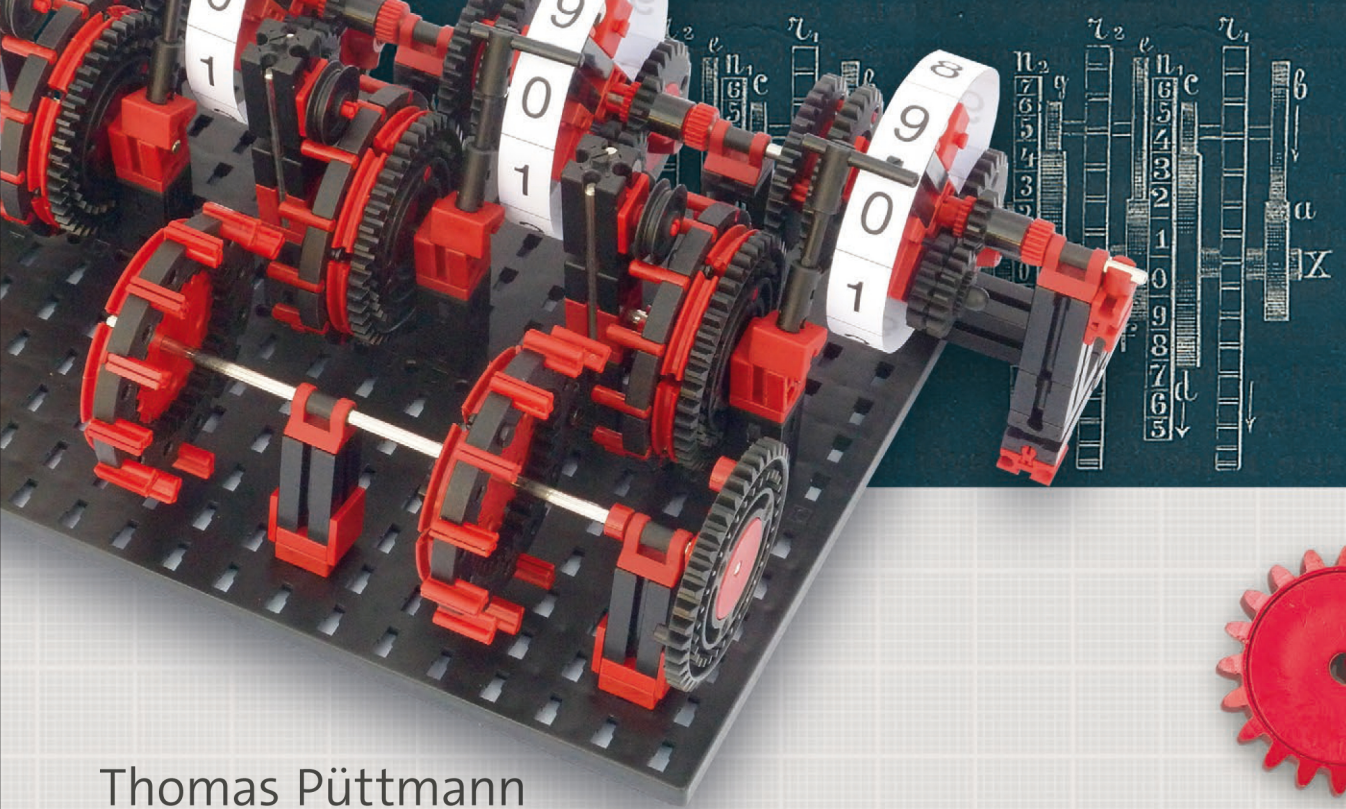




Thomas Püttmann

Mathematik verstehen mit fischertechnik®

28 faszinierende Modelle bauen,
die rechnen, zeichnen und messen



dpunkt.verlag



Thomas Püttmann ist außerplanmäßiger Professor für Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum. Die Modelle in diesem Buch hat er über viele Jahre in Workshops für Schülerinnen und Schüler und in universitären Seminaren erprobt und verbessert. Gemeinsam mit Dirk Fox hat er die beiden Bücher »Technikgeschichte mit fischertechnik®« und »fischertechnik®-Roboter mit Arduino« geschrieben, die ebenfalls im dpunkt.verlag erschienen sind. Er ist verheiratet und hat vier Kinder.

Copyright und Urheberrechte:

Die durch die dpunkt.verlag GmbH vertriebenen digitalen Inhalte sind urheberrechtlich geschützt. Der Nutzer verpflichtet sich, die Urheberrechte anzuerkennen und einzuhalten. Es werden keine Urheber-, Nutzungs- und sonstigen Schutzrechte an den Inhalten auf den Nutzer übertragen. Der Nutzer ist nur berechtigt, den abgerufenen Inhalt zu eigenen Zwecken zu nutzen. Er ist nicht berechtigt, den Inhalt im Internet, in Intranets, in Extranets oder sonst wie Dritten zur Verwertung zur Verfügung zu stellen. Eine öffentliche Wiedergabe oder sonstige Weiterveröffentlichung und eine gewerbliche Vervielfältigung der Inhalte wird ausdrücklich ausgeschlossen. Der Nutzer darf Urheberrechtsvermerke, Markenzeichen und andere Rechtsvorbehalte im abgerufenen Inhalt nicht entfernen.

Thomas Püttmann

Mathematik verstehen mit fischertechnik®

**28 faszinierende Modelle bauen,
die rechnen, zeichnen und messen**



dpunkt.verlag

Thomas Püttmann

thomas.puettmann@rub.de

Lektorat: Dr. Michael Barabas

Projektkoordinierung/Lektoratsassistentz: Anja Weimer

Copy-Editing: Alexander Reischert, *www.aluan.de*

Satz: Ulrich Borstelmann, *www.borstelmann.de*

Herstellung: Stefanie Weidner, Frank Heidt

Umschlaggestaltung: Helmut Kraus, *www.exclam.de*

Druck und Bindung: Schleunungdruck GmbH, Marktheidenfeld

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

ISBN:

Print 978-3-86490-936-8

PDF 978-3-96910-914-4

ePub 978-3-96910-915-1

mobi 978-3-96910-916-8

1. Auflage 2023

Copyright © 2023 dpunkt.verlag GmbH

Wiebinger Weg 17

69123 Heidelberg

Hinweis:

Der Umwelt zuliebe verzichten wir auf die Einschweißfolie.

Schreiben Sie uns:

Falls Sie Anregungen, Wünsche und Kommentare haben, lassen Sie es uns wissen:

hallo@dpunkt.de.

Die vorliegende Publikation ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte vorbehalten.

Die Verwendung der Texte und Abbildungen, auch auszugsweise, ist ohne die schriftliche Zustimmung des Verlags urheberrechtswidrig und daher strafbar. Dies gilt insbesondere für die Vervielfältigung, Übersetzung oder die Verwendung in elektronischen Systemen.

