Vom Zählstein zum Computer

Herausgegeben von
H.-W. Alten · A. Djafari Naini · H. Wesemüller-Kock
Institut für Mathematik und Angewandte Informatik
Zentrum für Fernstudium und Weiterbildung
Universität Hildesheim

In der Reihe „Vom Zählstein zum Computer"
sind bisher erschienen:

4000 Jahre Algebra
Alten, Djafari Naini, Folkerts, Schlosser, Schlote, Wußing
ISBN 978-3-540-43554-9

5000 Jahre Geometrie
Dritte Auflage
Scriba, Schreiber
ISBN 978-3-642-02361-3

6000 Jahre Mathematik
Wußing
ISBN 978-3-642-02363-7

Überblick und Biographien,
Hans Wußing et al. ISBN 978-3-88120-275-6
Vom Zählstein zum Computer – Altertum (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald ISBN 978-3-88120-236-7
Vom Zählstein zum Computer – Mittelalter (Videofilm),
H. Wesemüller-Kock und A. Gottwald

C.J. Scriba · P. Schreiber

5000 Jahre Geometrie

Geschichte
Kulturen
Menschen

Mit 240 Abbildungen, davon 62 in Farbe

Dritte Auflage

Springer

Professor Dr. Christoph J. Scriba
Fachbereich Mathematik
Schwerpunkt Geschichte der Naturwissenschaften
Mathematik und Technik
Universität Hamburg
Bundesstraße 55
20146 Hamburg
Deutschland
e-mail: scriba@math.uni-hamburg.de

Professor Dr. Peter Schreiber
Institut für Mathematik und Informatik
Ernst-Moritz-Arndt-Universität Greifswald
Friedrich-Ludwig-Jahn-Straße 15a
17487 Greifswald
Deutschland
e-mail: schreiber@mail.uni-greifswald.de

ISBN 978-3-642-02361-3 e-ISBN 978-3-642-02362-0
DOI 10.1007/978-3-642-02362-0
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 15-03, 01-99, 01A05

Einbandentwurf: deblik, Berlin
Satz: TEX-Satz durch Thomas Speck und Sylvia Voß

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort des Herausgebers

Geometrie (griechisch für Erdmessung) ist als Beschäftigung mit regelmäßigen Mustern, Figuren und Körpern neben dem Zählen eine der ersten Begegnungen von Menschen mit dem Aufbruch der Wissenschaft Mathematik. Spiralen auf Megalithgräbern, Ritzungen im Fels und Muster auf Tonscherben geben davon Zeugnis.

Wie sich aus diesen Anfängen in grauer Vorzeit im Laufe der Jahrtausende die Geometrie entwickelt hat – als unentbehrliches Hilfsmittel bei Hausbau und Feldmessung, als axiomatisch begründete Wissenschaft von ebenen und räumlichen Figuren bei den Griechen, als Grundlage astronomischer Beobachtungen und Berechnungen und dekorativer Kunst in der islamischen Welt und beim Bau christlicher Kathedralen im Mittelalter über die Entdeckung der Perspektive und ihre Anwendung in der Kunst der Renaissance, die Auseinandersetzungen über das Parallelenpostulat Euklids und die Entdeckung nichteuklidischer Geometrien im 19. Jh. bis hin zur Theorie unendlich-dimensionaler Räume und zur Computergrafik unserer Tage – all dies und viel, viel mehr kann man aus diesem Buch erfahren.

Es ist ein Band der von der Projektgruppe „Geschichte der Mathematik" der Universität Hildesheim herausgegebenen Reihe „Vom Zählstein zum Computer". In dieser Reihe sind im Springer Verlag ferner erschienen: „4000 Jahre Algebra" (Alten et al., 2003, korr. Nachdr. 2005) und „6000 Jahre Mathematik" (Wußing, 2 Bände 2008/09), im Verlag Franzbecker, Hildesheim, die Videofilme „Altertum" (1998) und „Mittelalter" (2004) von H. Wesemüller-Kock und Anne Gottwald. Nach mehreren Nachdrucken und der 2. Auflage 2004 erscheint nun „5000 Jahre Geometrie" in dritter Auflage, erweitert um neue Forschungsergebnisse über steinzeitliche Kreisgrabenanlagen und die Himmelsscheibe von Nebra sowie viele farbige Abbildungen.

In diesem Band wird die Entwicklung der Geometrie in fünf Jahrtausenden als Teil der Kulturgeschichte dargestellt. Den beiden Autoren ist es gelungen, die Entstehung und das Wachsen dieses Teilgebietes der oft als nüchtern und trocken verschrieenen Mathematik in ungemein lebendiger Art zu schildern, die Ursprünge und Anstöße zur Entwicklung geometrischer Begriffe und Methoden aufzudecken, ihre Verquickung mit historischen Ereignissen und persönlichen Schicksalen darzustellen, die Anwendungen geometrischer Kenntnisse und Verfahren in anderen Bereichen und daraus entstandene Wechselwirkungen zu beschreiben und ihre Bedeutung für andere Disziplinen herauszustellen.

Es ist ein besonderes Anliegen dieser Buchreihe, die Geschichte der Mathematik als Teil der Geschichte der Menschheit darzustellen, speziell als wesentlichen Teil ihrer Kulturgeschichte. Die beiden Autoren sind diesem Anliegen in hervorragender Weise gerecht geworden. Sie haben weit über das in mathematikhistorischen Darstellungen übliche Maß hinaus die Genese der Geometrie in ihrer engen Verflechtung mit den kulturellen Entwicklungen in anderen Bereichen – Literatur, Musik, Architektur, Baukunst, Bildende Kunst, Religion – aufgezeigt und auch die Auswirkungen geometrischer Erkenntnisse und Methoden auf diese Bereiche beschrieben. Aus diesem Grunde ist auch die Entwicklung der Geometrie in anderen Kulturen – vornehmlich in den orientalischen Kulturen der Antike, in den islamischen Ländern sowie in Indien, China, Japan und den altamerikanischen Kulturen ausführlicher als üblich behandelt worden. Tabellen am Anfang der Kapitel geben Einblick in wichtige politische und kulturelle Ereignisse der behandelten Kulturkreise bzw. Epochen, in Tabellen am Ende sind jeweils die wesentlichen Inhalte der darin entwickelten Geometrie stichwortartig zusammengefaßt.

