

LERNEN EINFACH GEMACHT



2. Auflage

Differenzial- gleichungen

für
dummies[®]



Differenzialgleichungen
richtig klassifizieren

Verschiedene Zugänge zur
Lösung kennen

Fertigkeiten zum Lösen
erwerben

Steven Holzner
Timm Sigg

Differenzialgleichungen für Dummies

Schummelseite

WICHTIGE ABLEITUNGSREGELN

- ✓ Summenregel: $(f + g)' = f' + g'$
- ✓ Faktorregel: $(C \cdot f)' = C \cdot f'$
- ✓ Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$
- ✓ Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- ✓ Kettenregel: $\frac{d}{dx}(f(g(x))) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$

DIFFERENZIALGLEICHUNGEN DER ORDNUNG NACH EINORDNEN

Differenzialgleichungen erster Ordnung beinhalten Ableitungen erster Ordnung, wie im folgenden Beispiel gezeigt:

$$\frac{dy}{dx} = 5x$$

Differenzialgleichungen zweiter Ordnung beinhalten Ableitungen zweiter Ordnung, wie in den folgenden Beispielen gezeigt:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sin(x) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = \cos(x)$$

Differenzialgleichungen höherer Ordnung beinhalten Ableitungen einer höheren als zweiter Ordnung (was kaum eine Überraschung darstellen sollte). Differenzialgleichungen aller Ordnungen können unter Verwendung der y' -Notation dargestellt werden, etwa wie folgt:

$$\frac{dy}{dx} = y' = f(x) \quad \frac{d^3y}{dx^3} = y''' = f(x) \quad \frac{d^5y}{dx^5} = y^{(5)} = f(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y'' = f(x) \quad \frac{d^4y}{dx^4} = y^{(4)} = f(x)$$

ZWISCHEN LINEAREN, SEPARIERBAREN UND EXAKTEN DIFFERENZIALGLEICHUNGEN UNTERSCHIEDEN

Lineare Differenzialgleichungen, um die es in [Kapitel 8](#) geht, beinhalten nur Ableitungen von y und Terme von y in der ersten Potenz, keine höheren Potenzen. (**Hinweis:** Das ist die Potenz, in die die Ableitung *erhoben* wird, nicht die *Ordnung* der Ableitung.) Das folgende beispielsweise ist eine lineare Differenzialgleichung, weil sie nur Ableitungen in der ersten Potenz enthält:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = f(x)$$

Separierbare Differenzialgleichungen, die in [Kapitel 9](#) beschrieben sind, können so dargestellt werden, dass alle Terme mit x auf der einen, alle Terme mit y auf der anderen Seite der Gleichung erscheinen. Ein Beispiel:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2 - y^2}$$

was nach ein paar Umformungen wie folgt geschrieben werden kann:

$$(2 - y^2)dy = x^2 dx$$

Exakte Differenzialgleichungen sind Differenzialgleichungen, für die Sie eine Funktion finden, deren partielle Ableitungen den Termen dieser bestimmten Differenzialgleichungen entsprechen. Informationen zu diesen Gleichungen finden Sie in [Kapitel 10](#).

HOMOGENE UND INHOMOGENE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN DEFINIEREN

Homogene und inhomogene Differenzialgleichungen, was das ist?

Homogene Differenzialgleichungen beinhalten nur Ableitungen von y

und Terme mit y , und sie werden gleich 0 gesetzt, wie im folgenden Beispiel gezeigt:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + x \frac{d^2 y}{dx^2} + y^2 = 0$$

Inhomogene Differenzialgleichungen sind dasselbe wie homogene Differenzialgleichungen, außer dass sie auf der rechten Seite Terme besitzen können, die nur x (und Konstanten) enthalten, wie im folgenden Beispiel gezeigt:

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + x \frac{d^2 y}{dx^2} + y^2 = 6x + 3$$

Sie können inhomogene Differenzialgleichungen auch im folgenden Format darstellen: $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$. Die allgemeine Lösung für diese inhomogene Differenzialgleichung lautet:

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$

Bei dieser Lösung ist $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ die allgemeine Lösung der entsprechenden homogenen Differenzialgleichung:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Und $y_p(x)$ ist eine spezielle Lösung für die inhomogene Gleichung.



Steven Holzner und Timm Sigg

Differenzialgleichungen

für
dummies[®]

2. Auflage

Übersetzung aus dem Amerikanischen
von Judith Muhr

*Fachkorrektur von Dr. Marianne
Hammer-Altmann und Katrin Jost*

WILEY

WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA

Differenzialgleichungen für Dummies

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

2. Auflage 2018

© 2018 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

Original English language edition © 2008 by Wiley Publishing, Inc. All rights reserved including the right of reproduction in whole or in part in any form. This translation published by arrangement with John Wiley and Sons, Inc.

Copyright der englischsprachigen Originalausgabe © 2008 by Wiley Publishing, Inc. Alle Rechte vorbehalten inklusive des Rechtes auf Reproduktion im Ganzen oder in Teilen und in jeglicher Form. Diese Übersetzung wird mit Genehmigung von John Wiley and Sons, Inc. publiziert.

