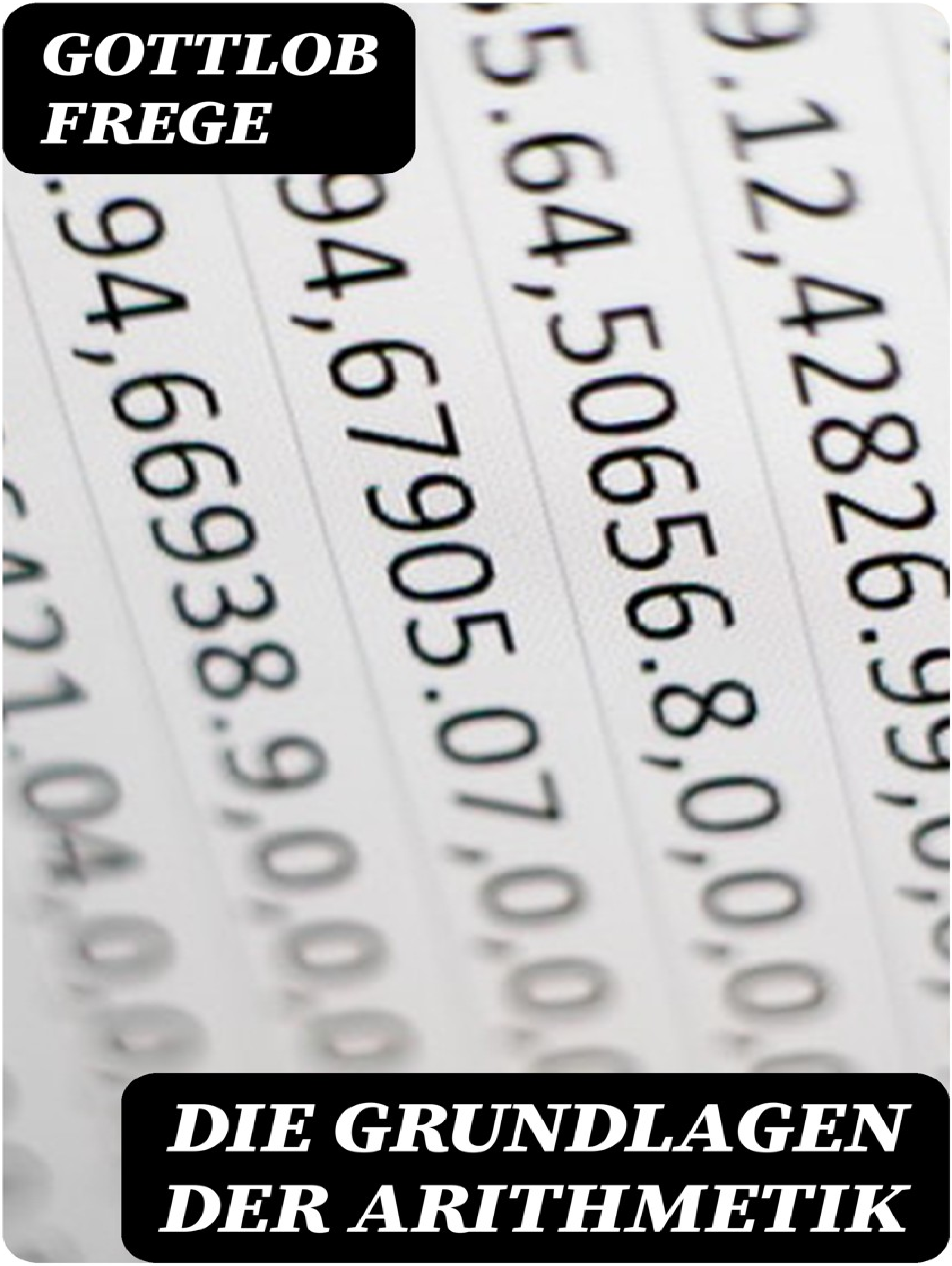
GOTTLOB FREGE



DIE GRUNDLAGEN DER ARITHMETIK

Gottlob Frege

Die Grundlagen der Arithmetik

Eine logische mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl

EAN 8596547068242

DigiCat, 2022
Contact: DigiCat@okpublishing.info

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.