Es wird darauf hingewiesen, dass die im Buch verwendeten Soft- und Hardware-Bezeichnungen sowie Markennamen und Produktbezeichnungen der jeweiligen Firmen im Allgemeinen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz unterliegen.

Dies gilt insbesondere für »fischertechnik«, eine eingetragene Marke der fischertechnik GmbH, 72178 Waldachtal. Alle Angaben und Programme in diesem Buch wurden mit größter Sorgfalt kontrolliert. Weder Autor noch Verlag können jedoch für Schäden haftbar gemacht werden, die in Zusammenhang mit der Verwendung dieses Buches stehen.

5 4 3 2 1 0



Inhalt

Vorwort

xxi

Was du brauchst

xxiv

1 Der Zirkel

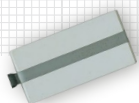
1

1.1	Fragen und Antworten	2
	Wie benutze ich den Zirkel?	2
	Was genau ist ein Kreis?	2
	Wozu soll ich Kreise zeichnen?	3
	Was ist eine geometrische Konstruktion?	4
	Wie kann ich einen Kreis mit 5 cm Radius durch zwei Punkte legen?	4
	Wie kommt hierbei Symmetrie ins Spiel?	6
	Wie kann ich durch drei Punkte einen Kreis zeichnen?	8
1.2	Ausblick	9
1.3	Bauanleitung	10
	Zirkel	10
	Stangenzirkel	12

2 Der Fasskreis

15

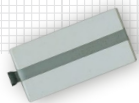
2.1	Fragen und Antworten	16
	Was ist ein Fasskreisbogen?	16
	Zeichnet das Modell tatsächlich einen Kreisbogen?	16
	Wie viele Fasskreisbögen gibt es?	17
	Wodurch unterscheiden sich die beiden Fasskreisbögen?	17
	Gehen die Fasskreisbögen bis zu den Punkten A und B?	17
	Was ist eine Sehne?	17
	Was ist der Sehnen-Winkel-Satz?	18
	Wie kann man den Sehnen-Winkel-Satz beweisen?	18
	Was passiert, wenn der Kreisbogen 180° oder weniger umfasst?	19
	Wie kann man Fasskreisbögen mit dem Zirkel zeichnen?	19
	Kann das Modell nur Fasskreise zu 60° -Winkeln zeichnen?	20
2.2	Bauanleitung	20



3	Der Sextant	23
3.1	Fragen und Antworten	24
	Was kann ich mit dem Sextanten messen?	24
	Was ist der Winkel zwischen zwei Objekten im Gelände?	24
	Wie funktioniert der Sextant?	25
	Was muss ich vor jeder Messung machen?	26
	Muss ich vor jeder Messung den Indexfehler bestimmen?	28
	Wie geht die eigentliche Messung vor sich?	29
	Wie genau ist der Sextant?	30
	Was nützen mir Winkelmessungen?	30
	Wie funktioniert Rückwärtseinschneiden?	30
	Wie funktioniert die Astronavigation?	32
	Kann ich Gestirns Höhen messen, auch wenn ich nicht am Meer bin?	33
	Was ist der Vorteil des Sextanten?	33
	Wie kommt die Skala zustande?	33
	Wie funktioniert die Minutenskala?	34
3.2	Ausblick	35
3.3	Bauanleitung.	36
4	Der Rechenfrosch	43
4.1	Fragen und Antworten	44
	Wie bediene ich den Frosch?	44
	Wofür steht das Q nach der 12?	44
	Gibt es für den Frosch eine Vorlage?	44
	Warum kein Affe, sondern ein Frosch?	45
	Wie funktioniert der Frosch?	45
	Welche Geometrie steckt im Rechenfrosch?	46
	Kann der Frosch auch addieren, subtrahieren und dividieren?	49
4.2	Ausblick	50
4.3	Bauanleitung.	50
5	Der Rechenschieber	55
5.1	Fragen und Antworten	56
	Was kann ich mit dem Rechenschieber machen?	56
	Wie kann ich multiplizieren?	56



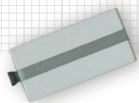
	Kann ich auch größere Zahlen multiplizieren?	56
	Was ist die Fließkomma-Darstellung von Zahlen?	57
	Wie kann ich dividieren?	57
	Wie kann ich die Wurzel ziehen?	57
	Wie sieht ein kommerzieller Rechenschieber aus?	58
	Wie funktioniert ein Rechenschieber?	58
	Was sind die Potenzgesetze?	58
	Wie addiere ich zwei Zahlen mit zwei Geodreiecken?	59
	Was ist eine logarithmische Skala?	60
	Wieso heißen logarithmische Skalen nicht exponentielle Skalen?	60
	Was ist eine Oktave?	61
	Was hat unser Geld mit logarithmischen Skalen zu tun?	61
5.2	Bauanleitung	62
	Kleiner Rechenschieber	62
	Großer Rechenschieber	63
6	Der Sinuscomputer	65
6.1	Fragen und Antworten	66
	Was kann ich mit dem Sinuscomputer machen?	66
	Wie bestimme ich Sinus und Cosinus eines Winkels?	66
	Wie genau ist der Sinuscomputer?	66
	Was sind eigentlich Sinus und Cosinus eines Winkels?	67
	Wie funktioniert der Sinuscomputer?	68
	Was ist eine Hypozykloide?	69
6.2	Bauanleitung	70
	Sinuscomputer	70
	Deltoide	74
7	Das Spiegellineal	75
7.1	Fragen und Antworten	76
	Wozu ist das Spiegellineal gut?	76
	Wie benutze ich das Spiegellineal?	76
	Was sind Tangenten?	78
	Gibt es immer eine Tangente?	79
	Wie funktioniert das Spiegellineal?	80
	Wie sehen Tangenten an Kreisen aus?	81



	Darf eine Tangente eine Kurve nur in einem Punkt berühren?	82
	Was sind Schmiegekreise?	82
	Wie kann ich die Genauigkeit steigern?	83
	Wozu sind Tangenten an Funktionsgraphen gut?	84
	Was ist die Ableitung einer Funktion?	85
7.2	Bauanleitung.	86
8	Das Planimeter	87
8.1	Fragen und Antworten	88
	Was kann ich mit dem Planimeter machen?	88
	Wie ist das Planimeter aufgebaut?	88
	Wie messe ich den Flächeninhalt eines Gebiets?	88
	Wie sieht ein kommerzielles Planimeter aus?	90
	Was ist das größte technische Problem beim Planimeter?	91
	Warum sind die Messräder kommerzieller Planimeter viel kleiner?	92
	Wie genau ist unser Planimeter?	92
	Was passiert, wenn ich die Randkurve gegen den Uhrzeigersinn abfahre?	92
	Sind negative Flächeninhalte nicht unsinnig?	93
	Kann man Flächeninhalte auch anders messen?	94
	Wie kann man Flächeninhalte einfacher Figuren berechnen?	95
	Welchen Flächeninhalt überstreicht der Unterarm?	98
	Wie kommt man zum Flächeninhalt der Kurve?	100
8.2	Ausblick	100
8.3	Bauanleitung.	101
9	Die Schleppe	105
9.1	Fragen und Antworten	106
	Was mache ich mit der Schleppe?	106
	Wie sehe ich, dass der Führungsstift mittig auf der Kurve ist?	107
	Was hat die Schleppe mit einem Fahrrad zu tun?	108
	Wie kommen Tangenten ins Spiel?	108
	Wie kann ich mit der Schleppe Flächeninhalte messen?	110
	Warum funktioniert diese Methode?	111



