprechende Zahlwort immer der Menge der bereits gezählten Objekte entspricht. Erstmals können Kinder auch Zahlwörter an sich zählen, sodass die Zahlwortreihe nicht mehr ausschließlich auf konkrete Gegenstände angewendet werden muss. Zählendes Rechnen ermöglicht nicht nur Additions- sondern auch Subtraktionsaufgaben.
5. *Bidirectional Chain Level:* Ab dieser Stufe kann von jeder beliebigen Zahl aus vorwärts als auch rückwärts gezählt werden. Die Zählrichtung kann einfach und flexibel geändert werden.

Gelman und Gallistel (1978) und Gelman (2000) unterscheiden fünf angeborene und implizite Zählprinzipien (Eins-zu-Eins-Zuordnung, Stabile Reihenfolge, Kardinalität, Abstraktionsprinzip, Anordnungs-Beliebigkeit), die sich während des Kindergartenalters entwickeln. Sie gehen also im Gegensatz zu Fuson davon aus, dass bei Kindern bereits vor dem Erlernen der Zahlwortreihe bestimmte Zählprinzipien vorhanden sind. Die ersten drei Prinzipien legen fest, wie richtig gezählt wird („how to’s“); sie bilden den Rahmen, in dem sich das Zählwissen ausbilden kann. Die weiteren zwei legen fest, auf welcher Basis die ersten drei Prinzipien angewendet werden können („permissions“). Die fünf Zählprinzipien sind in Tabelle 1.1 aufgeführt. Diese Zählprinzipien können mit einer Reihe unterschiedlicher Zählaufgaben überprüft werden, von denen einige in Kasten 1.4 aufgeführt sind.

„Dem Erwerb des verbalen Zählens kommt in der Entwicklung der numerischen Kognition in zweierlei Hinsicht eine zentrale Rolle zu“ (Landerl & Kaufmann, 2008, S. 64). Durch den aktiven Zählprozess bilden sich symbolische Repräsentationen für die Zuordnung von Zahlwörtern zu Mengen aus. Darüber hinaus stellt der aktive Zählprozess die wesentliche Grundlage für den Erwerb früher Rechenoperationen und den Aufbau von numerischen Kompetenzen dar.

Kinder beginnen in der Regel zwischen zwei und drei Jahren damit, Zahlwörter zu benutzen. Sie lernen dabei die Zahlen in der richtigen Reihenfolge ähnlich einem Reim aufzusagen (Fuson, 1988; Karmiloff-Smith, 1992). Sie verstehen, dass Zählwörter besondere Wörter sind, ohne dass sie die tiefere Bedeutung, also

Tabelle 1.1: Zählprinzipien (nach Gelman & Gallistel, 1978)

Wie wird gezählt (how-to-count)?:	Beispiel:
(1) Eins-zu-Eins-Zuordnungen *(one-one-principle)*: Jedem zu zählenden Item wird genau ein Zahlwort zugeordnet. Fehler entstehen hierbei vor allem dadurch, dass Objekte nicht oder doppelt gezählt werden.	Puppe Puppe Puppe ↓ ↓ ↓ eins zwei drei
(2) Stabile Reihenfolge der Zahlwörter *(stable ordering principle)*: Die Abfolge der Zahlwörter ist stabil, jedes Wort wird nur einmal gebraucht und wird in der immer gleichen Reihenfolge vergeben. Wird die Zahlreihe nicht ausreichend beherrscht, werden Zahlen ausgelassen oder an die falsche Position gesetzt.	eins, zwei, drei, vier… eins, zwei, drei, vier…
(3) Kardinalitätsprinzip *(cardinality)*: Das letzte Wort des Zählprozesses beschreibt die Größe oder Kardinalität der gezählten Objektmenge. Die Schwierigkeit besteht in der Messung dieses Prinzips, da bei einer richtigen Antwort auf die Frage „Wie viel ist das?“ das Kind möglicherweise lediglich gelernt hat, dass es dabei immer mit der letztgenannten Zahl antworten muss.	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, … = 7 Puppen
Was kann gezählt werden (what-to-count)?:	**Beispiel:**
(4) Abstraktionsprinzip *(item kind irrelevance):* Es kann alles gezählt werden, unabhängig von der semantischen Kategorie.	Puppe Ball Haus ↓ ↓ ↓ eins zwei drei
(5) Prinzip der Irrelevanz der Zählabfolge *(order irrelevance)*: Werden die ersten drei Prinzipien beachtet, ist die Reihenfolge, in der Items gezählt werden, beliebig.	Puppe Ball Haus ↓ ↓ ↓ drei eins zwei