Wiley, the Wiley logo, Für Dummies, the Dummies Man logo, and related trademarks and trade dress are trademarks or registered trademarks of John Wiley & Sons, Inc. and/or its affiliates, in the United States and other countries. Used by permission.

Wiley, die Bezeichnung »Für Dummies«, das Dummies-Mann-Logo und darauf bezogene Gestaltungen sind Marken oder eingetragene Marken von John Wiley & Sons, Inc., USA, Deutschland und in anderen Ländern.

Das vorliegende Werk wurde sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren und Verlag für die

Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen
sowie eventuelle Druckfehler keine Haftung.

Coverfoto: Dieter Hawlan/stock.adobe.com

Dudenkorrektur: Claudia Lötschert

Print ISBN: 978-3-527-71558-9

ePub ISBN: 978-3-527-81941-6

Inhaltsverzeichnis

Cover

Titelblatt

Impressum

Einleitung

Über dieses Buch

Konventionen in diesem Buch

Was Sie nicht lesen müssen

Törichte Annahmen über den Leser

Wie dieses Buch aufgebaut ist

Symbole, die in diesem Buch verwendet werden

Wie es weitergeht

Teil I: Was Sie alles brauchen - die Zutaten

Kapitel 1: Differenzieren - die wichtigste Tätigkeit in diesem Buch

Was ist denn eine Ableitung?

Ableitungen der elementaren Funktionen

Ableitungsregeln

Kapitel 2: Integrieren - genauso wichtig wie das Differenzieren

Unbestimmtes Integral

Bestimmtes Integral

Drei Methoden, mit denen Sie (fast) jedes Integral knacken

Kapitel 3: Komplexe Zahlen? Ja! Komplexe Sache? Nein!

Was sind komplexe Zahlen?

Die drei Darstellungen

Umrechnung der Darstellungen

Rechnen mit komplexen Zahlen

Kapitel 4: Matrizen und nicht Matrizen

Grundlegendes zu den Matrizen

Rechnen mit Matrizen

Determinante

Inverse Matrix

Kapitel 5: Eigenwertprobleme sind keine Probleme

Was sind Eigenwertprobleme, wenn es keine Probleme sind?

Berechnung der Eigenwerte

Berechnung von Eigenvektoren

Teil II: Es wird spannend - Differenzialgleichungen erster Ordnung

Kapitel 6: Was sind Differenzialgleichungen?

Ableitungen, Steigungen, Krümmungen

Differenzialgleichungen - Anfangswertprobleme - Randwertprobleme

Differenzialgleichungssysteme

Kapitel 7: Für jede Differenzialgleichung eine passende Schublade

Differenzialgleichungen klassifizieren

Differenzialgleichungssysteme klassifizieren

Kapitel 8: Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung

Grundlagen für die Lösung linearer Differenzialgleichungen erster Ordnung

Das große Ganze mithilfe der Richtungsfelder erkennen

Lineare Differenzialgleichungen erster Ordnung mithilfe von Integrationsfaktoren lösen

Prüfen, ob eine Lösung für eine Differenzialgleichung erster Ordnung existiert

Feststellen, ob es eine Lösung für eine nichtlineare Differenzialgleichung gibt

Kapitel 9: Separierbare Differenzialgleichungen erster Ordnung

[Die Grundlagen separierbarer Differenzialgleichungen](#)

[Explizite Lösungen aus impliziten Lösungen ableiten](#)

[Einige separierbare Gleichungen aus der Praxis](#)

[Partialbrüche in separierbaren Gleichungen](#)

Kapitel 10: Exakte Differenzialgleichungen erster Ordnung und die Euler-Methode

[Grundlagen exakter Differenzialgleichungen](#)

[Exakte Differenzialgleichungen definieren](#)

[Feststellen, ob eine Differenzialgleichung exakt ist](#)

[Nicht exakte Differenzialgleichungen mit
Integrationsfaktoren bezwingen](#)

[Mit der Euler-Methode numerisch werden](#)

[Differenzengleichungen](#)

Teil III: Differenzialgleichungen höherer Ordnung und fortgeschrittene Techniken

Kapitel 11: Lineare Differenzialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

[Grundlegendes und Wissenswertes](#)

[Stufe 1: Die allgemeine Lösung der homogenen
Differenzialgleichung](#)

[Stufe 2: Die partikuläre Lösung der inhomogenen
Differenzialgleichung](#)

[Beispiele - Beispiele - Beispiele](#)

[Gleichungen mit der Methode der Parametervariation
lösen](#)

Kapitel 12: Es wird ernst: Potenzreihen und reguläre Punkte

[Grundlagen der Potenzreihen](#)

[Mit dem Quotientenkriterium die Konvergenz einer
Potenzreihe feststellen](#)

[Den Reihenindex verschieben](#)

[Taylor-Reihen](#)

[Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mithilfe von Potenzreihen lösen](#)

Kapitel 13: Singuläre Punkte

[Die Grundlagen singulärer Punkte](#)

[Erstaunliche Euler-Gleichungen](#)

[Reihenlösungen in der Nähe singulärer Punkte bestimmen](#)

[Die zweite Nullstelle einsetzen](#)