Darüber hinaus werden Sichtweisen von Mathematikern des Altertums oder des Mittelalters mit mathematischen Erkenntnissen der Neuzeit verglichen und Bezüge zur zeitgenössischen Mathematik und verwandten Wissenschaften hergestellt, z.B. Bezüge zur Informatik in der Beschreibung der „algorithmischen Leistung" Euklids. Zum anderen werden die Spezifika geometrischer Betrachtung in verschiedenen Epochen und Kulturkreisen herausgestellt und der Wandel von Inhalten, Methoden und Betrachtungsweisen der Geometrie im Laufe der Jahrhunderte anschaulich beschrieben, etwa der Wandel der Geometrie als Protophysik im dreidimensionalen Raum zur Theorie n-dimensionaler oder gar unendlich-dimensionaler Räume. Die Zusammenhänge der Geometrie mit anderen Teilgebieten der Mathematik – z.B. mit Algebra, Analysis und Stochastik – werden erörtert. Erfrischende Einschübe mit biographischen Schlaglichtern und Hinweisen auf unerwartete Zusammenhänge sowie die Textauszüge im Anhang beleben die Lektüre dieses Buches.

Die Kapitel 1 bis 4 mit Ausnahme des Teilkapitels 2.3 (Euklid) stammen aus der Feder des Mathematikhistorikers Dr. Christoph J. Scriba, Professor em. für Geschichte der Naturwissenschaften im Schwerpunkt Geschichte der Naturwissenschaften, Mathematik und Technik des Fachbereichs Mathematik der Universität Hamburg. Die Leistungen Euklids und die Entwicklung der Geometrie in der Neuzeit in den Kapiteln 5 - 8 hat Dr. Peter Schreiber, Professor für Geometrie und Grundlagen der Mathematik an der Universität Greifswald, dargestellt.

Den Autoren sind auch Vorschläge für zahlreiche Abbildungen und die im Anhang wiedergegebenen Texte zu verdanken. Die ohne Quellenangabe eingefügten Figuren zu geometrischen Sätzen sind Eigenzeichnungen der Autoren. Von ihnen stammen auch die am Ende jedes Kapitels zusammengefaßten Aufgaben zu den einzelnen Teilkapiteln (vgl. Einleitung). Sie unterscheiden sich in Art und Umfang oft von herkömmlichen Aufgaben und sind auch von sehr unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad. Ihre Bearbeitung erfordert deshalb auch sehr unterschiedliche Vorkenntnisse, oft auch den Rückgriff auf andere Literatur. So reichen für die Bearbeitung der Aufgaben zu den Kapiteln 1 bis 4 oft die in der Mittelstufe der Gymnasien vermittelten Kenntnisse, für andere ist der Stoff der Oberstufe (Sek. II) erforderlich, während für manche Aufgaben der Kapitel 5 - 8 Begriffe und Methoden vonnöten sind, die erst während eines Studiums behandelt werden. Dies liegt in der Natur der Sache, da Mathematik im Laufe der Jahrhunderte immer komplexer und komplizierter geworden ist und das Verständnis moderner Mathematik meist die Kenntnis der Mathematik vorangegangener Epochen voraussetzt.

Deshalb finden sich gelegentlich im Text Lösungshinweise, oft auch Hinweise auf Lösungen in der Literatur. Die Lösungen sind jedoch nicht im Anhang aufgeführt, einerseits, um voreiliges Nachschlagen zu vermeiden, zum anderen, weil es sich meist nicht um Ergebnisse von Rechnungen, sondern um die Beschreibung von Lösungswegen oder den Nachvollzug mehr oder weniger ausführlich dargestellter Überlegungen handelt.

All dies ist bewußt geschehen, um einen möglichst großen Kreis von Leserinnen und Lesern anzusprechen. Auch eilige oder flüchtige Leser sollten die Aufgabenteile nicht einfach überschlagen, denn in ihnen finden sich viele interessante historische Bemerkungen und Ergänzungen zum Text, so daß schon das intensive Lesen des Aufgabentextes einen Gewinn darstellt.

Das von den Autoren erstellte umfangreiche Literaturverzeichnis und das Personenregister laden zu weitergehenden Studien ein.

Den beiden Autoren danke ich sehr herzlich für ihren vielfältigen und intensiven Einsatz, insbesondere für ihr Engagement, in diesem Buch durch Einbettung der Geometrie in die Kulturgeschichte und viele interessante Aufgaben Akzente zu setzen.

Für die Mitwirkung durch wissenschaftliche Begleitung und kritische Durchsicht der Texte danke ich den Kollegen Dauben, Flachsmeyer, Folkerts, Grattan-Guinness, Kahle, Lüneburg, Nádeník und Wußing, für die Beratung bei geschichtlichen Details dem Akad. Oberrat H. Mainzer und für die Umsetzung der Manuskripte, Abbildungen und Figuren zu druckfertigen Vorlagen auf dem Computer Lars-Detlef Hedde (U Greifswald), Thomas Speck und Sylvia Voß (U Hildesheim).

Der Medienpädagogin Anne Gottwald gilt mein Dank für ihren Einsatz bei der Klärung der Lizenzen für den Abdruck der Abbildungen, den jeweiligen Verlagen für die Gewährung der Rechte zum Abdruck.

Für die Unterstützung des Projekts danke ich dem Leiter des Zentrums für Fernstudium und Weiterbildung (ZFW), Prof. Dr. Erwin Wagner, den jeweiligen Leitern des Instituts für Mathematik und Angewandte Informatik, Prof.