Wie stelle ich die Schleppe möglichst gut ein?	113
Wer erfand die Schleppe?	115
Wieso zeichnet die Schleppe solch glatte Kurven?	115
Wie kann ich mit der Schleppe grafisch integrieren?	115
9.2 Ausblick	117
9.3 Bauanleitung.	118
10 Der Kompasswagen	121
10.1 Fragen und Antworten	122
Was macht der Kompasswagen?	122
Wer erfand den Kompasswagen?	122
Ist der Wagen praktisch als Kompass zu gebrauchen?	122
Welcher Name wäre besser geeignet?	123
Wie dreht sich der Kompasswagen während der Fahrt?	123
Wie funktioniert der Kompasswagen?	125
Wie groß muss der Abstand der Räder sein?	126
Kann der Wagen auch auf einer Kugel parallelverschieben?	128
Wovon hängt die Parallelverschiebung ab?	130
Kann ich Flächeninhalte auf der Kugel mit dem Kompasswagen messen?	131
10.2 Ausblick	133
10.3 Bauanleitung.	134
11 Der Selbstenttwister	141
11.1 Fragen und Antworten	142
Selbstenttwistung – was soll das sein?	142
Wie ist der Selbstenttwister aufgebaut?	142
Kann sich die Lampe auch in der Mitte drehen?	143
Wie funktioniert die Selbstenttwistung?	144
Kann man den Effekt noch anders verdeutlichen?	146
Was ist der Dirac-Belt-Trick?	147
Was hat der Selbstenttwister mit dem Gürteltrick zu tun?	148
Wer erfand den Selbstenttwister?	149
Wird die Selbstenttwistung in der Praxis eingesetzt?	149
Was liegt dem Effekt mathematisch zugrunde?	149



	Wie beschreibt man Lage und Ausrichtung eines Gegenstands?	149
	Was ist die Drehgruppe $SO(3)$?	150
	Wie kann man das Drehen um 720° formal beschreiben? . . .	152
	Wie wird das Drehen um 720° mathematisch aufgelöst? . . .	152
	Kann man mit Wegen rechnen?	154
	Wieso gibt es nur zwei Sorten von Wegen?	155
	Was ist der Twist-Bogen?	156
	Wie führt der Twist-Bogen zu Formeln?	156
11.2	Ausblick	162
11.3	Bauanleitung.	163
	Selbstentwister	163
	Mit LEDs	167
	Gebogener Dirac-Gürtel.	168

12 Die platonischen Körper 171

12.1	Fragen und Antworten	172
	Welche platonischen Körper gibt es?	172
	Was ist ein platonischer Körper?	172
	Welche Drehsymmetrie besitzen die platonischen Körper? . .	173
	Was ist das Besondere an diesen Drehsymmetrien?	174
	Gibt es auch Spiegelsymmetrien?	175
	Wie kann ich die platonischen Körper aus fischertechnik bauen?	176
	Wie baue ich Polyeder aus gleichseitigen Dreiecken?	178
	Was entsteht, wenn in jeder Ecke fünf Dreiecke zusammentreffen?	178
	Was entsteht, wenn in jeder Ecke vier Dreiecke zusammentreffen?	180
	Was entsteht, wenn in jeder Ecke drei Dreiecke zusammentreffen?	181
	Können auch mehr als fünf Dreiecke in einer Ecke zusammentreffen?	182
	Wie baue ich Polyeder aus Quadraten?	184
	Was entsteht, wenn in jeder Ecke drei Quadrate zusammentreffen?	184
	Können mehr als drei Quadrate in einer Ecke zusammentreffen?	185



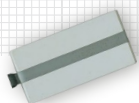
Wie baue ich Polyeder aus regelmäßigen Fünfecken?	185
Was entsteht, wenn in jeder Ecke drei Fünfecke zusammentreffen?	186
Können mehr als drei regelmäßige Fünfecke in einer Ecke zusammentreffen?	187
Können andere regelmäßige n-Ecke in einer Ecke zusammentreffen?	187
Kann ich spannende nichtplatonische Körper bauen?	188
Was ist die Eulersche Polyederformel?	188
Gilt die Formel auch für nichtkonvexe Polyeder?	189
12.2 Ausblick	190
12.3 Bauanleitungen.	190
Tetraeder	190
Hexaeder (Würfel).	191
Oktaeder	191
Dodekaeder	192
Ikosaeder	192

13 Der Abakus 193

13.1 Fragen und Antworten	194
Was macht der Abakus?	194
Wozu sind die Muster gut?	195
Wozu ist die Teilung der Stange gut?	195
Wie bediene ich den Abakus?	196
Was haben die Muster mit römischen Zahlen zu tun?	196
Wie addiere ich mit dem Abakus?	197
Ist das immer so einfach?	197
Gibt es auch einen »großen Freund«?	198
Kann ich auch subtrahieren, multiplizieren und dividieren?	199
Gibt es auch andere Abakus-Varianten?	199
13.2 Ausblick	200
13.3 Bauanleitung.	200

14 Die kleine Rechenmaschine 203

14.1 Fragen und Antworten	204
Was kann ich mit der kleinen Rechenmaschine machen?	204
Wie rechne ich $54 + 27$?	204



Wie rechne ich $83 - 56$?	204
Wie rechne ich $7 \cdot 8$?	205
Wie rechne ich $68 : 7$?	207
14.2 Bauanleitung.	208
15 Die Multiplikationswalzen	217
15.1 Fragen und Antworten	218
Was kann ich mit den Multiplikationswalzen machen?	218
Wie kann ich $7 \cdot 569$ berechnen?	218
Ist das immer so einfach?	219
Wie funktionieren die Multiplikationswalzen?	220
Wer hat die Multiplikationswalzen erfunden?	221
Was sind die Napierschen Rechenstäbchen?	221
Welchen Vorteil bieten die Walzen gegenüber den Stäbchen?	222
Woher stammt die diagonale Unterteilung auf den Stäbchen?	222
15.2 Ausblick	223
15.3 Bauanleitung.	224
16 Der Analogzähler	229
16.1 Fragen und Antworten	230
Was macht der Analogzähler?	230
Wie lese ich die Anzeige ab?	230
Wie funktioniert der Analogzähler?	231
Wie stelle ich den Zähler ein?	232
Wozu ist die kontinuierliche Zählung gut?	233
Ist die Bezeichnung »Analogzähler« passend?	233
16.2 Bauanleitung.	234
17 Die Rechenmaschine	239
17.1 Fragen und Antworten	240
Wie ist die Rechenmaschine aufgebaut?	240
Wie kann ich schnell etwas Spannendes mit der Maschine rechnen?	241
Was kann ich mit der Rechenmaschine alles berechnen?	242
Kann ich mit mehr als drei Stellen rechnen?	243