Inhaltsverzeichnis

Auf die Frage, was die Zahl Eins sei, oder was das Zeichen 1 bedeute, wird man meistens die Antwort erhalten: nun, ein Ding. Und wenn man dann darauf aufmerksam macht, dass der Satz

»die Zahl Eins ist ein Ding«

keine Definition ist, weil auf der einen Seite der bestimmte Artikel, auf der andern der unbestimmte steht, dass er nur besagt, die Zahl Eins gehöre zu den Dingen, aber nicht, welches Ding sie sei, so wird man vielleicht aufgefordert, sich irgendein Ding zu wählen, das man Eins nennen wolle. Wenn aber Jeder das Recht hätte, unter diesem Namen zu verstehen, was er will, so würde derselbe Satz von der Eins für Verschiedene Verschiedenes bedeuten; es gäbe keinen gemeinsamen Inhalt solcher Sätze. Einige lehnen vielleicht die Frage mit dem Hinweise darauf ab, dass auch die Bedeutung des Buchstaben a in der Arithmetik nicht angegeben werden könne; und wenn man sage: a bedeutet eine Zahl, so könne hierin derselbe Fehler gefunden werden wie in der Definition: Eins ist ein Ding. Nun ist die Ablehnung der Frage in Bezug auf a ganz gerechtfertigt: es bedeutet keine bestimmte, angebbare Zahl, sondern dient dazu, die Allgemeinheit von Sätzen auszudrücken. Wenn man für a in a+a−a=a eine beliebige aber überall dieselbe Zahl setzt, so erhält man immer eine wahre Gleichung. In diesem Sinne wird der Buchstabe a gebraucht. Aber bei der Eins liegt die Sache doch wesentlich anders. Können wir in der Gleichung $1+1=2$ für 1 beidemal denselben Gegenstand, etwa den Mond setzen? Vielmehr scheint es, dass wir für die erste 1 etwas Anderes wie für die zweite setzen müssen. Woran liegt es, dass hier grade das geschehen muss, was in jenem Falle ein Fehler wäre? Die Arithmetik kommt mit dem Buchstaben a allein nicht aus, sondern muss noch andere b, c u. s. w. gebrauchen, um Beziehungen zwischen verschiedenen Zahlen allgemein auszudrücken. So sollte man denken, könnte auch das Zeichen 1 nicht genügen, wenn es in ähnlicher Weise dazu diente, den Sätzen eine Allgemeinheit zu verleihen. Aber erscheint nicht die Zahl Eins als bestimmter Gegenstand mit angebbaren Eigenschaften, z. B. mit sich selbst multiplicirt unverändert zu bleiben? In diesem Sinne kann man von a keine Eigenschaften angeben; denn was von a ausgesagt wird, ist eine gemeinsame Eigenschaft der Zahlen, während $1^1=1$ weder vom Monde etwas aussagt, noch von der Sonne, noch von der Sahara, noch vom Pic von Teneriffa; denn was könnte der Sinn einer solchen Aussage sein?

Auf solche Fragen werden wohl auch die meisten Mathematiker keine genügende Antwort bereit haben. Ist es nun nicht für die Wissenschaft beschämend, so im Unklaren über ihren nächstliegenden und scheinbar so einfachen Gegenstand zu sein? Um so weniger wird man sagen können, was Zahl sei. Wenn ein Begriff, der einer grossen Wissenschaft zu Grunde liegt, Schwierigkeiten darbietet, so ist es doch wohl eine unabweisbare Aufgabe, ihn genauer zu untersuchen und diese Schwierigkeiten zu überwinden, besonders da es schwer gelingen möchte, über die negativen, gebrochenen, complexen Zahlen zu voller Klarheit zu kommen, solange noch die Einsicht in die Grundlage des ganzen Baues der Arithmetik mangelhaft ist.