Dr. Förster und Prof. Dr. Kreutzkamp, den Dekanen, Prof. Dr. Schwarzer und Prof. Dr. Ambrosi und der Leitung der Universität Hildesheim. Der Kreissparkasse Hildesheim und der Universitätsgesellschaft der Universität Hildesheim danke ich für ihre finanzielle Unterstützung zur Herausgabe der farbigen Abbildungen.
Nicht zuletzt gilt mein Dank den Mitgliedern der Projektgruppe „Geschichte der Mathematik“ vom ZFW: dem Mathematikhistoriker Dr. Alireza Djafari Naini und dem Medienexperten Dipl.-Soziologe Heiko Wesemüller-Kock für die gute und intensive Zusammenarbeit bei der Planung und Erstellung dieses Werkes. Dem Springer-Verlag Heidelberg danke ich für das Eingehen auf meine Wünsche und die hervorragende Ausstattung dieses Buches.

Möge auch dieser Band möglichst viele anregen, sich intensiver mit der Geschichte der Mathematik zu befassen, die Hintergründe für die Entstehung und die ungeheuer spannende Entwicklung geometrischer Begriffe und Methoden kennen zu lernen und dazu führen, Geometrie nicht nur als eine mathematische Disziplin oder als unentbehrliches Hilfsmittel für Architekten, Roboterkonstrukteure und Wissenschaftler anzusehen, sondern auch als wertvollen Teil unserer Kultur, der uns überall begegnet und die Welt, in der wir leben, ungemein reicher macht.

Im Namen der Projektgruppe
Hildesheim, im August 2009 Heinz-Wilhelm Alten

Hinweise für den Leser

Runde Klammern (. . .) enthalten ergänzende Einschübe oder Hinweise auf Abbildungen oder Aufgaben.

Eckige Klammern [. . .] enthalten im laufenden Text Hinweise auf Literatur bzw. unter Abbildungen Quellenangaben.

Abbildungen sind nach Teilkapiteln numeriert, z.B. bedeutet Abbildung 7.4.3 die dritte Abbildung in Teil 4 von Kapitel 7.

Aufgaben sind am Ende jedes Kapitels zusammengefaßt und nach Teilkapiteln numeriert, damit die zugehörigen Texte besser zu finden sind, z.B. bedeutet Aufgabe 7.3.6 die sechste Aufgabe zu Teil 3 von Kapitel 7.

Die Aufgaben sind von sehr unterschiedlichem Umfang und Schwierigkeitsgrad. Aufgaben bzw. Aufgabenteile, die dem Herausgeber besonders schwierig erschienen, sind mit einem $*$ versehen. Doch sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß jede solche Einschätzung selbstverständlich subjektiv und vom individuellen Stand der Kenntnisse und Fertigkeiten abhängig ist.

Hinweise im Text auf Bd. 1 beziehen sich auf „6000 Jahre Mathematik“, Bd. 1 „Von den Anfängen bis Leibniz und Newton“, von Hans Wußing, 2008.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Es ist sicher nicht leicht, Inhalt und Wesen der Mathematik in Kürze zu definieren. Formale Erklärungen, die heute mittels der Mengenlehre, des allgemeinen Strukturbegriffs und anderer Begriffe aus der Logik möglich sind, lassen sowohl die historische Entwicklung als auch den Instinkt und die Erfahrung des Mathematikers außer acht, der weiß, was „wesentlich“ bzw. „interessant“ ist und was nicht. Viel schwerer ist es aber, innerhalb eines als gegeben angenommenen Mathematikverständnisses zu erklären, was Geometrie ist und was folglich zu ihrer Geschichte gehört. Die jeweils herrschenden Ansichten sowohl über den Gegenstand der Geometrie als auch über ihre Stellung und Bedeutung innerhalb der Mathematik haben sich nicht nur im Lauf der Zeit mehrfach grundsätzlich geändert, sondern mit zunehmender Reife der Mathematik spalteten sich die Mathematiker an diesen Fragen in verschiedene Parteien. Über all dies wird im vorliegenden Buch zu berichten sein.

War Geometrie in den ältesten menschlichen Hochkulturen (Ägypten, Mesopotamien, Indien, China, ...) eines unter anderen Anwendungsgebieten einer vorwiegend rechnerisch ausgerichteten Mathematik, so wurde sie in der griechischen Antike zum Kern und Hauptgebiet der gesamten Mathematik. Hier vollzog sich der in der Geschichte einmalige Wandel von einer auf Rezepten und vagen Begriffen beruhenden Praxis zu einer aus Definitionen, Axiomen und streng logisch bewiesenen Lehrsätzen bestehenden Theorie. Das hiermit begründete Erbe war mehr als 2000 Jahre lang so mächtig, daß der Mathematiker meist als Geometer und die von den Griechen am Beispiel geometrischen Stoffes begründete axiomatisch-deduktive Methode der Erkenntnissicherung als „mos geometricus“ bezeichnet wurde. Andere Wissenschaften, darunter auch andere Gebiete der Mathematik, „more geometrico“, d.h. nach der Art der Geometrie, aufzubauen, wurde zum (nur selten erfüllten) wissenschaftstheoretischen Programm, an dem sich zum Beispiel Newton im 17 Jh. bei der Neubegründung der Mechanik, Galois zu Beginn des 19. Jhs. bei seiner Kritik am damaligen Zustand der Algebra und noch Hilbert im Jahre 1900 bei seiner Aufforderung orientierte, weitere Gebiete der Physik zu axiomatisieren.

Die europäische Renaissance brachte für die Geometrie vor allem eine außerordentliche Verbreiterung der Praxisbezüge (Astronomie, Geodäsie, Kartographie, Mechanik, Optik, bildende Kunst, ...) und damit eine Fülle neuer und fruchtbarer Probleme. Die Bemühungen um die Lösung dieser neuen Probleme trugen ganz wesentlich zur Entstehung der vier Säulen der modernen Mathematik im 17. Jh. bei: Funktionsbegriff, Koordinatenmethode, Differentialrechnung, Integralrechnung. Geometrie hat diese Gebiete hervorgebracht

C.J. Scriba, P. Schreiber, *5000 Jahre Geometrie*, Vom Zählstein zum Computer, 3rd ed.,
DOI 10.1007/978-3-642-02362-0_1,

und ist dann von ihnen auf eine ganz subtile Weise aus ihrer führenden Position in der Mathematik verdrängt worden. Formeln und Kalkül traten im 18. Jh. zunehmend an die Stelle von Anschauung und logischer Argumentation.