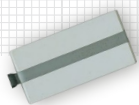


Muss ich 43-mal drehen, wenn ich $43 \cdot 21$ berechnen möchte?	243
Wie funktioniert das Rechenwerk?	244
Wer hat die fließende Zehnerübertragung erfunden?	246
Was ist so toll an der fließenden Zehnerübertragung?	247
Was sind die Nachteile der fließenden Zehnerübertragung?	247
Wozu ist die Aufteilung in Rechenwerk und Eingaberegister gut?	247
Was sind Sprossenräder und Staffelwalzen?	247
Warum hat Leibniz keine erfolgreiche Rechenmaschine gebaut?	248
17.2 Ausblick	248
17.3 Bauanleitung.	248

18 Der Binärrechner

261

18.1 Fragen und Antworten	262
Was kann ich mit dem Binärrechner machen?	262
Wie kann ich mit dem Binärrechner zählen?	262
Wie funktioniert das Zählen genau?	264
Funktionieren die Umwandlungen auch bei größeren Zahlen?	265
Was passiert bei der 16. Kugel?	266
Wie kann ich mit dem Binärrechner addieren?	266
Was passiert, wenn das Ergebnis größer als 15 ist?	268
Was ist ein Bit?	269
Wie funktioniert das Addieren genau?	269
In welcher Reihenfolge stoße ich die Kugeln von den Sockeln?	270
Kann ich auch subtrahieren?	271
Wie funktioniert das Subtrahieren?	272
Kann der Binärrechner auch mit negativen Zahlen arbeiten?	273
Was ist mit Multiplikation und Division?	273
Wer hat das binäre Rechnen erfunden?	274
Hat unser Binärrechner eine Vorlage?	274
Warum rechnen elektronische Computer binär?	275
Warum rechnen mechanische Rechenmaschinen dezimal?	276
18.2 Bauanleitung.	276



19	Der DA-Wandler	281
19.1	Fragen und Antworten	282
	Wofür steht die Bezeichnung »DA-Wandler«?	282
	Was kann unser DA-Wandler?	282
	Wie funktioniert unser DA-Wandler?	282
	Was ist ein gewichtetes Mittel?	284
	Kann ich mehr als zwei Bit wandeln?	285
	Wo werden DA-Wandler eingesetzt?	285
	Wie sind elektronische DA-Wandler aufgebaut?	285
	Gibt es auch AD-Wandler?	285
19.2	Ausblick	286
19.3	Bauanleitung.	286
20	Der Seilcomputer	289
20.1	Fragen und Antworten	290
	Wozu ist der Seilcomputer gut?	290
	Wie ist der Seilcomputer aufgebaut?	290
	Wie löse ich ein Gleichungssystem mit dem Seilcomputer?	291
	Gibt es ein Vorbild für den Seilcomputer?	293
	Kann unser Seilcomputer auch größere Systeme lösen?	295
	Was mache ich, wenn meine Koeffizienten nicht passen?	295
	Warum sind lineare Gleichungssysteme wichtig?	296
	Wie funktioniert der Seilcomputer?	297
	Warum ist der Zeiger im Seilcomputer vertikal und nicht horizontal?	300
	Wo muss ich auf die Wippen drücken?	300
	Was passiert, wenn ein Gleichungssystem unlösbar ist?	302
	Was passiert, wenn es unendlich viele Lösungen gibt?	302
	Warum sind permanent stramme Seile nicht gut?	302
	Welche anderen Systeme kann ich ausprobieren?	303
20.2	Ausblick	303
20.3	Bauanleitung.	304
	Die Wippen	304
	Das Unterteil.	307
	Das Oberteil	308
	Die Seile	312
	Zusammenbau und Einstellung der Seillängen	314



21 Der xy-Schreiber 317

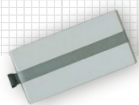
21.1	Fragen und Antworten	318
	Wie kann ich den xy-Schreiber selber steuern?	318
	Was zeichne ich zuerst?	318
	Welche Kurven kann der xy-Schreiber zeichnen?	319
	Muss der Schreiber in der Ecke eines Tisches stehen?	319
	Kann ich auch etwas Nichtmathematisches mit dem Schreiber machen?	319
21.2	Bauanleitung.	320
	Das Gestell	320
	Der Wagen	324
	Der Schlitten	327
	Die Gewichte und die Seilführung	328
	Variante ohne Laufschiene	330

22 Der Geradenzeichner 333

22.1	Fragen und Antworten	334
	Warum soll ich Geraden mit dem xy-Schreiber zeichnen?	334
	Was ist die Steigung einer Geraden?	334
	Wie kommt die Gerade mechanisch zustande?	335
	Was hat das Ganze mit Funktionen zu tun?	336
	Wie kann ich andere Geraden zeichnen lassen?	336
22.2	Bauanleitung.	336

23 Der Synthesizer 339

23.1	Fragen und Antworten	340
	Was kann der Synthesizer?	340
	Wie ist der Synthesizer aufgebaut?	341
	Wie lege ich mit dem Synthesizer los?	341
	Was zeichne ich zuerst?	342
	Was zeichne ich als Zweites?	343
	Welche Funktionen kann der Synthesizer allgemein zeichnen?	344
	Welche Einheiten verwende ich?	344
	Was ist die wichtigste Komponente des Synthesizers?	345
	Wie funktioniert ein Sinusgenerator?	345



	Wie werden die beiden Sinusfunktionen überlagert?	346
	Was ist in Abbildung 23–2 dargestellt?	346
	Kann ich mehr als zwei Sinusfunktionen überlagern?	347
	Welcher Zusammenhang besteht zum Musikinstrument? . . .	347
	Woher stammt das Funktionsprinzip des Synthesizers?	347
23.2	Ausblick	348
23.3	Bauanleitung.	349