Viele werden das freilich nicht der Mühe werth achten. Dieser Begriff ist ja, wie sie meinen, in den Elementarbüchern hinreichend behandelt und damit für das ganze Leben abgethan. Wer glaubt denn über eine so einfache Sache noch etwas lernen zu können! Für so frei von jeder Schwierigkeit hält man den Begriff der positiven ganzen Zahl, dass er für Kinder wissenschaftlich erschöpfend behandelt werden könne, und dass Jeder ohne weiteres Nachdenken und ohne Bekanntschaft mit dem, was Andere gedacht haben, genau von ihm Bescheid wisse. So fehlt denn vielfach jene erste Vorbedingung des Lernens: das Wissen das Nichtwissens. Die Folge ist, dass man sich noch immer mit einer rohen Auffassung begnügt, obwohl schon *Herbart*[1] eine richtigere gelehrt hat. Es ist betrübend und entmuthigend, dass in dieser Weise eine Erkenntniss immer wieder verloren zu gehen droht, die schon errungen war, dass so manche Arbeit vergeblich zu werden scheint, weil man im eingebildeten Reichthume nicht nöthig zu haben glaubt, sich ihre Früchte anzueignen. Auch diese Arbeit, sehe ich wohl, ist solcher Gefahr ausgesetzt. Jene Roheit der Auffassung tritt mir entgegen, wenn das Rechnen aggregatives, mechanisches Denken genannt wird[2]. Ich bezweifle, dass es ein solches Denken überhaupt giebt. Aggregatives Vorstellen könnte man schon eher gelten lassen; aber es ist für das Rechnen ohne Bedeutung. Das Denken ist im Wesentlichen überall dasselbe: es kommen nicht je nach dem Gegenstande verschiedene Arten von

Denkgesetzen in Betracht. Die Unterschiede bestehen nur in der grösseren oder geringeren Rauheit und Unabhängigkeit von psychologischen Einflüssen und von äussern Hilfen des Denkens wie Sprache, Zahlzeichen und dgl., dann etwa noch in der Feinheit des Baues der Begriffe; aber grade in dieser Rücksicht möchte die Mathematik von keiner Wissenschaft, selbst der Philosophie nicht, übertroffen werden.

Man wird aus dieser Schrift ersehen können, dass auch ein scheinbar eigenthümlich mathematischer Schluss wie der von n auf n+1 auf den allgemeinen logischen Gesetzen beruht, dass es besondrer Gesetze des aggregativen Denkens nicht bedarf. Man kann freilich die Zahlzeichen mechanisch gebrauchen, wie man papageimässig sprechen kann; aber Denken möchte das doch kaum zu nennen sein. Es ist nur möglich, nachdem durch wirkliches Denken die mathematische Zeichensprache so ausgebildet ist, dass sie, wie man sagt, für einen denkt. Dies beweist nicht, dass die Zahlen in einer besonders mechanischen Weise, etwa wie Sandhaufen aus Quarzkörnern gebildet sind. Es liegt, denke ich, im Interesse der Mathematiker einer solchen Ansicht entgegenzutreten, welche einen hauptsächlichen Gegenstand ihrer Wissenschaft und damit diese selbst herabzusetzen geeignet ist. Aber auch bei Mathematikern findet man ganz ähnliche Aussprüche. Im Gegentheil wird man dem Zahlbegriffe einen feineren Bau zuerkennen müssen als den meisten Begriffen andrer Wissenschaften, obwohl er noch einer der einfachsten arithmetischen ist.

Um nun jenen Wahn zu widerlegen, dass in Bezug auf die positiven ganzen Zahlen eigentlich gar keine Schwierigkeiten obwalten, sondern allgemeine

Uebereinstimmung herrsche, schien es mir gut, einige Meinungen von Philosophen und Mathematikern über die hier in Betracht kommenden Fragen zu besprechen. Man wird sehn, wie wenig von Einklang zu finden ist, sodass geradezu entgegengesetzte Aussprüche vorkommen. Die Einen sagen z. B.: »die Einheiten sind einander gleich«, die Andern halten sie für verschieden, und beide haben Gründe für ihre Behauptung, die sich nicht kurzer Hand abweisen lassen. Hierdurch suche ich das Bedürfniss nach einer genaueren Untersuchung zu wecken. Zugleich will ich durch die vorausgeschickte Beleuchtung der von Andern ausgesprochenen Ansichten meiner eignen Auffassung den Boden ebnen, damit man sich vorweg überzeuge, dass jene andern Wege nicht zum Ziele führen, und dass meine Meinung nicht eine von vielen gleichberechtigten ist; und so hoffe ich die Frage wenigstens in der Hauptsache endgiltig zu entscheiden.