Dennoch brachte das 19. Jh. eine enorme Umfangs- und Bedeutungserweiterung der Geometrie: Projektive und n-dimensionale Geometrie, Vektorrechnung, nichteuklidische Geometrie, innere Differentialgeometrie, Topologie, aber auch viele Keime von sich erst im 20. Jh. voll entfaltenden Gebieten wie geometrische Wahrscheinlichkeits- und Maßtheorie, Graphentheorie, Polyedergeometrie entwickelten sich zunächst ohne erkennbaren Bezug zueinander. Diese „Explosion“ geometrischer Disziplinen, die dem 19. Jh. aus der Sicht der Mathematik die Bezeichnung als geometrisches Jahrhundert eingetragen hat, ging einher mit der Auflösung des bis dahin herrschenden Verständnisses der Geometrie als Wissenschaft vom „wahren physikalischen Raum“. Es wird darüber zu berichten sein, wie die verschiedenen Ansätze, die neue Situation der Geometrie geistig zu bewältigen, das Bild der gesamten Mathematik, wie es im 20. Jh. bis zum Vordringen des Computers herrschte, entscheidend geprägt haben, wie aber auch die Geometrie ihre Vormachtstellung in der ersten Hälfte des 20. Jhs. wieder verlor, eine Entwicklung, die in der Gestaltung des mathematischen Schul- wie Hochschulunterrichts bis heute negativ nachwirkt, obwohl die theoretische Breite und Tiefe ebenso wie die Praxisbedeutung der Geometrie inzwischen ein höheres Niveau als je zuvor erreicht haben.

Geometrie am Anfang des 21. Jahrhunderts — das ist einerseits ein riesiges Paket von Fakten über den „gewöhnlichen zwei- und dreidimensionalen euklidischen Raum“ nebst einem noch größeren Paket von ungelösten Fragen hierüber, andererseits aber ist Geometrie heute eigentlich überhaupt kein Teilgebiet der Mathematik im herkömmlichen Sinne sondern eine Betrachtungsweise, die mit mehr oder weniger Nutzen, mehr oder weniger Notwendigkeit und auch abhängig vom persönlichen Stil des Wissenschaftlers in fast jedem Teilgebiet der Mathematik anzutreffen ist. So gibt es eine geometrische Zahlentheorie, eine geometrische Funktionentheorie, algebraische Geometrie und geometrische Stochastik, es gibt geometrische Methoden in der Variationsrechnung, aber auch diskrete und kombinatorische Geometrie sowie Computergeometrie — letztere nicht zu verwechseln mit computational geometry, was etwa als „Komplexitätstheorie geometrischer Algorithmen“ zu übersetzen ist.

Die hiermit angedeutete Zweiteilung der Geometrie ist inzwischen ziemlich fest etabliert. Der dreidimensionale euklidische Raum ist, obwohl nach den Erkenntnissen der Physik nur eine sehr grobe Annäherung an die Wirklichkeit, nach wie vor das passende mathematische Modell für alle „alltäglichen“ Probleme. In der euklidischen Ebene schaffen wir uns „Bilder“ von allem, was wir

„anschauen“ und verstehen wollen. Ihre Bedeutung hängt mit der Dominanz des Sehens unter den menschlichen Sinnen zusammen. Der n-dimensionale euklidische Raum ist der Ort, in den die Mathematik Funktionen und Relationen und, z.B. mittels Koordinatisierung, auch fast alle anderen Untersuchungsgegenstände einbettet. Darüber hinaus aber herrscht Geometrie auch überall dort, wo eine Menge von eventuell sehr abstrakten Objekten als „Raum“ betrachtet wird, indem aus der geometrischen Anschauung entnommene Begriffe wie Topologie, Metrik, Dimension, Linearität dort neu gedeutet werden — mit der Absicht, Vorstellungsvermögen anzuregen, Analogien zu nutzen. Wie intensiv man dies betreibt, ist — wie schon gesagt — eine Stilfrage, aber es ist eine geistige Technik, ohne die moderne Mathematik in der vorliegenden Form nicht hätte entstehen können.

Wie weit letzteres tatsächlich Geometrie ist, aber auch, in welchem Umfang Anwendungsgebiete der Geometrie noch Mathematik oder schon Technik sind, darüber gibt es sehr unterschiedliche Standpunkte. Wir vertreten im Folgenden auch das Konzept, daß es neben der professionellen, deduktiven Mathematik eine unprofessionelle „unbewußte“ Mathematik gibt, die sich im intuitiven Benutzen von Begriffen, Formen und Verfahren, im Wissen und Können äußert, welches nicht in Worte gekleidet ist, sondern als materielles Produkt von Technik, Handwerk und Kunst existiert. Das vorliegende Buch will so mit einer Darstellung der historischen Entwicklung, die sehr viele, auch unübliche, Aspekte einbezieht, zur Klärung der Stellung und Bedeutung der Geometrie innerhalb der Mathematik beitragen und das Interesse an ihr fördern.

Der kritische Leser, den wir uns wünschen, könnte die Frage stellen, wie sich eine Geschichte der Geometrie in eine Reihe mit dem Obertitel „Vom Zählstein zum Computer“ einfügt. Was der Computer mit Geometrie zu tun hat, wird in 8.5 im Detail untersucht. Was die „Zählsteine“ betrifft, so sei darauf verwiesen, daß erste zahlentheoretische Erkenntnisse bei den Pythagoreern anhand von Mustern aus geometrisch angeordneten Steinen erwuchsen. So konnte man zum Beispiel durch geometrische Veranschaulichung erkennen, warum ab stets gleich ba ist oder wieso der Abstand zwischen den zwei Quadratzahlen n^2 und $(n+1)^2$ immer $2n+1$ beträgt.