24 Der Ellipsenzeichner

357

24.1	Fragen und Antworten	358
	Was ist eine Ellipse?	358
	Wie ist der Ellipsenzeichner aufgebaut?	359
	Wie kann ich eine Ellipse zeichnen?	359
	Wo liegen die Achsen dieser Ellipse?	360
	Wie kann ich die gezeichnete Ellipse mathematisch beschreiben?	361
	Kann ich die Ellipse ohne Sinus und Cosinus beschreiben? . .	362
	Was passiert, wenn die Rotoren nicht 90° gegeneinander verdreht sind?	362
	Was sind die Scheitelpunkte einer Ellipse?	363
	Was ist ein Zylinderschnitt?	364
	Wie konstruiert ein Gärtner eine Ellipse?	365
	Wie passen die Konstruktionen zusammen?	367
	Was sind die Dandelinschen Kugeln?	368
	Was ist ein Kegelschnitt?	370
	Warum heißen die Brennpunkte Brennpunkte?	371
24.2	Ausblick	373
24.3	Bauanleitung.	374

25 Der Harmonograph

381

25.1	Fragen und Antworten	382
	Was kann ich mit dem Harmonographen machen?	382
	Wie zeichne ich Lissajous-Figuren mit dem Harmonographen?	382
	Welche weiteren Lissajous-Figuren kann ich zeichnen?	384
	Kann ich der Figur das Frequenzverhältnis ansehen?	384
	Was sind Multiplizitäten?	385



	Wie hat Lissajous die Kurven untersucht?	385
	Was haben die Figuren mit musikalischen Intervallen gemein?	387
	Wie kann ich Lissajous-Figuren mathematisch beschreiben? . .	388
25.2	Ausblick	389
25.3	Bauanleitung.	389

26 Der Isograph 391

26.1	Fragen und Antworten	392
	Was ist ein Isograph?	392
	Was kann unser Isograph?	393
	Wie zeichne ich die Kurven mit dem Isographen?	394
	Warum steht ein z in den Gleichungen und kein x ?	395
	Was sind komplexe Zahlen?	395
	Wie addiere ich komplexe Zahlen?	396
	Wie multipliziere ich komplexe Zahlen alternativ?	397
	Was ist die Polardarstellung einer komplexen Zahl?	398
	Welche Kurven zeichnet der Isograph?	398
	Wie löse ich eine Gleichung mit dem Isographen?	399
	Was sagt der Fundamentalsatz der Algebra?	404
	Woran erkenne ich eine doppelte Nullstelle?	404
	Was genau ist die Umlaufzahl?	405
	Wie kann ich die Umlaufzahlen schnell bestimmen?	405
	Was nutzt mir die Umlaufzahl?	406
	Warum zeichnen? Gibt es keine Lösungsformel?	406
26.2	Ausblick	407
26.3	Bauanleitung.	408
	Erste Variante	408
	Zweite Variante.	409

27 Der kgV-Kurbler 411

27.1	Fragen und Antworten	412
	Wie bediene ich den kgV-Kurbler?	412
	Was ist das kgV?	414
	Wie funktioniert der kgV-Kurbler?	415
	Wie knapp verpassen sich die Raupenbeläge zwischendurch?	416

Was ist der ggT?	417
Was passiert, wenn der $ggT = 1$ ist?	417
Was haben kgV und ggT miteinander zu tun?	418
Wie kann ich den ggT zweier Zahlen berechnen?	420
Wann verpassen sich die Raupenbeläge am knappsten? . . .	421
Wie wende ich kgV und ggT in der Bruchrechnung an? . . .	421
Welche Anwendungen des kgV gibt es?	422
27.2 Bauanleitung.	423

28 Der Faktorisierer 429

28.1 Fragen und Antworten	430
Wozu ist der Faktorisierer gut?	430
Gibt es ein Vorbild für den Faktorisierer?	431
Warum gibt es zwei Varianten des Faktorisierers?	432
Wie bediene ich die kleine Variante?	433
Was sind die binomischen Formeln?	435
Was hat das Faktorisieren mit Quadratzahlen zu tun?	435
Was ist der Vorteil der Quadratzahlen?	436
Steckt im Faktorisierer das Fermat-Verfahren?	437
Wie schließt der Faktorisierer aus, dass eine Zahl eine Quadratzahl ist?	438
Was haben die Ketten mit Teilen mit Rest zu tun?	439
Was sind die quadratischen Reste im 28er-System?	440
Auf welche Kettenglieder kommen Raupenbeläge?	441
Wie spielen die Ketten zusammen?	441
Bis zu welchem Zählerstand muss ich höchstens kurbeln? . .	442
Was ist Parallelisierung?	443
Wie oft liefert der Faktorisierer Fake-Kandidaten?	443
Kann ich beim großen Faktorisierer weitere Ketten ergänzen?	443
Was hat Faktorisieren mit Verschlüsseln zu tun?	444
28.2 Ausblick	444
28.3 Bauanleitung.	445
Kleine Variante	445
Programmierung der kleinen Variante	447
Große Variante	449
Motor und Elektronik	455
Programmierung der großen Variante	459



Anhang A	463
Die Namen der Einzelteile	463
Anhang B	469
Bildnachweise	469



Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

herzlich willkommen in der Welt der mathematischen Modelle aus fischertechnik!

Dieses Buch stellt dir in 28 Kapiteln ganz verschiedene mathematische Instrumente, Apparate und Gegenstände vor und lädt dich zum Bauen und Experimentieren ein.

Natürlich soll dir das Bauen und Experimentieren in erster Linie Spaß machen. Auch wenn du eigentlich nur an fischertechnik interessiert bist und mit Mathematik nicht viel am Hut hast, wirst du hoffentlich einige Modelle finden, die dein Interesse wecken.

Das Ziel dieses Buchs ist es natürlich auch, Mathematik zu vermitteln. Zunächst einmal *ohne viele Worte*, sondern *durch Hand und Auge in den Kopf*. Hast du ein Modell nach der Bauanleitung am Ende eines Kapitels zusammengebaut, so findest du am Anfang des Kapitels meist direkt eine Bedienungsanleitung. Damit kannst du loslegen, d.h. mit den Modellen zeichnen, messen, rechnen. Dabei werden sich automatisch einige Fragen sowie viele kleinere oder größere Aha-Effekte ergeben.

Erst danach erkläre ich den mathematischen Hintergrund und gebe dir weitere Informationen. Durch die Strukturierung in Fragen und Antworten kannst du dabei das herauspicken, was dich am meisten interessiert, und das überspringen, was dir noch zu schwierig erscheint.

Einige der Apparate und Objekte kennst du bestimmt, von anderen hast du vielleicht schon einmal gehört. Ich konnte allerdings auch einige übersehene Schätze bergen: Die Schleppe, der Selbstenttwister, der Seilcomputer, der Iso-graph und der Faktorisierer haben aus unterschiedlichen Gründen nie einen größeren Bekanntheitsgrad erreicht. Ich stelle sie in diesem Buch detailliert vor und hoffe, dass sie als Lernobjekte einen bleibenden Wert haben werden.

