

The background of the book cover is black, featuring a purple pen diagonally across the center. Scattered around the pen are various green mathematical symbols and characters, including letters like 'A', 'T', 'O', 'X', 'H', 'I', 'K', 'L', 'M', 'N', 'P', 'Q', 'R', 'S', 'U', 'V', 'W', 'Y', 'Z', and numbers like '1', '2', '3', '4', '5', '6', '7', '8', '9', '0'. There are also some mathematical expressions like  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{7}{8}$ ,  $\frac{9}{10}$ ,  $\frac{11}{12}$ ,  $\frac{13}{14}$ ,  $\frac{15}{16}$ ,  $\frac{17}{18}$ ,  $\frac{19}{20}$ ,  $\frac{21}{22}$ ,  $\frac{23}{24}$ ,  $\frac{25}{26}$ ,  $\frac{27}{28}$ ,  $\frac{29}{30}$ ,  $\frac{31}{32}$ ,  $\frac{33}{34}$ ,  $\frac{35}{36}$ ,  $\frac{37}{38}$ ,  $\frac{39}{40}$ ,  $\frac{41}{42}$ ,  $\frac{43}{44}$ ,  $\frac{45}{46}$ ,  $\frac{47}{48}$ ,  $\frac{49}{50}$ ,  $\frac{51}{52}$ ,  $\frac{53}{54}$ ,  $\frac{55}{56}$ ,  $\frac{57}{58}$ ,  $\frac{59}{60}$ ,  $\frac{61}{62}$ ,  $\frac{63}{64}$ ,  $\frac{65}{66}$ ,  $\frac{67}{68}$ ,  $\frac{69}{70}$ ,  $\frac{71}{72}$ ,  $\frac{73}{74}$ ,  $\frac{75}{76}$ ,  $\frac{77}{78}$ ,  $\frac{79}{80}$ ,  $\frac{81}{82}$ ,  $\frac{83}{84}$ ,  $\frac{85}{86}$ ,  $\frac{87}{88}$ ,  $\frac{89}{90}$ ,  $\frac{91}{92}$ ,  $\frac{93}{94}$ ,  $\frac{95}{96}$ ,  $\frac{97}{98}$ ,  $\frac{99}{100}$ .

**FELIX  
KLEIN**

**VERGLEICHENDE  
BETRACHTUNGEN  
ÜBER NEUERE  
GEOMETRISCHE  
FORSCHUNGEN**

**Felix Klein**

# **Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen**

EAN 8596547070719

DigiCat, 2022

Contact: [DigiCat@okpublishing.info](mailto:DigiCat@okpublishing.info)



# INHALTSVERZEICHNIS

- §.1. Gruppen von räumlichen Transformationen. Hauptgruppe. Aufstellung eines allgemeinen Problems.
- §.2. Transformationsgruppen, von denen die eine die andere umfasst, werden nach einander adjungirt. Die verschiedenen Typen geometrischer Forschung und ihr gegenseitiges Verhältniss.
- §.3. Die projectivische Geometrie.
- §.4. Uebertragung durch Abbildung.
- §.5. Von der Willkürlichkeit in der Wahl des Raumelements. Das Hessesche Uebertragungsprincip. Die Liniengeometrie.
- §.6. Die Geometrie der reciproken Radien. Die Interpretation von  $x + iy$ .
- §.7. Erweiterungen des Vorangehenden. Lie's Kugelgeometrie.
- §.8. Aufzählung weiterer Methoden, denen eine Gruppe von Puncttransformationen zu Grunde liegt.
  - 1. Die Gruppe der rationalen Umformungen.
  - 2. Die Analysis situs.
  - 3. Die Gruppe aller Puncttransformationen.
- §.9. Von der Gruppe aller Berührungstransformationen.
- §.10. Ueber beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten.
  - 1. Die projectivische Behandlungsweise oder die moderne Algebra (Invariantentheorie).
  - 2. Die Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmaße.
  - 3. Die ebene Mannigfaltigkeit.
- Schlussbemerkungen.
- Fußnote

I. Ueber den Gegensatz der synthetischen und analytischen Richtung in der neueren Geometrie.

II. Trennung der heutigen Geometrie in Disciplinen.

III. Ueber den Werth räumlicher Anschauung.

IV. Ueber Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen.

V. Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.