die Zählprinzipien erworben haben. Zählprozeduren werden nachgeahmt, hängen jedoch vom Zählkontext ab und können nicht abstrahiert werden. Zweijährige verstehen die Verbindung von Zahlwörtern zu den dazugehörigen Mengen nicht (Wynn, 1992b); ein halbes Jahr später können sie jedoch drei von vier Objektmengen und auch die entsprechenden arabischen Ziffern hinsichtlich „mehr“ oder „weniger“ unterscheiden (Bullock & Gelman, 1977). Die Kinder können diese Objektmengen jedoch nicht als „drei“ oder „vier“ Objekte benennen. Im Alter von zweieinhalb Jahren gelingt es außerdem nicht allen Kindern, ihre Zählfertigkeiten auf unvertraute Items und Kontexte (z. B. Geräusche) zu übertragen. Wynn (1990) geht davon aus, dass Kinder etwa ein Jahr an Zählübung benötigen, um bestimmte Zählwörter mit der mentalen Repräsentation von spezifischen Mengen in Verbindung zu bringen.

Die meisten 3- bis 4-Jährigen kennen die richtige Abfolge der Zahlwörter von 1 bis 10 (Fuson, 1988). Unterschiede in der Struktur der Zahlwörter bis 100 scheinen im interkulturellen Vergleich die Aneignung dieser Wörter zu erschweren oder zu erleichtern. In asiatischen Sprachen ist die 10er-Basis unseres Zahlensystems bereits in den Zahlwörtern enthalten. Im Chinesischen beispielsweise heißt die Elf „zehn eins", die Zwölf „zehn zwei" und so weiter. So müssen zum einen keine weiteren Wörter erlernt werden, zum anderen ist die Information, dass eine zwölf aus einer zehn und einer zwei besteht, bereits im Zahlwort enthalten. In Sprachen wie Deutsch oder Englisch, in denen die Zahlwörter weniger regelmäßig gebildet werden, werden diese Wörter hingegen schwerer erlernt. Dieser Unterschied scheint dazu beizutragen, dass sich interkulturelle Unterschiede beim Erwerb des Verständnisses unseres Zahlensystems auf der Basis 10 und des Gebrauchs von damit verbundenen Rechenoperationen und Problemlösestrategien finden lassen (Geary, Bow-Thomas, Liu & Siegler, 1996; Fuson & Kwon, 1992).

Im Alter von fünf Jahren kennen die meisten Kinder die ersten drei Zählprinzipien des „How to". Hinsichtlich der Zählstrategien orientieren sie sich jedoch nach wie vor an Standardprozeduren, sodass sie davon ausgehen, dass die Nähe von Objekten zueinander und der Zählablauf von einem zum anderen Ende notwendige Faktoren für das richtige Zählen sind. Auch unterlaufen ihnen nach wie vor Fehler. Erst im Alter von etwa sieben Jahren haben Kinder das nach Fuson angenommene höchste Level des Zählens erreicht.

In einer interessanten Studie von Huttenlocher, Jordan und Levine (1994) wurde bei Kindern im Alter von zwei bis fast vier Jahren die mentalen Mengenrepräsentationen von kleinen Mengen und damit indirekt auch die Abzählfertigkeiten der Kinder untersucht. In einem Experiment wurden den Kindern ein bis fünf Objekte gezeigt. Diese wurden anschließend mit einem Tuch abgedeckt und die Kinder mussten die jeweiligen Mengen nachlegen. Die jüngsten Kinder (2;6 bis 2;8) konnten in 90 % aller Fälle zwei Objekte nachlegen, immerhin ein Drittel bis zu einer Anzahl von 3. Bei Dreijährigen gelang dies schon über der Hälfte der teilnehmenden Kinder. Selbst den ältesten Kindern (3;9 bis 3;11) bereitete das Nachlegen von fünf Objekten hingegen Schwierigkeiten.