Besonders wichtig ist mir, dass alle Modelle tatsächlich funktionieren. Einige haben sogar einen hohen Gebrauchswert. Ich selbst verwende keinen anderen Zirkel mehr und nutze gerne meine Schleppe, wenn ich gelegentlich einen Flächeninhalt messe, oder meinen Sextanten bei Himmelsbeobachtungen. Einer meiner Söhne hat wochenlang seine Grundschulrechenaufgaben mit den Multiplikationswalzen durchgeführt.

Mathematik durch Modelle und Exponate zu vermitteln ist nicht neu. Bahnbrechend in den letzten Jahrzehnten war die Gründung des mathematischen Mitmachmuseums *Mathematikum* in Gießen durch Albrecht Beutelspacher im Jahre 2002, in dessen Folge weltweit eine ganze Reihe ähnlicher Institutionen entstanden ist. Ein Besuch des Mathematikums lohnt sich auf jeden Fall!

Das gilt auch für viele andere Museen. Im *Arithmeum* in Bonn und im *Heinz-Nixdorff-MuseumsForum* in Paderborn zum Beispiel findest du neben phänomenalen Sammlungen von Rechenhilfsmitteln, Rechenmaschinen und Computern schöne und lehrreiche Exponate zum Ausprobieren.

Auch an einigen Universitäten sind mathematische Modellsammlungen in den letzten Jahren wieder liebevoll entstaubt und ergänzt worden. Eine der ersten solcher Sammlungen stammte von dem bedeutenden Mathematiker *Felix Klein* (1845–1925), der sich entschieden für den Einsatz von Modellen in der Lehre einsetzte. Von ihm stammt der Satz:

»Wie heute, so war auch damals der Zweck des Modells, nicht etwa Schwäche der Anschauung auszugleichen, sondern eine lebendige, deutliche Anschauung zu entwickeln, ein Ziel, das vor allem durch das Selbstanfertigen von Modellen am besten erreicht wird.«

Durch das »Selbstanfertigen« lernst du die Modelle in allen Details kennen und begreifst, wie die einzelnen Einheiten zusammenspielen und was dabei wesentlich ist. Oft verstehst du genau dadurch auch die Feinheiten eines mathematischen Konzepts.

Damit die komplexeren Modelle auch funktionieren, musst du beim Zusammenbau zwangsläufig sehr gut mitdenken. Daher präsentiere ich dir die Bauanleitungen in Form von über 600 Fotos, die das Verständnis für die Funktionseinheiten unterstützen.

Das Zusammenbauen und Zum-Laufen-Bringen der komplexeren Modelle schult dein Durchhaltevermögen und deine Frustrationstoleranz – beides Eigenschaften, die in einem naturwissenschaftlichen oder ingenieurwissenschaftlichen Studium, einem technischen Beruf oder einer handwerklichen Ausbildung sehr hilfreich sein können.

Die Modelle in diesem Buch hätte ich so nicht bauen können ohne die vielen Tricks und Kniffe, die ich auf Ausstellungen, in der ft:pedia, im Clubblatt des fischertechnikclub Niederlande, im Bilderpool der ftcommunity und in persönlichen Gesprächen von anderen fischertechnik-Begeisterten gelernt habe. Dafür möchte ich mich herzlich bedanken!



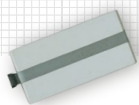
Viele Modelle können lehrplankonform im Schulunterricht eingesetzt werden. Ich selbst habe sie in mehr als 30 Workshops für Schülerinnen und Schüler erprobt und verbessert. Oft haben nur kleine Änderungen an den Modellen für einen deutlich reibungsloseren Ablauf der Lehreinheiten gesorgt. Mein Dank gilt hier den Lehrerinnen und Lehrern der Schulklassen für die gute Zusammenarbeit und Raphaela Meißner und Klaus Trimborn vom Bochumer zdi-Netzwerk IST.bochum für die Koordination und Förderung.

Vor diesem Buch habe ich zusammen mit Dirk Fox die beiden Bücher *Technikgeschichte mit fischertechnik®* und *fischertechnik®-Roboter mit Arduino* geschrieben, die ebenfalls im dpunkt.verlag erschienen sind. Durch die Zusammenarbeit mit Dirk habe ich vieles gelernt, das in das aktuelle Buch eingeflossen ist. Auch dafür sage ich gerne danke!

Abschließend möchte ich mich noch beim freundlichen Team vom dpunkt.verlag für die konstruktive Zusammenarbeit bedanken und bei meiner Familie für die Unterstützung.

Bochum, 6. Juli 2022

Thomas Püttmann



Was du brauchst

Zuerst einmal brauchst du natürlich fischertechnik. Die benötigten Teile für jedes Modell findest du in den Teilelisten auf der Webseite zum Buch unter:

<http://mathematik-mit-fischertechnik.de>

Falls du fischertechnik-Neuling bist oder zu wenige Teile besitzt, stelle ich dir auf dieser Internetseite auch Möglichkeiten vor, wie du an die Teile kommen kannst.

Viele Instrumente und Apparate verfügen über Skalen oder Beschriftungen. Die dafür benötigte Datei zum Ausdrucken findest du unter:

<http://mathematik-mit-fischertechnik.de/Druckmaterial.pdf>

Darüber hinaus brauchst du:

- Stabilo-Fineline in verschiedenen Farben (Kapitel 1, 2, 9, 21–26)
- eine Stecknadel (Kapitel 1)
- Leinen- oder Ramiezwirn (Kapitel 20–26)
- doppelseitiges transparentes Klebeband (Kapitel 3, 6, 8, 14, 15, 16, 18, 19, 20, 27, 28)
- bedruckbare Overhead-Folie (Kapitel 6, 10)

Die Stabilo-Fineline kannst du in jedem Schreibwarengeschäft bekommen, die Stecknadel und den Leinenzwirn in fast jeder Kurzwarenabteilung. Als doppelseitiges Klebeband kann ich das Klebeband Knorr prandell 217901105 sehr empfehlen, das du im Online-Versandhandel beziehen kannst. Die Breite von 15 mm passt genau zum fischertechnik-System. Es eignet sich hervorragend zum Anbringen der Skalen und Beschriftungen.

1

Der Zirkel

Du möchtest Kreise in leuchtenden Farben statt im matten Grau der Zirkelminen? Dann bau dir diesen präzisen Zirkel aus fischertechnik. Ob bei Konstruktionen im Unterricht oder beim Zeichnen und Basteln zuhause, überall unterstützen die Farben deine Ideen und deine Kreativität.