VI. Liniengeometrie als Untersuchung einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmaße.

VII. Zur Interpretation der binären Formen.

**1872**

**Erlangen**

**Verlag von Andreas Deichert**

- §.1. Gruppen von räumlichen Transformationen. Hauptgruppe. Aufstellung eines allgemeinen Problems.
- §.2. Transformationsgruppen, von denen die eine die andere umfasst, werden nach einander adjungirt. Die verschiedenen Typen geometrischer Forschung und ihr gegenseitiges Verhältniss.
- §.3. Die projectivische Geometrie.
- §.4. Uebertragung durch Abbildung.
- §.5. Von der Willkürlichkeit in der Wahl des Raumelements. Das Hessesche Uebertragungsprincip. Die Liniengeometrie.
- §.6. Die Geometrie der reciproken Radien. Die Interpretation von  $x + iy$ .
- §.7. Erweiterungen des Vorangehenden. *Lies* Kugelgeometrie.
- §.8. Aufzählung weiterer Methoden, denen eine Gruppe von Puncttransformationen zu Grunde liegt.
  - 1. Die Gruppe der rationalen Umformungen.
  - 2. Die Analysis situs.
  - 3. Die Gruppe aller Puncttransformationen.

- §.9. Von der Gruppe aller Berührungstransformationen.
- §.10. Ueber beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten.
  - 1. Die projectivische Behandlungsweise oder die moderne Algebra (Invariantentheorie).
  - 2. Die Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmaße.
  - 3. Die ebene Mannigfaltigkeit.
- Schlussbemerkungen.
- Noten.
  - I. Ueber den Gegensatz der synthetischen und analytischen Richtung in der neueren Geometrie.
  - II. Trennung der heutigen Geometrie in Disciplinen.
  - III. Ueber den Werth räumlicher Anschauung.
  - IV. Ueber Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen.
  - V. Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.
  - VI. Liniengeometrie als Untersuchung einer Mannigfaltigkeit von constantem Krümmungsmaße.
  - VII. Zur Interpretation der binären Formen.

Unter den Leistungen der letzten fünfzig Jahre auf dem Gebiete der Geometrie nimmt die Ausbildung der *projectivischen*<sup>1</sup> *Geometrie* die erste Stelle ein. Wenn es anfänglich schien, als sollten die sogenannten metrischen

Beziehungen ihrer Behandlung nicht zugänglich sein, da sie beim Projiciren nicht ungeändert bleiben, so hat man in neuerer Zeit gelernt, auch sie vom projectivischen Standpuncte aufzufassen, so dass nun die projectivische Methode die gesammte Geometrie umspannt. Die metrischen Eigenschaften erscheinen in ihr nur nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Beziehungen derselben zu einem Fundamental-Gebilde, dem unendlich fernen Kugelkreise.

Vergleicht man mit der so allmählich gewonnenen Auffassungsweise der räumlichen Dinge die Vorstellungen der gewöhnlichen (elementaren) Geometrie, so entsteht die Frage nach einem allgemeinen Principe, nach welchem die beiden Methoden sich ausbilden konnten. Diese Frage erscheint um so wichtiger als sich neben die elementare und die projectivische Geometrie, ob auch minder entwickelt, eine Reihe anderer Methoden stellt, denen man dasselbe Recht selbständiger Existenz zugestehen muss. Dahin gehören die Geometrie der reciproken Radien, die Geometrie der rationalen Umformungen etc., wie sie in der Folge noch erwähnt und dargestellt werden sollen.

Wenn wir es im Nachstehenden unternehmen, ein solches Princip aufzustellen, so entwickeln wir wohl keinen eigentlich neuen Gedanken, sondern umgränzen nur klar und deutlich, was mehr oder minder bestimmt von Manchem gedacht worden ist. Aber es schien um so berechtigter, derartige zusammenfassende Betrachtungen zu publiciren, als die Geometrie, die doch ihrem Stoffe nach einheitlich ist, bei der raschen Entwicklung, die sie in der letzten Zeit genommen hat, nur zu sehr in eine Reihe von