Kapitel 14: Laplace-Transformationen

[Eine typische Laplace-Transformation genauer betrachten](#)

[Entscheiden, wann eine Laplace-Transformation konvergiert](#)

[Grundlegende Laplace-Transformationen berechnen](#)

[Die Transformation von \$\sin\(at\)\$](#)

[Differenzialgleichungen mithilfe von Laplace-Transformation lösen](#)

[Laplace-Transformationen faktorisieren und Faltungsintegrale](#)

[Schrittfunktionen beobachten](#)

Kapitel 15: Drei ausfallsichere numerische Methoden

[Zahlenknacken mit der Euler-Methode](#)

[Die verbesserte Euler-Methode](#)

[Noch mehr Genauigkeit durch die Runge-Kutta-Methode](#)

Kapitel 16: Differenzialgleichungssysteme

[Die Metamorphose: Verwandlung in ein Differenzialgleichungssystem](#)

[Lösen von linearen homogenen](#)

[Differenzialgleichungssystemen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten](#)

Teil IV: Der Top-Ten-Teil

Kapitel 17: Zehn Dinge, die Sie über Differenzialgleichungen wissen MÜSSEN

[Nahe Verwandte](#)

[Die Erbanlage](#)
[Tage der Vernunft](#)
[Eulers Großeltern](#)
[Ein besonderer Acker](#)
[Typisch Mathematiker](#)
[Persönlichkeitsstörung](#)
[Exotische Vögel](#)
[Aufgaben der Bäume](#)
[Unerwartete Gemeinsamkeiten](#)

Stichwortverzeichnis

End User License Agreement

Illustrationsverzeichnis

Kapitel 1

[Abbildung 1.1: Schaubild einer Funktion mit Tangenten \(gestrichelte Geraden\) an verschiedene...](#)

[Abbildung 1.2: Schaubild der Funktion \$f\(x\) = |x|\$. In \$x = 0\$ kann wegen des Knicks nicht...](#)

Kapitel 3

[Abbildung 3.1: Schematische Darstellung, wie sprachlich formulierte reelle Probleme mithilfe...](#)

[Abbildung 3.2: Das ist sie, die gaußsche Zahlenebene.](#)

[Abbildung 3.3: Die komplexen Zahlen](#)

[z₁ = 2 + 3i, z₂ = -1 + i, z₃ = -3 und z₄ = -2i in der...](#)

[Abbildung 3.4: Zeigerdarstellung der komplexen Zahl \$z = 1 + 2i\$](#)

[Abbildung 3.5: Die komplexe Zahl \$z\$ in kartesischer Darstellung mit \$x\$ und \$y\$ und in Pol...](#)

[Abbildung 3.6: Eine komplexe Zahl \$z\$ und ihre konjugiert komplexe Zahl \$z^*\$](#)

[Abbildung 3.7: Die 3 Lösungen der Gleichung \$z^3 = 8\$ in Zeigerdarstellung](#)

Kapitel 6

[Abbildung 6.1: \$\dot{x}\(t\)\$ bei einer Zugfahrt mit konstanter Geschwindigkeit](#)

[Abbildung 6.2: \$x\(t\)\$ bei einer Zugfahrt mit konstanter Geschwindigkeit](#)

[Abbildung 6.3: \$\ddot{x}\(t\)\$ bei einer Zugfahrt mit konstanter Geschwindigkeit](#)

[Abbildung 6.4: \$\dot{x}\(t\)\$ bei einer Zugfahrt mit konstanter Beschleunigung](#)

[Abbildung 6.5: \$x\(t\)\$ bei einer Zugfahrt mit konstanter Beschleunigung](#)

[Abbildung 6.6: \$\ddot{x}\(t\)\$ bei einer Zugfahrt mit konstanter Beschleunigung](#)

[Abbildung 6.7: Die 3 Phasen von \$x\(t\)\$ bei Ihrer Zugfahrt](#)

[Abbildung 6.8: Die 3 Phasen von \$\dot{x}\(t\)\$ bei Ihrer Zugfahrt](#)

[Abbildung 6.9: Die 3 Phasen von \$\ddot{x}\(t\)\$ bei Ihrer Zugfahrt](#)

[Abbildung 6.10: Beispiel einer Funktionenschar der allgemeinen Lösung einer Differenzia...](#)

[Abbildung 6.11: Versuchsanordnung bei den gekoppelten Pendeln](#)

Kapitel 8

[Abbildung 8.1: Ein Richtungsfeld](#)

[Abbildung 8.2: Eine Lösung in einem Richtungsfeld](#)

[Abbildung 8.3: Ein Gleichgewichtswert in einem Richtungsfeld](#)

[Abbildung 8.4: Das Richtungsfeld für die allgemeine Lösung](#)

[Abbildung 8.5: Der Graph der allgemeinen Lösung](#)

[Abbildung 8.6: Das Richtungsfeld für eine aufwendigere Lösung](#)

[Abbildung 8.7: Der Graph einer aufwendigeren Lösung](#)

Kapitel 9

[Abbildung 9.1: Das Richtungsfeld einer nichtlinearen separierbaren Gleichung](#)