Die dem Buch kapitelweise beigegebenen Aufgaben sind größtenteils keine historischen Aufgaben im engeren Sinne, sondern Aufgaben, die sich aus der vorliegenden Darstellung der Geschichte ergeben, also z.B. Fragen, die offen blieben, als sie zuerst auftraten, Fragen, die man damals nicht gestellt hat, obwohl es möglich gewesen wäre, alte Aufgaben, die sich mit den heute zur Verfügung stehenden Methoden einfacher lösen lassen, Anregungen, die sich im Anschluß an alte Aufgaben ergeben. Die meisten dieser Aufgaben sind so formuliert, auf entsprechende Spezialfälle reduziert oder mit Lösungshinweisen versehen, daß man sie mit Abiturwissen oder wenig darüber hinausgehenden Kenntnissen lösen kann. Einige Aufgaben aber sind schwierig und „nach hinten offen“: Der Leser kann dort beliebig weit vordringen und Neues entdecken. Ausgeschriebene Vornamen und Lebensdaten von Personen wurden im Text bis auf wenige begründete Ausnahmen vermieden. Sie können, soweit sie sich ermitteln ließen, aus dem Register am Ende des Buches erfragt werden.

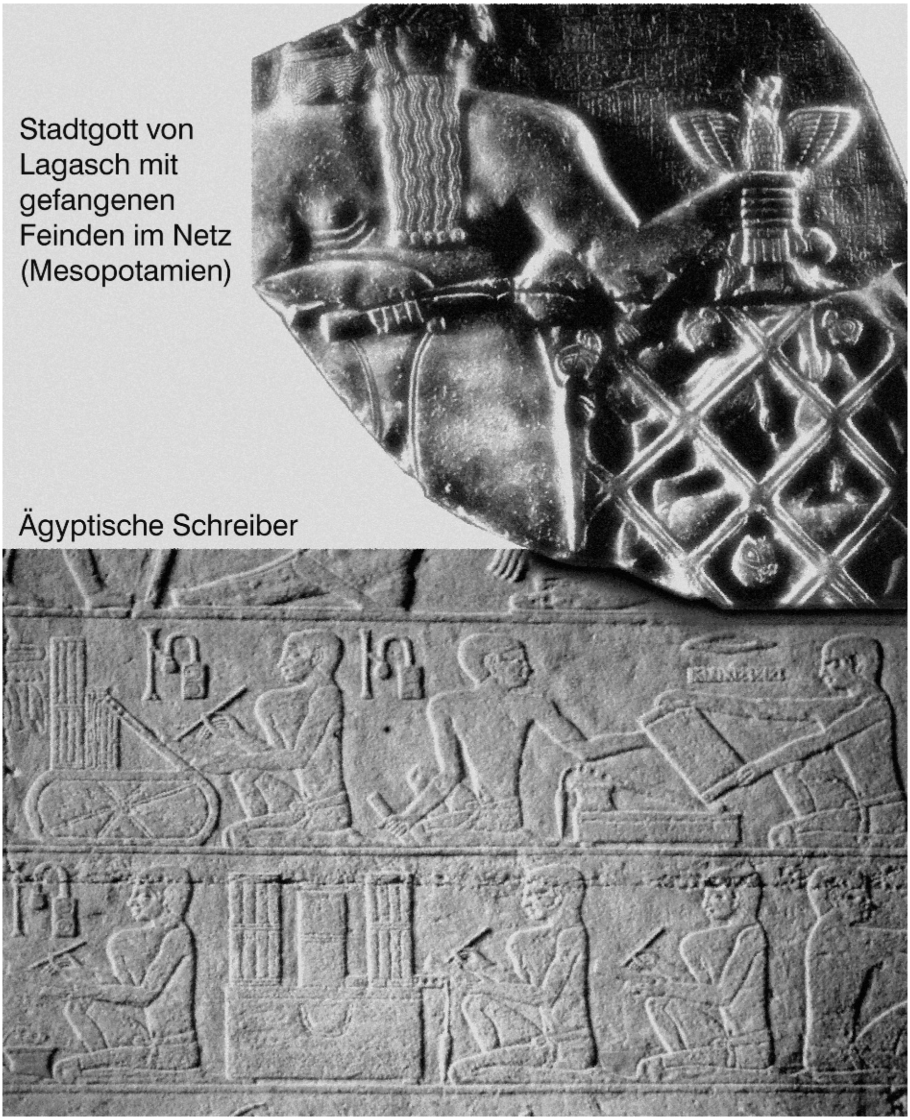
Die den Hauptkapiteln vorangestellten Bilder ausgewählter Personen haben einen sehr unterschiedlichen Charakter. Aus der Antike und dem außereuropäischen Mittelalter sind authentische Porträts nicht zu erwarten. (In den islamischen Ländern wurden schon aus religiösen Gründen Personen nicht dargestellt.) Wir müssen jedoch zur Kenntnis nehmen, daß spätere Epochen das Bedürfnis hatten, sich ein Bild von ihnen wichtig erscheinenden Persönlichkeiten der Vergangenheit zu machen. Dabei kann ein „Bild“ sowohl ein Phantasieporträt als auch eine symbolische graphische Darstellung sein. In diesem Sinne gehören zum Beispiel auch Briefmarken unbedingt zum kulturellen Umfeld der Wissenschaftsgeschichte, Mehrere Bücher sind diesem speziellen Thema schon gewidmet worden [Gjone 1996, Schaaf 1978, Schreiber, P. 1987, Wußing/Remane 1989]. Das hier wiedergegebene Bild des Euklid stammt aus einer in der Herzog-August-Bibliothek in Wolfenbüttel aufbewahrten Handschrift der römischen Feldmesser (Agrimensoren). Bemerkenswert an ihm ist nicht nur die Tatsache, daß diese Agrimensoren in Euklid, dem Meister der logisch-axiomatischen Denkweise, ihren Ahnherren sahen, sondern auch das geradezu orientalisch anmutende Ambiente des Bildes. Wenn man bedenkt, welches Gemisch von Völkern und Kulturen Alexandria um 300 v. Chr. darstellte, ist es vielleicht realistischer als manches klassizistisch beeinflußte pseudoantike Kunstwerk.