- Anzahl der Teile: 19 (Zirkel)
- Größte Schwierigkeit: Ausrichten der Stecknadel
- Bauzeit: 10 min
- Lehrplanbezug: Kreise und ihre Eigenschaften, Konstruktionen mit Zirkel und Lineal



1.1 Fragen und Antworten

Wie benutze ich den Zirkel?

Du stellst den gewünschten Radius des Kreises ein, indem du die beiden Drehscheiben gegeneinander verdrehst. Der Radius ist der Abstand zwischen der Spitze der Stecknadel und der Spitze des Stiftes. Mit der Stecknadel stichst du in einen Punkt auf dem Blatt Papier, setzt den Stift auf und drehst ihn ohne Druck am Stiftende um den Einstichpunkt.

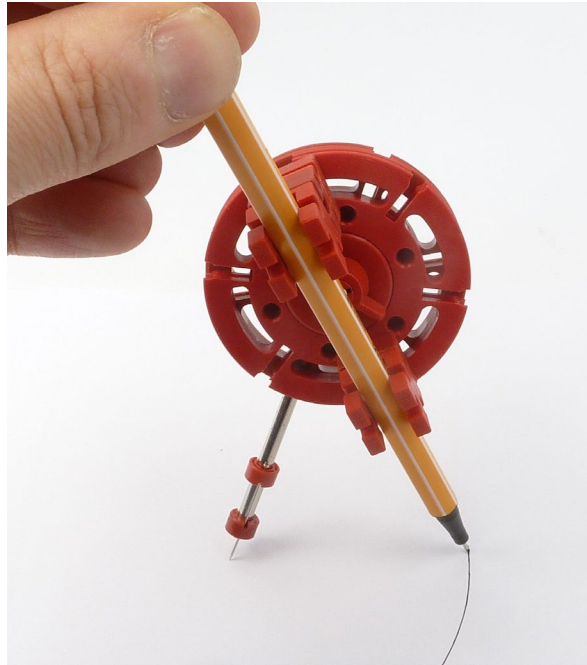


Abb. 1–1: Der Zirkel im Einsatz

Was genau ist ein Kreis?

Ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r besteht aus allen Punkten, die von M die Entfernung r besitzen. Genau dieses mathematische Konzept setzt der Zirkel mechanisch um. Allerdings etwas indirekt: Du stellst den Radius (einen Abstand) über einen Winkel ein. Direkter ist es beim Stangenzirkel. Bei ihm stellst du die Entfernung des Stiftes zum Mittelpunkt direkt durch Verschieben ein. Ein Stangenzirkel ist für große Radien oder für den Einsatz von Schneidwerkzeugen sehr gut geeignet. Der Stift bzw. das Werkzeug steht nämlich stets senkrecht auf dem Untergrund.

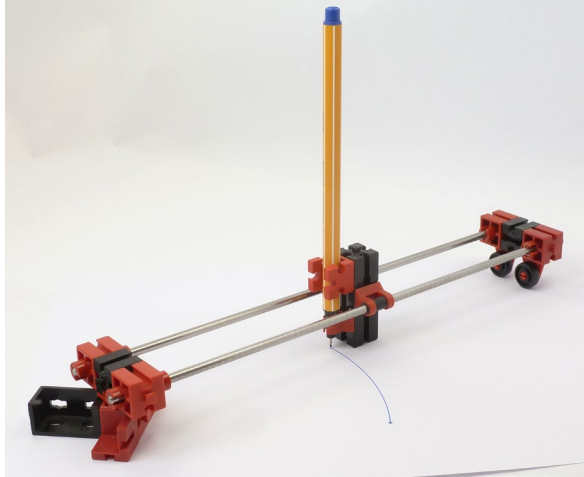


Abb. 1–2: Der Stangenzirkel

Wozu soll ich Kreise zeichnen?

Zunächst, weil es Spaß macht. Probiere doch einmal Folgendes aus: Du zeichnest einen Kreis. Ohne den Radius zu verändern, stichst du die Nadel danach in einen Punkt der Kreislinie und zeichnest einen weiteren Kreis. Die beiden Kreise schneiden sich in zwei Punkten. Um diese Punkte zeichnest du wieder zwei Kreise. Mit weiteren Kreisen um die Schnittpunkte kannst du die Zeichnung zu einer wunderschönen Rosette vervollständigen. Ist es nicht faszinierend, mit welcher Präzision sich mehrere Kreislinien in einem Punkt schneiden?

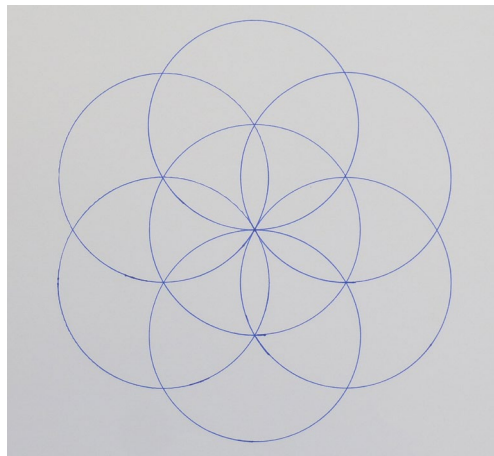


Abb. 1–3: Eine Rosette – mit unserem Zirkel gezeichnet

Kreise zu zeichnen, ist natürlich auch nützlich. Beim Basteln aller möglichen Gegenstände aus Papier, Karton oder Holz kannst du einen Zirkel häufig sehr gut gebrauchen.

Schließlich ist ein Zirkel neben dem Geodreieck das wichtigste Werkzeug im Geometrieunterricht. Es gibt spannende Konstruktionen, die leider heutzutage in der Schule oft viel zu kurz kommen. Dabei gibt es nichts Besseres, um mathematisches Denken zu erlernen.

Was ist eine geometrische Konstruktion?

Eine geometrische Konstruktion ist wie ein Krimi. Du bist der Detektiv. Du musst beobachten, Fragen stellen, vermuten und diese Vermutungen entweder als falsch erkennen oder durch Kombinieren beweisen. Immer wieder betreten neue Figuren die Bühne und du musst einschätzen, ob sie für deinen Fall wichtig oder unwichtig sind und welche Rolle sie spielen. Du musst dich in Beziehungsgeflechte eindenken. Anders als im Krimi geht es allerdings nie um Missetaten oder Schlechtigkeiten, sondern immer um positive Eigenschaften. Außerdem ist es vollkommen ungefährlich. Hast du den Fall am Ende gelöst, ist das ein erhebendes Gefühl. Viel stärker, als wenn du ein Puzzle mit 1000 Teilen zusammengesetzt hast!

Ich zeige dir ein paar einfache Beispiele. Am besten nimmst du dir deinen Zirkel, ein Lineal sowie ein Blatt Papier und konstruierst einfach mit.

Wie kann ich einen Kreis mit 5 cm Radius durch zwei Punkte legen?