[Abbildung 9.2: Das Richtungsfeld einer separierbaren Gleichung mit Anfangsbed...](#)

[Abbildung 9.3: Ein Graph der Lösung einer separierbaren Gleichung mit Anfang...](#)

[Abbildung 9.4: Das Richtungsfeld einer separierbaren Gleichung mit einer schwer...](#)

[Abbildung 9.5: Das Richtungsfeld einer Lösung für das Flussproblem](#)

[Abbildung 9.6: Der Graph der Lösung eines Flussproblems](#)

Kapitel 10

[Abbildung 10.1: Die Euler-Methode in der Praxis](#)

Kapitel 14

[Abbildung 14.1: Die Schrittfunktion in Graphenform](#)

Tabellenverzeichnis

Kapitel 1

[Tabelle 1.1: Ableitungen der elementaren Funktionen](#)

Kapitel 2

[Tabelle 2.1: Stammfunktionen der elementaren Funktionen](#)

Kapitel 14

[Tabelle 14.1: Laplace-Transformationen gebräuchlicher Funktionen](#)

Einleitung

Für viele Lernende, die sich mit dem Thema Differenzialgleichungen beschäftigen, ist der einzige Kontakt zu diesem äußerst umfangreichen und interessanten Bereich der Mathematik ein 800 Seiten dickes, schweres Lehrbuch. Und meistens kämpfen sie sich recht lustlos durch diesen Riesenwälzer.

Hat wirklich nie jemand darüber nachgedacht, ein Buch über Differenzialgleichungen für den *Leser* zu schreiben? Aber ja doch – und genau deshalb liegt dieses Buch vor Ihnen.

Über dieses Buch

In *Differenzialgleichungen für Dummies* geht es um Differenzialgleichungen aus *Ihrer* Perspektive. Ich habe viele Studenten beobachtet, die sich auf die übliche Weise mit Differenzialgleichungen abkämpfen. Die meisten von ihnen sind sich einig: Sie wissen überhaupt nicht, womit sie so eine Strafe verdient haben.

Dieses Buch ist anders. Statt aus der Perspektive eines Lehrers ist es aus der Perspektive des Lesers geschrieben. Dieses Buch soll die wichtigen Dinge vermitteln, und *nur* die wichtigen Dinge. Auf alles Überflüssige wurde verzichtet, das heißt, die Dinge sind in aller Einfachheit und Klarheit dargestellt. In diesem Buch finden Sie Methoden, die Lehrern und Dozenten die Aufgabenlösung einfacher machen.

Sie können das Buch in beliebiger Reihenfolge durcharbeiten. Mit anderen Worten, es spielt keine Rolle, ob Sie von vorne nach hinten lesen. Wie andere *Dummies*-Bücher ist auch dieses Buch so aufgebaut, dass

Sie so viel wie möglich darin herumblättern können – es ist Ihr Buch, und die Differenzialgleichungen liegen Ihnen damit zu Füßen.

Konventionen in diesem Buch

Einige Bücher verwenden Dutzende von Konventionen, die Sie kennen müssen, bevor Sie überhaupt anfangen können, zu lesen. Hier ist das anders. Es gibt einige wenige einfache Konventionen, die Ihnen helfen, sich in diesem Buch zurechtzufinden:

- ✓ *Kursivschrift* kennzeichnet Definitionen und hebt wichtige Wörter hervor. Wie in der Welt der Mathematik üblich, werden auch Variablennamen kursiv dargestellt.
- ✓ *Kursivschrift* verwende ich aber auch bei betonten Wörtern, zum Beispiel
 - »Mama, ich will einen *Hund!*« (und nicht etwa eine Katze)
 - »Papa, ich will *einen* Hund!« (und nicht etwa zwei oder drei)
- ✓ **Fettschrift** kennzeichnet wichtige Sätze, Matrizen (Zahlenfelder), Schlüsselwörter in Aufzählungen sowie Aktionen in nummerierten Schritten.
- ✓ *Courierschrift* kennzeichnet Webadressen.

Beim Druck dieses Buchs mussten einige Webadressen auf zwei Textzeilen umbrochen werden. In diesen Fällen habe ich keine zusätzlichen Zeichen (wie etwa Trennstriche) eingefügt, um die Trennung zu kennzeichnen. Wenn Sie also eine dieser Webadressen

verwenden, geben Sie genau das ein, was in diesem Buch abgedruckt ist, und tun so, als ob es den Zeilenumbruch gar nicht gäbe.

Was Sie nicht lesen müssen

Im gesamten Buch habe ich immer wieder Informationen eingestreut, die interessant für Sie sein können, die aber keine Voraussetzung dafür sind, dass Sie bestimmte Aspekte der Differenzialgleichungen verstehen. Sie finden diese Informationen entweder in einem Einschub (ein grau unterlegtes Feld) oder mit dem Symbol »Achtung, Technik!« gekennzeichnet. Ich bin Ihnen nicht böse, wenn Sie diese Textstellen überblättern – wirklich nicht.