Freilich sind meine Ausführungen hierdurch wohl philosophischer geworden, als vielen Mathematikern angemessen scheinen mag; aber eine gründliche Untersuchung des Zahlbegriffes wird immer etwas philosophisch ausfallen müssen. Diese Aufgabe ist der Mathematik und Philosophie gemeinsam.

Wenn das Zusammenarbeiten dieser Wissenschaften trotz mancher Anläufe von beiden Seiten nicht ein so gedeihliches ist, wie es zu wünschen und wohl auch möglich wäre, so liegt das, wie mir scheint, an dem Ueberwiegen psychologischer Betrachtungsweisen in der Philosophie, die selbst in die Logik eindringen. Mit dieser Richtung hat die Mathematik gar keine Berührungspunkte, und daraus erklärt sich leicht die Abneigung vieler Mathematiker gegen philosophische Betrachtungen. Wenn z. B. *Stricker*[3] die Vorstellungen der Zahlen motorisch, von Muskelgefühlen abhängig nennt, so kann der Mathematiker seine Zahlen darin nicht wiedererkennen und weiss mit einem solchen Satze nichts anzufangen. Eine Arithmetik, die auf Muskelgefühle gegründet wäre, würde gewiss recht gefühlvoll, aber auch ebenso verschwommen ausfallen wie diese Grundlage. Nein, mit Gefühlen hat die Arithmetik gar nichts zu schaffen. Ebensowenig mit innern Bildern, die aus Spuren früherer Sinneseindrücke zusammengeflossen sind. Das Schwankende und Unbestimmte, welches alle diese Gestaltungen haben, steht im starken Gegensatze zu der Bestimmtheit und Festigkeit der mathematischen Begriffe und Gegenstände. Es mag ja von Nutzen sein, die Vorstellungen und deren Wechsel zu betrachten, die beim mathematischen Denken vorkommen; aber die Psychologie bilde sich nicht ein, zur Begründung der Arithmetik irgendetwas beitragen zu können. Dem Mathematiker als solchem sind diese innern Bilder, ihre Entstehung und Veränderung gleichgiltig. *Stricker* sagt selbst, dass er sich beim Worte »Hundert« weiter nichts vorstellt als das Zeichen 100. Andere mögen sich den Buchstaben C oder sonst etwas vorstellen; geht daraus nicht hervor, dass diese innern Bilder in unserm Falle für das Wesen der Sache vollkommen gleichgiltig und zufällig sind, ebenso zufällig wie eine schwarze Tafel und ein Stück Kreide, dass sie überhaupt nicht Vorstellungen der Zahl Hundert zu heissen verdienen? Man sehe doch nicht das Wesen der Sache in solchen Vorstellungen! Man nehme nicht die Beschreibung, wie eine Vorstellung entsteht, für eine Definition und nicht die Angabe der seelischen und leiblichen Bedingungen dafür, dass uns ein Satz zum Bewusstsein kommt, für einen Beweis und verwechsele das Gedachtwerden eines Satzes nicht mit seiner Wahrheit! Man muss, wie es scheint, daran erinnern, dass ein Satz ebensowenig aufhört, wahr zu sein, wenn ich nicht mehr an ihn denke, wie die Sonne vernichtet wird, wenn ich die Augen schliesse. Sonst kommen wir noch dahin, dass man beim Beweise des pythagoräischen Lehrsatzes es nöthig findet, des Phosphorgehaltes unseres Gehirnes zu gedenken, und dass ein Astronom sich scheut, seine Schlüsse auf längst vergangene Zeiten zu erstrecken, damit man ihm nicht einwende: »du rechnest da 2∙2=4; aber die Zahlvorstellung hat ja eine Entwickelung, eine Geschichte! Man kann zweifeln, ob sie damals schon so weit war. Woher weisst du, dass in jener Vergangenheit dieser Satz schon bestand? Könnten die damals lebenden Wesen nicht den Satz 2∙2=5 gehabt haben, aus dem sich erst durch natürliche Züchtung im Kampf ums Dasein der Satz 2∙2=4 entwickelt hat, der seinerseits vielleicht dazu bestimmt ist, auf demselben Wege sich zu 2∙2=3 fortzubilden?« Est modus in rebus, sunt certi denique fines! Die geschichtliche Betrachtungsweise, die das Werden der Dinge zu belauschen und aus dem Werden ihr Wesen zu erkennen sucht, hat gewiss eine grosse Berechtigung; aber sie hat auch ihre Grenzen. Wenn in dem beständigen Flusse aller Dinge nichts Festes, Ewiges beharrte, würde die Erkennbarkeit der Welt aufhören und Alles in Verwirrung stürzen. Man denkt sich, wie es scheint, dass die Begriffe in der einzelnen Seele so entstehen, wie die Blätter an den