Auf das Blatt Papier zeichnest du zwei Punkte und nennst sie A und B . Wie kannst du einen Kreis zeichnen, der durch die beiden Punkte verläuft und den Radius 5 cm hat?

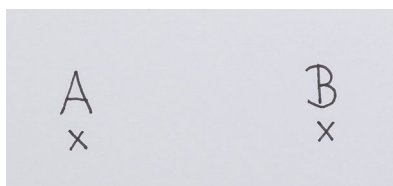


Abb. 1–4: Wie zeichnet man einen Kreis mit 5 cm Radius durch A und B ?

Vielleicht weißt du zunächst nicht, wie du anfangen sollst. Dann versuche herauszufinden, *was* genau du nicht weißt. Hier ist es recht einfach: Du weißt nicht, wo du deinen Zirkel einstechen sollst.

Wenn man keine Idee hat, sollte man deswegen nicht in Untätigkeit verfallen. Wie im Sport ist die Bewegung in der Mathematik das Wichtigste. Spiele ein bisschen mit dem herum, was in der Aufgabe steht. Wenn dir nichts



anderes direkt einfällt, zeichne doch einfach Kreise mit einem Radius von 5 cm um die Punkte A und B. Es sind ja bis jetzt keine anderen Punkte da!

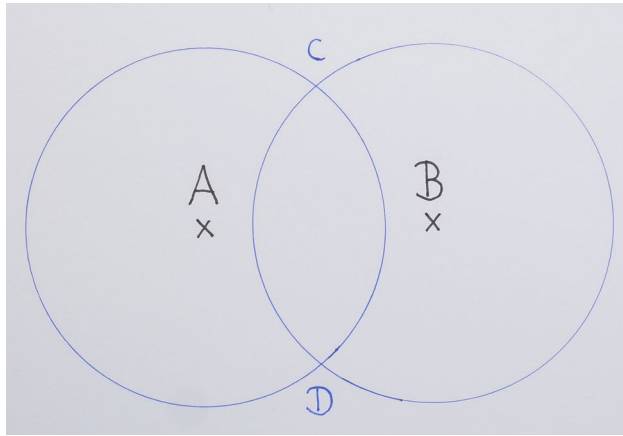


Abb. 1–5: Kreise mit einem Radius von 5 cm um die Punkte A und B

Vermutlich schneiden sich deine beiden Kreise in zwei Punkten. Nenne diese Punkte C und D. Das sind neue Mittelpunkte für deinen Zirkel! Stich gleich in diese Punkte ein und zeichne zwei weitere Kreise mit einem Radius von 5 cm. Diese Kreise verlaufen durch die Punkte A und B. Wie aus dem Nichts ist dein Problem gelöst! Und du hast nicht nur *eine* Lösung für dein Problem gefunden, sondern gleich *zwei*.

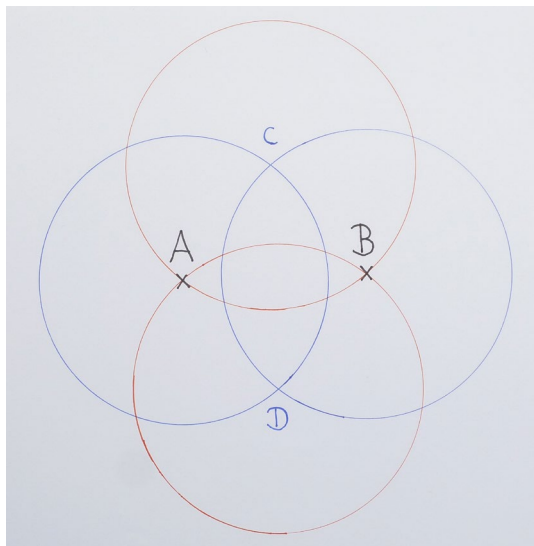


Abb. 1–6: Die Kreise mit 5 cm Radius um C und D verlaufen durch A und B.

Warum funktioniert diese Konstruktion nun? Der Punkt C liegt auf dem Kreis um A mit Radius 5 cm und auf dem Kreis um B mit Radius 5 cm. Er ist also von beiden Punkten 5 cm entfernt. Wenn wir nun einen Kreis mit einem Radius von 5 cm um C schlagen, so muss dieser durch die Punkte A und B gehen. Ebenso der Kreis mit einem Radius von 5 cm um D .

Was aber, wenn sich die beiden ursprünglichen Kreise um A und B in Abbildung 1–5 gar nicht schneiden? Das könnte nur dann passieren, wenn A und B weiter als 10 cm voneinander entfernt sind. In diesem Fall gibt es keinen Kreis mit Radius 5 cm durch A und B .

Wie kommt hierbei Symmetrie ins Spiel?

Zeichne die Gerade durch C und D .

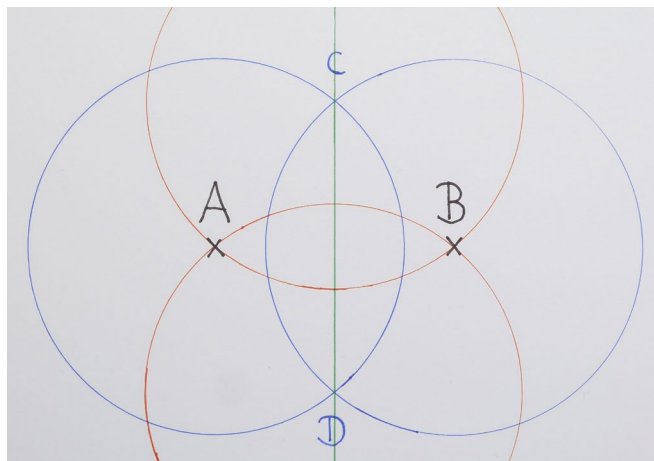


Abb. 1–7: Die Gerade durch die Punkte C und D

Falte die linke Hälfte des Papiers auf die rechte Hälfte sorgfältig entlang dieser grünen Geraden. Was stellst du fest?

Genau: Der Punkt A landet auf dem Punkt B , die beiden blauen Kreise landen aufeinander, die beiden roten jeder auf sich. Alles, was du gezeichnet hast, ist symmetrisch zur grünen Geraden. Warum ist das so?

Du kannst sagen, das sei offensichtlich. Aber das ist kein Beweis. Ein stichhaltiges Argument anzugeben, ist am Anfang nicht leicht. Es wird aber leichter mit jeder Konstruktion, die du gesehen hast, und mit jeder Minute, die du in solche Probleme investierst.

Der entscheidende Punkt ist, dass die Punkte C und D auf dem Falz liegen. Um das zu verstehen, falte das Blatt auseinander, drehe es auf die Rückseite, suche die Einstichstellen von C und D , stich dort noch einmal mit dem Zir-