Törichte Annahmen über den Leser

Dieses Buch geht davon aus, dass Sie keine Erfahrung mit der Lösung von Differenzialgleichung mitbringen. Vielleicht sind Sie ein Schüler, der sich gerade neu in einen Kurs zu Differenzialgleichungen eingeschrieben hat, und brauchen ein bisschen zusätzliche Unterstützung, um alles zu verstehen. Vielleicht studieren Sie aber auch Physik, Chemie, Biologie, Wirtschaftswissenschaft oder Ingenieurwesen und benötigen Informationen zu Differenzialgleichungen, um Ihren Fachbereich besser zu verstehen.

Für die Arbeit mit Differenzialgleichungen brauchen Sie ein gewisses Vorwissen aus der Analysis. Sie sollten beispielsweise wissen, was eine Funktion ist und wie

elementare Funktionen aussehen. Wenn Sie davon keine Ahnung haben, empfehle ich Ihnen das Buch *Analysis für Dummies* von Mark Ryan (Wiley), bevor Sie dieses Buch lesen. Die beiden wichtigsten Fähigkeiten im Umgang mit Differenzialgleichungen sind das Differenzieren (Ableiten) und das Integrieren (Aufleiten). Diese werden zusammen mit den komplexen Zahlen und den wichtigsten Eigenschaften über Matrizen in [Teil I](#) ausführlich wiederholt. Dann dürfte nichts mehr schiefgehen.

Wie dieses Buch aufgebaut ist

Die Welt der Differenzialgleichungen ist wirklich riesig. Um dies zu berücksichtigen, habe ich das Thema in einzelne Teile zerlegt. Hier die verschiedenen Teile, die Ihnen in diesem Buch begegnen:

Teil I: Was Sie alles brauchen - die Zutaten

Ich beginne das Buch bewusst mit dem wichtigen Handwerkszeug, das Sie brauchen, um mit Differenzialgleichungen umgehen zu können. Dazu gehören in erster Linie die beiden Grundfertigkeiten Differenzieren und Integrieren. Womöglich sagen Sie nun, dass Sie das längst beherrschen. Umso besser. Dann können Sie hier zügig weiterblättern. Oder aber Sie vergewissern sich doch noch mal kurz, ob Sie die Sache mit den Stammfunktionen noch drauf haben. Das gilt auch für den Umgang mit komplexen Zahlen, die gleich im Anschluss vorgestellt werden. Der Teil schließt mit Matrizen und Eigenwertproblemen, da Sie diese

benötigen, wenn Sie Differenzialgleichungssysteme verstehen wollen.

Teil II: Es wird spannend - Differenzialgleichungen erster Ordnung

Nun geht es los mit den Differenzialgleichungen. In diesem Teil werden sie vorgestellt und klassifiziert. Dann widme ich mich den Differenzialgleichungen erster Ordnung – das heißt Differenzialgleichungen, die Ableitungen in der ersten Potenz enthalten. Sie lernen, wie Sie mit linearen Differenzialgleichungen erster Ordnung umgehen (*linear* bedeutet, dass die Ableitungen nicht quadratisch, kubisch usw. sind). Außerdem erfahren Sie, was mit separierbaren Differenzialgleichungen erster Ordnung zu tun ist: Diese können separiert werden, sodass nur Terme mit y auf der einen Seite und Terme mit x auf der anderen Seite vorkommen. In diesem Teil erfahren Sie schließlich auch, was exakte Differenzialgleichungen sind. Mithilfe dieser Gleichungen können Sie versuchen, eine Funktion zu finden, deren partielle Ableitungen den Termen in der Differenzialgleichung entsprechen (wodurch die Lösung der Gleichung sehr viel einfacher wird).

Teil III: Differenzialgleichungen höherer Ordnung und fortgeschrittene Techniken

In diesem Teil gehe ich einen Schritt weiter und erkläre Ihnen den Umgang mit Differenzialgleichungen höherer Ordnung. Ich unterteile die Gleichungen in zwei Haupttypen: lineare homogene Gleichungen und lineare inhomogene Gleichungen. Außerdem werden Sie zahlreiche interessante Techniken kennenlernen, die in

diesem Bereich eingesetzt werden können, wie etwa die Methode der unbestimmten Koeffizienten oder die Methode der Parametervariation. Aber damit nicht genug:

Einige Differenzialgleichungen sind schwieriger als andere. Ich zeige Ihnen die richtig schwierigen Brocken. Sie werden leistungsfähige Techniken kennenlernen, wie etwa Laplace-Transformationen und Reihenlösungen, und Sie fangen an, mit Differenzialgleichungssystemen zu arbeiten. Außerdem erfahren Sie, wie Sie numerische Methoden einsetzen, um Differenzialgleichungen zu lösen. Dies sind die Methoden für den letzten Ausweg, aber sie funktionieren fast immer.

Teil IV: Der Top-Ten-Teil

In allen *Dummies*-Büchern gibt es einen Top-Ten-Teil. Dieser Teil besteht aus knappen Auflistungen aller möglichen Dinge. In diesem Buch finden Sie zehn Onlineseminare zum Thema Differenzialgleichungen sowie zehn Onlinewerkzeuge für die Lösung von Differenzialgleichungen.