Bäumen und meint ihr Wesen dadurch erkennen zu können, dass man ihrer Entstehung nachforscht und sie aus der Natur der menschlichen Seele psychologisch zu erklären sucht. Aber diese Auffassung zieht Alles ins Subjective und hebt, bis ans Ende verfolgt, die Wahrheit auf. Was man Geschichte der Begriffe nennt, ist wohl entweder eine Geschichte unserer Erkenntniss der Begriffe oder der Bedeutungen der Wörter. Durch grosse geistige Arbeit, die Jahrhunderte hindurch andauern kann, gelingt es oft erst, einen Begriff in seiner Reinheit zu erkennen, ihn aus den fremden Umhüllungen herauszuschälen, die ihn dem geistigen Auge verbargen. Was soll man nun dazu sagen, wenn jemand, statt diese Arbeit, wo sie noch nicht vollendet scheint, fortzusetzen, sie für nichts achtet, in die Kinderstube geht oder sich in ältesten erdenkbaren Entwickelungsstufen der Menschheit zurückversetzt, um dort wie *J. St. Mill* etwa eine Pfefferkuchen- oder Kieselsteinarithmetik zu entdecken! Es fehlt nur noch, dem Wohlgeschmacke des Kuchens eine besondere Bedeutung für den Zahlbegriff zuzuschreiben. Dies ist doch das grade Gegentheil eines vernünftigen Verfahrens und jedenfalls so unmathematisch wie möglich. Kein Wunder, dass die Mathematiker nichts davon wissen wollen! Statt eine besondere Reinheit der Begriffe da zu finden, wo man ihrer Quelle nahe zu sein glaubt, sieht man Alles verschwommen und ungesondert wie durch einen Nebel. Es ist so, als ob jemand, um Amerika kennen zu lernen, sich in die Lage des Columbus zurückversetzen wollte, als er den ersten zweifelhaften Schimmer seines vermeintlichen Indiens erblickte. Freilich beweist ein solcher Vergleich nichts; aber er verdeutlicht hoffentlich meine Meinung. Es kann ja sein, dass die Geschichte der Entdeckungen in vielen Fällen als Vorbereitung für weitere Forschungen nützlich ist; aber sie darf nicht an deren Stelle treten wollen.

Dem Mathematiker gegenüber, wäre eine Bekämpfung solcher Auffassungen wohl kaum nöthig gewesen; aber da ich auch für die Philosophen die behandelten Streitfragen möglichst zum Austrage bringen wollte, war ich genöthigt, mich auf die Psychologie ein wenig einzulassen, wenn auch nur, um ihren Einbruch in die Mathematik zurückzuweisen.