Kinder beginnen überdies ab etwa drei Jahren fehlerhafte Zählprozesse (z. B. einer Puppe) zu erkennen, wobei auch Vorschulkinder noch große Probleme haben, richtige von falschen Zählprozeduren zu unterscheiden. Teilweise haben Kinder noch bis zu einem Alter von elf Jahren Schwierigkeiten, auch unkonventionelle Zählweisen als korrekt zu erkennen. Als unkonventionell wird eine Zählfolge dann bezeichnet, wenn sie nicht dem intuitiven Zählvorgang entspricht, dabei gleichzeitig aber korrekt sein kann. Kinder lösen sich erst langsam von der Vorstellung, dass das Zählen eine bestimmte Form benötigt, um richtig zu sein. Möglicherweise beurteilen sie die Zählung als falsch, weil es letztlich eine „riskante“ Form des Zählens ist, bei der deutlich mehr Fehler unterlaufen können als bei einer konventionellen Zählung.

Zählfertigkeiten zählen zu den sogenannten Vorläuferfähigkeiten. Sie gehen dem Verstehen und dem Erlernen mathematischer Konzepte und formaler Prozeduren voraus. Auf Basis des Kompetenzniveaus in diesen Fähigkeiten im Kindergartenalter lässt sich die spätere Mathematikleistung in der Schule vorhersagen. Die Zählleistung und der Erwerb der Zählprinzipien stellen dabei einen wesentlichen Prädiktor schulischer Leistung dar. Kinder, die bereits vor Schulbeginn Zählstrategien nicht oder nur unzureichend beherrschen, haben ein stark erhöhtes Risiko später eine Rechenschwäche zu entwickeln. Umgekehrt zeigen rechenschwache Kinder auch nach einigen Schuljahren noch ineffektive Zählstrategien und ein mangelndes Verständnis der Zählprinzipien. Die Anzahl von gezählten Objekten kann auf diese Weise schwerer mit der Gesamtheit der tatsächlichen Menge verknüpft werden. Teilweise verbinden Kinder die letztgenannte Zahl mit dem Objekt, das sie in ihrem Zählprozess zuletzt angetippt haben. Soll ein Kind beispielsweise die Anzahl von fünf unterschiedlich farbigen Autos bestimmen, so wird möglicherweise die „Menge“ fünf mit einem roten Auto in Verbindung gebracht, weil eben das rote Auto zuletzt gezählt wurde. Außerdem werden Zählfehler schlechter erkannt.

Kasten 1.2: Zählaufgaben

How Many? (HM)

Eine bestimmte Menge von Objekten wird einem Kind gezeigt und daraufhin gefragt, wie viele Objekte das sind. Diese Aufgabe umfasst zum Beispiel homogene und heterogene Items, zwei- und dreidimensionale Bilder oder Objekte, Töne und Variation der Instruktionen (Cordes & Gelman, 2005). Jedoch sind die Ergebnisse schwer zu interpretieren, da unklar ist, ob die Wiedergabe des zuletzt verwendeten Zählwortes tatsächlich das Verständnis des Kindes für die Mächtigkeit dieser Zahl widerspiegelt (Gelman & Gallistel, 1978) oder ob es durch Nachahmung gelernt hat, dass auf diese Frage immer diese Antwort erfolgt (Fuson, 1988). Um diesen Problemen zu begegnen, ließen Gelman, Meck und Merkin (1986) Kinder dabei zusehen, wie eine Puppe Objekte zählte und fragten anschließend, ob die Puppe richtig gezählt hat („It is your job to tell [puppet] if it was okay to count the way he did or not!“ 3- bis 5-Jährige waren in der Lage, Verletzungen der Eins-zu-Eins-Zuordnung und des Kardinalitätsprinzips zu erkennen.