Symbole, die in diesem Buch verwendet werden

In den Randspalten dieses Buchs begegnen Ihnen immer wieder Symbole. Sie bedeuten Folgendes:



Dieses Symbol markiert Dinge, die Sie sich merken sollten, wie beispielsweise ein Gesetz für Differenzialgleichungen oder eine besonders interessante Gleichung.



Der Text neben diesem Symbol ist technischer Natur und für Insider vorgesehen. Sie müssen ihn nicht lesen, wenn Sie nicht wollen, aber wenn Sie Fachmann für Differenzialgleichungen werden wollen (und wer will das nicht?), sollten Sie einen Blick darauf werfen.



Dieses Symbol macht Sie auf hilfreiche Tipps bei der Lösung von Differenzialgleichungen aufmerksam. Wenn Sie nach Abkürzungen suchen, dann achten Sie unbedingt auf diese Symbole!



Wenn Sie dieses Symbol sehen, passen Sie gut auf! Es weist auf etwas besonders Kompliziertes hin, auf das Sie achten sollten.

Wie es weitergeht

Wenn Sie mutig sind, dann blättern Sie nun um!

Wenn Sie nicht so mutig sind, blättern Sie einfach auch um. Sie werden sehen, die nächste Seite ist noch ganz harmlos. Und die übernächste auch. Und die überübernächste? Die auch, und eh Sie sich's versehen, stecken Sie schon voll drin in der Welt der Differenzialgleichungen. Vielleicht haben Sie ja am Ende des Buchs nicht nur Lust, die eine oder andere Differenzialgleichung zu lösen, sondern auch mal eine selbst zu erfinden, um etwas aus *Ihrem* Leben damit zu beschreiben.

Teil I

Was Sie alles brauchen - die Zutaten



IN DIESEM TEIL...

Finden Sie die wichtigsten Elemente, die Sie benötigen, um Differenzialgleichungen zu verstehen und zu lösen.

Dazu gehört in erster Line das Differenzieren, man sagt auch Ableiten. Daher haben die Differenzialgleichungen schließlich ihren Namen.

Weiter geht's mit dem Gegenteil vom Ableiten, dem *Integrieren*, was im »wahren Leben« beliebig schwer sein kann, aber in diesem Buch nicht sein wird, da nur Integrale auftauchen werden, die man auch mit vernünftigem Aufwand lösen kann. Diese Fähigkeit wird benötigt, um Differenzialgleichungen zu lösen.

Wenn Sie mir bis hierher gefolgt sind, wovon ich natürlich fest ausgehe, dann haben Sie schon das nötige Rüstzeug für vielleicht zwei Drittel der Differenzialgleichungen, die in diesem Buch auftauchen werden. Für das letzte Drittel brauchen Sie aber unbedingt noch die *komplexen Zahlen*. Diese folgen gleich im Anschluss.

Die Kapitel über *Matrizen und Eigenwert-Probleme* habe ich angefügt, damit Sie auch *Differenzialgleichungssysteme* verstehen können. Viele Differenzialgleichungen tauchen nämlich nicht alleine auf, sondern im Verbund mit anderen.

Kapitel 1

Differenzieren - die wichtigste Tätigkeit in diesem Buch

IN DIESEM KAPITEL

Erkennen, wo's steil rauf geht oder sanft runter
Krümmungen verfolgen
Regeln beherzigen
Jede Funktion ableiten können - jede? - Ja, jede, ohne Ausnahme!

Stellen Sie sich mal vor, Sie wollten etwas über Skispringen erfahren und wüssten nicht, was Skier sind. Gut, Sie könnten sagen, das Springen ist auch wichtig. Stimmt, aber ohne Skier springt sich's deutlich anders. So ähnlich ist es hier auch. Wenn Sie Differenzialgleichungen kennenlernen wollen, müssen Sie wissen, was Differenzieren (auf Deutsch: Ableiten) ist. Und genau das lernen (oder wiederholen?) Sie in diesem Kapitel. Sie werden alles differenzieren, was nicht niet- und nagelfest ist!

Was, das können Sie schon längst? Dann ab zum nächsten Kapitel! Oder besser, dieses Kapitel kurz überfliegen, ob auch wirklich alle Ableitungsregeln noch sitzen, denn ohne diese ist bei den Differenzialgleichungen kein Blumentopf zu gewinnen.

Was ist denn eine Ableitung?

Keine Angst, ich werde Sie nicht mit Herleitungen über Differenzen- und Differenzialquotienten belästigen; ich möchte nur, dass Ihnen erstens klar ist, was man unter der Ableitung einer Funktion an einer bestimmten Stelle versteht, und zweitens, dass Sie sich mit mir zusammen auf eine gemeinsame Schreibweise einigen.

Zur Ableitung als solcher:



Unter der *Ableitung* einer Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 versteht man die Steigung der Funktion an dieser Stelle.

Am besten stellt man sich die Steigung einer Funktion mithilfe der Steigung einer Hilfsgeraden (Tangenten) vor, die das Schaubild berührt (tangiert).

[Abbildung 1.1](#) soll den Ableitungsbegriff veranschaulichen. An verschiedenen Stellen der Funktion können Sie verschiedene Steigungen der Tangenten und damit die Werte der entsprechenden Ableitungen erkennen.