Uebrigens kommen auch in mathematischen Lehrbüchern psychologische Wendungen vor. Wenn man eine Verpflichtung fühlt, eine Definition zu geben, ohne es zu können, so will man wenigstens die Weise beschreiben, wie man zu dem betreffenden Gegenstande oder Begriffe kommt. Man erkennt diesen Fall leicht daran, dass im weitern Verlaufe nie mehr auf eine solche Erklärung zurückgegriffen wird. Für Lehrzwecke ist eine Hinführung auf die Sache auch ganz am Platze; nur sollte man sie von einer Definition immer deutlich unterscheiden. Dass auch Mathematiker Beweisgründe mit innern oder äussern Bedingungen der Führung eines Beweises verwechseln können, dafür liefert E. *Schröder*[4] ein ergötzliches Beispiel, indem er unter der Ueberschrift: »Einziges Axiom« Folgendes darbietet: »Das gedachte Princip könnte wohl das Axiom der Inhärenz der Zeichen genannt werden. Es giebt uns die Gewissheit, dass bei allen unsern Entwicklungen und Schlussfolgerungen die Zeichen in unserer Erinnerung – noch fester aber am Papiere – haften« u. s. w.

So sehr sich nun die Mathematik jede Beihilfe vonseiten der Psychologie verbitten muss, so wenig kann sie ihren engen Zusammenhang mit der Logik verleugnen. Ja, ich stimme der Ansicht derjenigen bei, die eine scharfe Trennung für unthunlich halten. Soviel wird man zugeben, dass jede Untersuchung über die Bündigkeit einer Beweisführung oder die Berechtigung einer Definition logisch sein muss. Solche Fragen sind aber gar nicht von der Mathematik abzuweisen, da nur durch ihre Beantwortung die nöthige Sicherheit erreichbar ist.

Auch in dieser Richtung gehe ich freilich etwas über das Uebliche hinaus. Die meisten Mathematiker sind bei Untersuchungen ähnlicher Art zufrieden, dem unmittelbaren Bedürfnisse genügt zu haben. Wenn sich eine Definition willig zu den Beweisen hergiebt, wenn man nirgends auf Widersprüche stösst, wenn sich Zusammenhänge zwischen scheinbar entlegnen Sachen erkennen lassen und wenn sich dadurch eine höhere Ordnung und Gesetzmässigkeit ergiebt, so pflegt man die Definition für genügend gesichert zu halten und fragt wenig nach ihrer logischen Rechtfertigung. Dies Verfahren hat jedenfalls das Gute, dass man nicht leicht das Ziel gänzlich verfehlt. Auch ich meine, dass die Definitionen sich durch ihre Fruchtbarkeit bewähren müssen, durch die Möglichkeit, Beweise mit ihnen zu führen. Aber es ist wohl zu beachten, dass die Strenge der Beweisführung ein Schein bleibt, mag auch die Schlusskette lückenlos sein, wenn die Definitionen nur nachträglich dadurch gerechtfertigt werden, dass man auf keinen Widerspruch gestossen ist. So hat man im Grunde immer nur eine erfahrungsmässige Sicherheit erlangt und muss eigentlich darauf gefasst sein, zuletzt doch noch einen Widerspruch anzutreffen, der das ganze Gebäude zum Einsturze bringt. Darum glaubte ich etwas weiter auf die allgemeinen logischen Grundlagen zurückgehn zu müssen, als vielleicht von den meisten Mathematikern für nöthig gehalten wird.

Als Grundsätze habe ich in dieser Untersuchung folgende festgehalten:

es ist das Psychologische von dem Logischen, das Subjective von dem Objectiven scharf zu trennen;

nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhange, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden;

der Unterschied zwischen Begriff und Gegenstand ist im Auge zu behalten.

Um das Erste zu befolgen, habe ich das Wort »Vorstellung« immer im psychologischen Sinne gebraucht und die Vorstellungen von den Begriffen und Gegenständen unterschieden. Wenn man den zweiten Grundsatz unbeachtet lässt, ist man fast genöthigt, als Bedeutung der Wörter innere Bilder oder Thaten der einzelnen Seele zu nehmen und damit auch gegen den ersten zu verstossen. Was den dritten Punkt betrifft, so ist es nur Schein, wenn man meint, einen Begriff zum Gegenstande machen zu können, ohne ihn zu verändern. Von hieraus ergiebt sich die Unhaltbarkeit einer verbreiteten formalen Theorie der Brüche, negativen Zahlen u. s. w. Wie ich die Verbesserung denke, kann ich in dieser Schrift nur andeuten. Es wird in allen diesen Fällen wie bei den positiven ganzen Zahlen darauf ankommen, den Sinn einer Gleichung festzustellen.