Die bewußt individuellen Personen ähnlich gestaltete Darstellung beginnt im europäischen Mittelalter damit, daß Künstler sich selbst als Modell benutzten. So ist das Porträt des Piero della Francesca nur ein mutmaßliches Selbstporträt. Es stammt aus seinem Fresco „Die Auferstehung Christi“ (um 1465) in seiner Heimatstadt Borgo Sansepolcro.

Das hier gezeigte Bild von René Descartes malte Frans Hals kurz vor der Abreise des Philosophen nach Schweden. Es gehört nicht nur zu den ganz wenigen Fällen, in denen ein wirklich berühmter Maler einen wirklich berühmten Mathematiker porträtierte (ein zweiter Fall ist das von Max Liebermann gemalte Porträt Felix Kleins), sondern es entstanden noch im 17. Jh. mehrere Kopien dieses Bildes mit unterschiedlichem Gesichtsausdruck, die seitdem (zum Teil sogar seitenverkehrt) als Bildnisse von Descartes durch die Lexika und die wissenschaftshistorische Literatur geistern.

Peter Schreiber

1 Die Anfänge geometrischer Darstellungen und Berechnungen



C.J. Scriba, P. Schreiber, *5000 Jahre Geometrie*, Vom Zählstein zum Computer, 3rd ed.,
DOI 10.1007/978-3-642-02362-0_2, © Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2010

1.1 Die Urgesellschaft

Schon lange, bevor die Schrift entwickelt wurde, dürfte der Mensch geometrische Strukturen wahrgenommen und auch systematisch verwendet haben. Die Natur bietet dem Auge vielfältig gekrümmte Linien, doch ein Grashalm oder ein Baumstamm legen den Gedanken der Geraden ebenso nahe wie denjenigen des Kreises (als Querschnitt). Beim Weben und Flechten entstehen einfache zweidimensionale Muster, die dann absichtlich modifiziert, aber auch als Schmuck auf Tongefäßen nachgebildet wurden. Solche in bestimmter Weise geometrisch gestaltete Ornamente sind für die Zeit um 40.000 v. Chr. nachweisbar. Sie können für Kulturgemeinschaften so charakteristisch sein, daß sie es den Prähistorikern erlauben, deren Wanderungen anhand der aufgefundenen Gefäßreste zu rekonstruieren. So finden sich z.B. Faltbandmuster auf jungsteinzeitlichen Tongefäßen oder sechs kongruente Kreise, die um einen zentralen, gleichgroßen herumgelegt sind und diesen wie je zwei benachbarte berühren, in der kretischen Kultur. Das gleichseitige Dreieck, das Quadrat (mit den vor anderen Winkeln ausgezeichneten vier rechtwinkligen Ecken) oder auch das regelmäßige Sechseck müssen früh als Sonderfälle ebener Figuren aufgefallen sein und spielerisches Interesse geweckt, aber auch erste theoretische Überlegungen angeregt haben (vgl. z.B. [Kadeřávek 1992]).

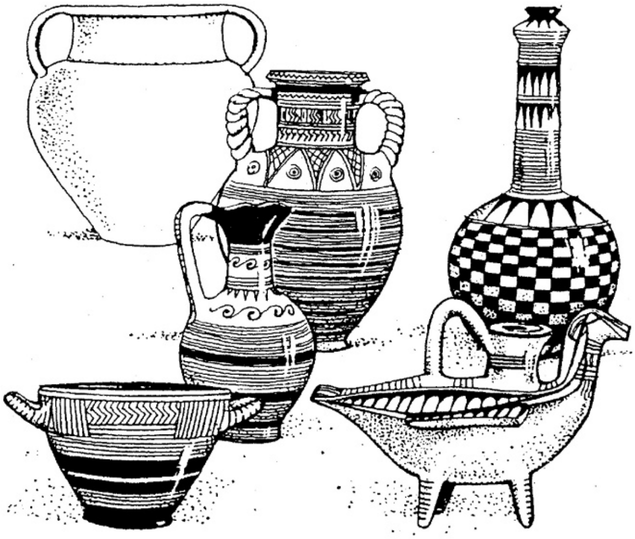


Abb. 1.1.1 Geometrische Ornamente auf vorgeschichtlicher Keramik
[Drawing by Hubert J. Pepper from „Die Welt aus der wir kommen“, published by Thames and Hudson Ltd, London]

Weitere Anstöße gaben die Bedürfnisse und Tätigkeiten des Alltags: beim Anlegen von Gräben und Dämmen, beim Hausbau, bei der Feldmessung kommen elementare geometrische Beziehungen zur Anwendung — sicher anfangs den Menschen eher unbewußt, bis sich die ersten logischen Überlegungen einzustellen begannen. Ohne dreidimensionale Körper (Quader, Würfel, Pyramide, Säule) war keine Bautätigkeit möglich; die Beobachtung des Laufs der Gestirne legte den Übergang vom ebenen Dreieck zum sphärischen Dreieck nahe. Daß die Diagonale das Quadrat oder das Rechteck, der Durchmesser den Kreis halbiert, schien anschaulich klar zu sein. Alle vorgriechischen Kulturen haben solche unmittelbar einsichtigen Beziehungen gekannt und in der Praxis benutzt. Erst die Griechen begannen nach einer Begründung zu fragen und gelangten so schließlich zu einem axiomatischen Aufbau der geometrischen Theorie, wie sie uns in den „Elementen“ des Euklid überliefert ist.

Wenn nachfolgend auch in erster Linie die ägyptische und babylonische Geometrie skizziert werden sollen, so muß doch betont werden, daß keine Kultur existiert, in der nicht geometrische Elemente in vielfältiger Weise zu Tage treten. Die Gestaltung von Schmuck ist häufig stark von religiösen Vorstellungen bestimmt: den Göttern geweihte Gefäße werden reicher als üblich verziert, die Altäre in besonderer Form ausgestaltet, die Riten (man denke auch an den Tanz) in geometrisch betimmten Formen vollzogen.Auch das Spiel als Quelle für die Beschäftigung mit geometrischen Eigenschaften sollte nicht übersehen werden. Nicht nur an Brettspiele, denen ja fast immer gewisse symmetrisch angelegte Muster zugrundeliegen, ist zu denken.