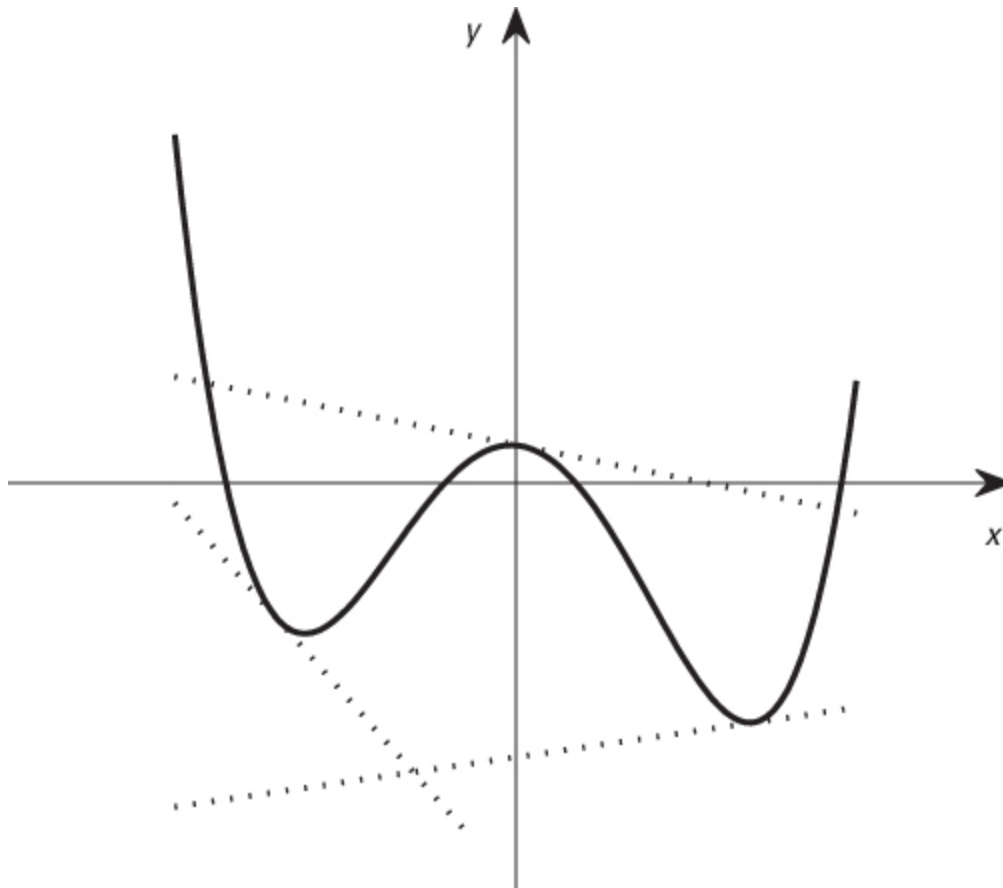


Abbildung 1.1: Schaubild einer Funktion mit Tangenten (gestrichelte Geraden) an verschiedenen Stellen



Es gibt zwei wichtige Ausnahmen, in denen nicht abgeleitet werden kann:

- ✓ Ist die Funktion an einer Stelle *nicht definiert*, so kann sie dort natürlich auch nicht abgeleitet werden.
- ✓ Hat die Funktion an einer Stelle einen *Knick*, so kann sie dort auch nicht abgeleitet werden. Schauen Sie sich dazu die Funktion $f(x) = |x|$ in [Abbildung 1.2](#) an. An der Stelle $x = 0$ kann hier nicht eindeutig eine Tangente angelegt werden:

Nähert man sich dem Wert $x = 0$ von links, so müsste die Tangente $y = -x$ angelegt werden.

Nähert man sich hingegen dem Wert $x = 0$ von rechts, so müsste man die Tangente $y = x$ wählen.