Meine Ergebnisse werden, denke ich, wenigstens in der Hauptsache die Zustimmung der Mathematiker finden, welche sich die Mühe nehmen, meine Gründe in Betracht zu ziehn. Sie scheinen mir in der Luft zu liegen und einzeln sind sie vielleicht schon alle wenigstens annähernd ausgesprochen worden; aber in diesem Zusammenhange mit einander möchten sie doch neu sein. Ich habe mich manchmal gewundert, dass Darstellungen, die in Einem Punkte meiner Auffassung so nahe kommen, in andern so stark abweichen.

Die Aufnahme bei den Philosophen wird je nach dem Standpunkte verschieden sein, am schlechtesten wohl bei jenen Empirikern, die als ursprüngliche Schlussweise nur die Induction anerkennen wollen und auch diese nicht einmal als Schlussweise, sondern als Gewöhnung. Vielleicht unterzieht Einer oder der Andere bei dieser Gelegenheit die Grundlagen seiner Erkenntnisstheorie einer erneueten Prüfung. Denen, welche etwa meine Definitionen für unnatürlich erklären möchten, gebe ich zu bedenken, dass die Frage hier nicht ist, ob natürlich, sondern ob den Kern der Sache treffend und logisch einwurfsfrei.

Ich gebe mich der Hoffnung hin, dass bei vorurtheilsloser Prüfung auch die Philosophen einiges Brauchbare in dieser Schrift finden werden.

---

§ 1. Nachdem die Mathematik sich eine Zeit lang von der euklidischen Strenge entfernt hatte, kehrt sie jetzt zu ihr zurück und strebt gar über sie hinaus. In der Arithmetik war schon infolge des indischen Ursprungs vieler ihrer Verfahrungsweisen und Begriffe eine laxere Denkweise hergebracht als in der von den Griechen vornehmlich ausgebildeten Geometrie. Sie wurde durch die Erfindung der höhern Analysis nur gefördert; denn einerseits stellten sich einer strengen Behandlung dieser Lehren erhebliche, fast unbesiegliche Schwierigkeiten entgegen, deren Ueberwindung andrerseits die darauf verwendeten Anstrengungen wenig lohnen zu wollen schien. Doch hat die weitere Entwickelung immer deutlicher gelehrt, dass in der Mathematik eine blos moralische Ueberzeugung, gestützt auf viele erfolgreiche Anwendungen, nicht genügt. Für Vieles wird jetzt ein Beweis gefordert, was früher für selbstverständlich galt. Die Grenzen der Giltigkeit sind erst dadurch in manchen Fällen festgestellt worden. Die Begriffe der Function, der Stetigkeit, der Grenze, des Unendlichen haben sich einer schärferen Bestimmung bedürftig gezeigt. Das Negative und die Irrationalzahl, welche längst in die Wissenschaft aufgenommen waren, haben sich einer genaueren Prüfung ihrer Berechtigung unterwerfen müssen.

So zeigt sich überall das Bestreben, streng zu beweisen, die Giltigkeitsgrenzen genau zu ziehen und, um dies zu können, die Begriffe scharf zu fassen.

§ 2. Dieser Weg muss im weitern Verfolge auf den Begriff der Anzahl und auf die von positiven ganzen Zahlen geltenden einfachsten Sätze führen, welche die Grundlage der ganzen Arithmetik bilden. Freilich sind Zahlformeln wie 5+7=12 und Gesetze wie das der Associativität bei der Addition durch die unzähligen Anwendungen, die tagtäglich von ihnen gemacht werden, so vielfach bestätigt, dass es fast lächerlich erscheinen kann, sie durch das Verlangen nach einem Beweise in Zweifel ziehen zu wollen. Aber es