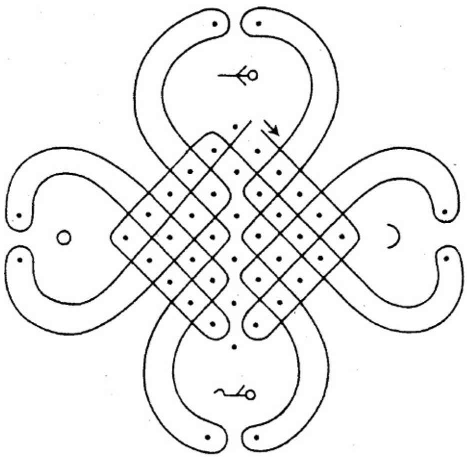


Abb. 1.1.2 Einzügige Figur zur Weltentstehungssage der Jokwe in Angola: der Weg von Sonne (links), Mond (rechts) und Mensch (unten) zu Gott (oben) [Zaslavsky 1999]

Die Ethnomathematik, die sich in jüngster Zeit den impliziten mathematischen Vorstellungen bei den Naturvölkern zugewandt hat, lieferte erstaunliche Forschungsergebnisse. Bei einem afrikanischen Volksstammm in Angola findet sich beispielsweise die Sitte, beim Erzählen der Sage von der Weltentstehung freihändig eine Figur aus einem einzigen, sich kunstvoll verschlingenden Kurvenzug zu zeichnen, was sorgfältige geometrische Überlegungen erfordert, soll das gewünschte Resultat mit seinen Symmetrieeigenschaften hervorgebracht werden (Abb. 1.1.2).

Eine weitere Inspiration, elementargeometrische Betrachtungen anzustellen, lieferte der Menschheit seit Anbeginn die Beobachtung der Veränderungen des gestirnten Himmels. Die Wanderung des Schattens eines Baumstumpfes oder aufragenden Steines im Tages- und Jahreslauf bildet die Grundlage für eine einfache Sonnenuhr. Wird die Bahn der Spitze des Schattens systematisch aufgezeichnet, ergeben sich als Projektion des Sonnenlaufes am Himmel Kurven in der Ebene, die Anlaß zum Nachdenken bieten.

In den 90er Jahren des 20. Jhs. wurde in Sachsen Anhalt die Kreisgrabenanlage von Goseck aus der Zeit um 4800 v. Chr. entdeckt, archäologisch untersucht und anschließend rekonstruiert. Es handelt sich um das bisher älteste bekannte Sonnenobservatorium weltweit (Abb. 1.1.3). Kreisgrabenanlagen entstanden in Mitteleuropa in der Nähe von Siedlungen in der Zeit um 4800 bis 4500 v. Chr. Der doppelte Palisadenring der Kreisgrabenanlage von Goseck enthält drei Tore, je eines nach Norden, nach Südosten (Sonnenaufgang 21. Dezember) und nach Südwesten (Sonnenuntergang 21. Dezember). Die Abstände zwischen den Palisaden sind um den 21. Juni herum breiter gesetzt. Bauern aus der Zeit der Bandkeramik konnten so vor fast 7000 Jahren an Hand des Sonnenstandes den Zeitpunkt von Aussaat und Ernte im Jahresverlauf bestimmen. Kreisgrabenanlagen wurden aber auch für kultische Zwecke benutzt, wie Funde nahelegen. Erst etwa 2000 Jahre später entstand mit Stonehenge bei Salisbury in Südengland die bekannteste Anlage von Bauten der steinernen Megalithkultur

Abb. 1.1.3 Kreisgrabenanlage von Goseck (bei Halle), Himmelscheibe von Nebra.
[Foto Wesemüller-Kock]

Abb. 1.1.4 Stonehenge (Südengland): das größte erhaltene Steindenkmal Europas aus dem 3./2. Jahrtausend (äußerer Ringdurchmesser ca. 100 m) [Foto H.-W. Alten]

(3. und 2. Jahrtausend v. Chr.), die als Sonnenobservatorien und Kultstätten der Jungsteinzeit gedeutet werden [Gericke 1984] (Abb. 1.1.4).

Forschungen der letzten Jahrzehnte ergaben, daß sich in ihrer Anlage möglicherweise neben astronomischen Kenntnissen auch solche elementarer geometrischer Beziehungen — z.B. des sog. Satzes von Pythagoras — niedergeschlagen haben. Man kann allerdings nur vermuten, das pythagoreische Dreieck mit den Seitenlängen 3, 4, 5 (die man z.B. an einem Seil der Länge 12 mit Knoten markieren könnte) sei schon früh zur Erzeugung rechter Winkel herangezogen worden. In der Konstruktion der Holzanlage Woodhenge (um 1800 v. Chr.) glauben Forscher, sogar die Mitverwendung des pythagoreischen Drei-

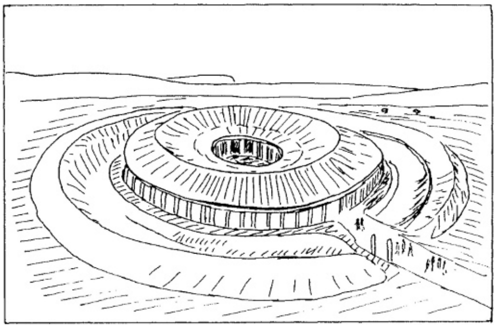


Abb. 1.1.5 Rekonstruktion von Woodhenge
[Ashbee, P.: The Bronze Age Round Barrow in Britain, Phoenix House Ltd, London 1960]

ecks 12, 35, 37 nachweisen zu können (Abbn. 1.1.5, 1.1.6). Zu Stonehenge siehe [North 1996]; eine Kritik der Hypothese vom rechten Winkel findet sich bei [Knorr 1985]. Ungefähr aus der selben Zeit wie Woodhenge stammt die erst in jüngster Zeit nahe Halle gefundene bronzezeitliche Himmelscheibe von Nebra, deren Sternenbild mit den Plejaden als erste Himmelsdarstellung anzusehen ist [Schlosser 2004]. Über die Scheibe hat sich eine rege Diskussion über Auswertung und Deutungstheorien entwickelt, deren endgültige Aussagen in naher Zukunft zu erwarten sind.