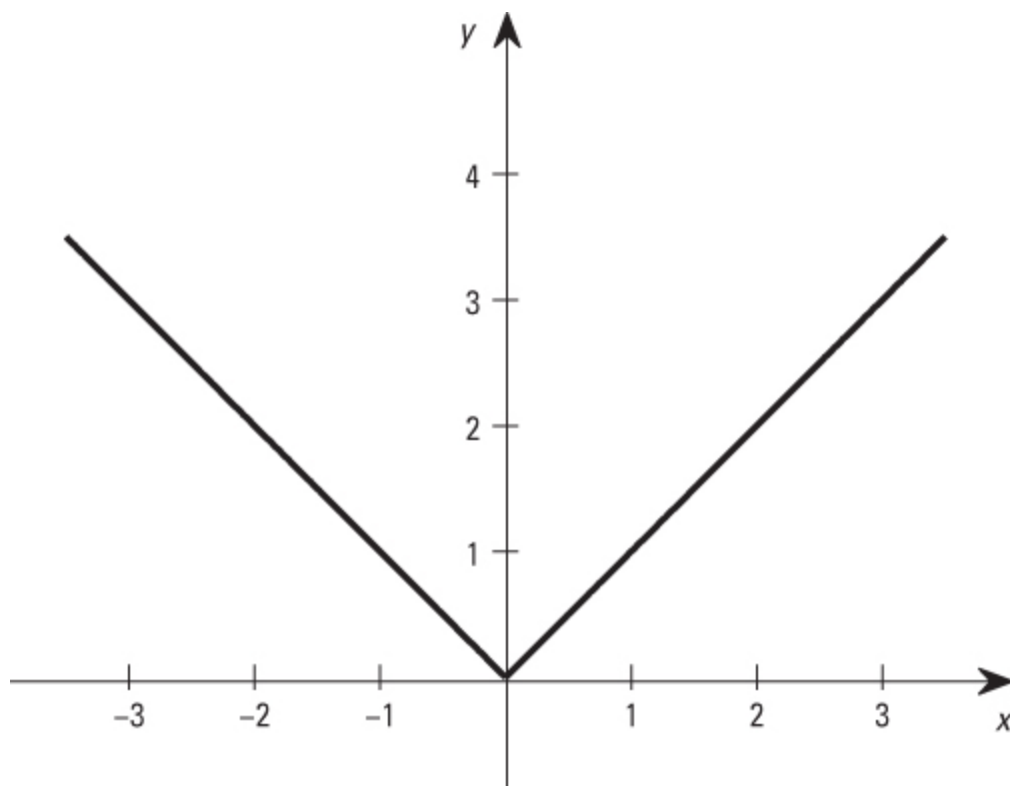


Abbildung 1.2: Schaubild der Funktion $f(x) = |x|$. In $x = 0$ kann wegen des Knicks nicht abgeleitet werden.

Schreibweisen der ersten Ableitung

Für die Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ als Ganzes wird häufig eine der beiden Schreibweisen:

$f'(x)$ (sprich: f Strich von x) beziehungsweise $y'(x)$ (sprich: y Strich von x)

oder

$\frac{df}{dx}$ (sprich: df nach dx)

verwendet. Beide Schreibweisen sagen das Gleiche aus.

Ist speziell die Ableitung einer Funktion an einer bestimmten Stelle (sei diese x_0) gemeint, so lauten die Schreibweisen entsprechend:

$f'(x_0)$ (sprich: f Strich von x_0) beziehungsweise $y'(x_0)$ (sprich: y Strich von x_0)

oder

$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$ (sprich: df nach dx an der Stelle $x = x_0$).

Schreibweise der höheren Ableitungen

Da man eine Ableitung auch nochmals ableiten kann, brauchen Sie auch die Schreibweisen für höhere Ableitungen. Typischerweise werden folgende Schreibweisen verwendet:

$f''(x)$ (sprich: f 2 Strich von x), $f'''(x)$, usw.

allgemein:

$f^{(n)}(x)$ (sprich: f n Strich von x)

beziehungsweise

$y''(x)$ (sprich: y 2 Strich von x), $y'''(x)$, usw.

allgemein:

$y^{(n)}$ (sprich: y n Strich)

oder

$\frac{d^2 f}{dx^2}$ (sprich: $d^2 f$ nach dx Quadrat), $\frac{d^2 f}{dx^3}$, usw.

allgemein:

$\frac{d^n f}{dx^n}$ (sprich: dnf nach dx hoch n).

Damit können Sie sich nun an die ersten Ableitungen wagen.

Ableitungen der elementaren Funktionen

Ich mach's kurz! In [Tabelle 1.1](#) habe ich Ihnen die Ableitungen der elementaren Funktionen zusammengefasst.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$

Tabelle 1.1: Ableitungen der elementaren Funktionen

Die Ableitungen in den letzten vier Zeilen kann man auswendig lernen oder immer neben sich legen, aber die Ableitung von x^n müssen Sie sich etwas genauer anschauen. Sie gilt nämlich für alle reellen Zahlen n und nicht nur für die natürlichen Zahlen.

Ja, sie gilt sogar für $n = 0$:

$$f(x) = 1 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

Es folgen drei weitere Beispiele mit zunehmendem Schwierigkeitsgrad.

Erstes Beispiel:

Leiten Sie die Funktion $f(x) = x^5$ ab.

$n = 5$. Also folgt

$$f'(x) = nx^{n-1} = 5x^{5-1} = 5x^4.$$

Zweites Beispiel:

Leiten Sie die Funktion $f(x) = -\frac{1}{x}$ ab.

$n = -1$, denn $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Also folgt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Drittes Beispiel:

Leiten Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ab.

$n = \frac{1}{2}$, denn $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. Also folgt

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Wie Sie sehen, schlagen Sie, wenn x unter der Wurzel oder im Nenner steht, schematisch den folgenden Weg ein:

1. **Sie ersetzen die Wurzel- beziehungsweise Bruchschreibweise durch die Potenzschreibweise. Sie schreiben also beispielsweise statt**

$\sqrt[3]{x^5}$ den Ausdruck $x^{\frac{5}{3}}$

beziehungsweise statt

$\frac{1}{x^3}$ den Ausdruck x^{-3} .

2. **Sie leiten diesen Ausdruck (in Potenzschreibweise) ab.**

Die Regel lautet

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}.$$

Sie erhalten also beispielsweise