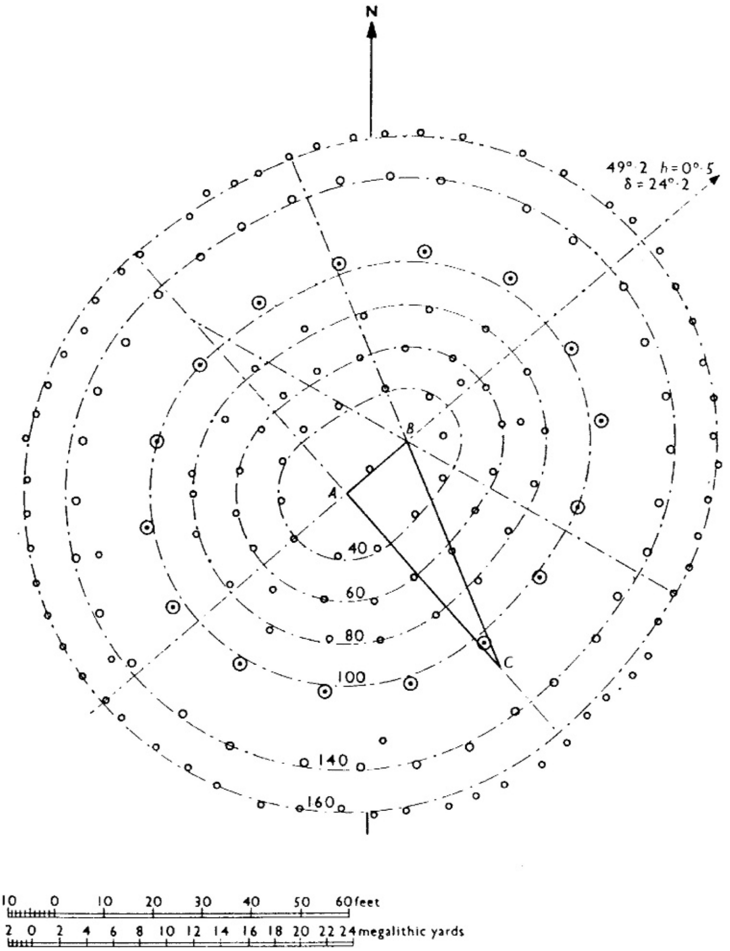


Abb. 1.1.6 Grundriß von Woodhenge
[Thom, A.: Megalithic Sites in Britain, Oxford, Clarendon Press 1967, Reprint 1972, by permission of Oxford University Press]

1.2 Alte Stromtalkulturen

3000 – 2000	Stadtkulturen im Industal: Harappa und Mohenjo Daro	Schrift noch nicht entziffert
3000 – 2700	Einigung der Reiche am Nil	Erfindung der Hieroglyphen
3000 – 2700	Sumerische Stadtstaaten	Entstehung der Keilschrift auf Tontafeln
2740 – 2150	Altes Reich in Ägypten	Bau der Pyramiden
2700 – 2000	Einwanderung und Herrschaft der Akkader in Mesopotamien	Rechentafeln
2150 – 2040	Erste Zwischenzeit in Ägypten	
2040 – 1788	Mittleres Reich in Ägypten	Mathematische Papyri
1900 – 1600	Altbabylonisches Reich	
1728 – 1668	König Hammurabi in Babylon	Gesetzestafeln
1780 – 1580	Zweite Zwischenzeit in Ägypten	
1580 – 1090	Neues Reich in Ägypten	Tempel der Hatschepsut
1290 – 1224	Pharao Ramses II.	Amuntempel in Karnak
1285	Schlacht von Kadesch	Gräber im Tal der Könige
1600 – 625	Hethiter, Kassiten, Assyrer herrschen in Mesopotamien	Mathematische Keilschrifttexte
ab 1090	Spätzeit in Ägypten: Libyer, Äthiopier, Assyrer herrschen am Nil	
625 – 539	Neubabylonisches Reich	Blüte von Astrologie und Astronomie
539	Kyros der Große erobert Babylon	
525	Perser erobern Ägypten	
332	Alexander der Große erobert Ägypten	
323 – 30	Ägypten unter der Herrschaft der Ptolemaier	Ägypten Handels- und Kulturzentrum der alten Welt
47 v.Chr.	Brand der Bibliothek von Alexandria	Eratothenes von Kyrene Direktor der Bibliothek, Euklid u. Apollonios in Alexandria
30 v.Chr.	Ägypten wird römische Provinz	Heron von Alexandria, Pappos und Proklos wirken in Alexandria
391 n.Chr.	Zerstörung der Bibliothek von Alexandria	Mathematikerin Hypatia bei Heidenverfolgungen ermordet
395	Ägypten fällt bei der Teilung des Römischen Reiches an Ostrom (Byzanz)	

1.2.1 Die Induskultur

Als eine der ältesten Hochkulturen der Menschheit gilt die Siedlung Mohenjo-Daro am Indus. Nahezu genauso alt wie das am Nil gelegene ägyptische Reich und das sich zwischen den Stromtälern von Euphrat und Tigris erstreckende Mesopotamien, erlebte die zur Harappa-Kultur gehörende Stadt von rund 40.000 Einwohnern um 2500 v. Chr. ihre Hochblüte. In allen Fundstätten dieser Kultur haben die Ziegelsteine die gleichen Seitenmaße im Verhältnis 1:2:4, die Straßen verlaufen schachbrettartig, und die Gewichte waren genormt. Da Ausgrabungen und Auswertung der Funde von Mohenjo-Daro (im heutigen Pakistan gelegen) noch andauern, läßt sich ein abschließendes Bild der Rolle der Geometrie in diesem Kulturkreis noch nicht gewinnen.

1.2.2 Die ägyptische Mathematik

Genauer sind wir über die geometrischen Kenntnisse im alten Ägypten und Mesopotamien (auch Babylonien genannt) unterrichtet, haben doch beide in der Jungsteinzeit (Neolithikum) entstandene Kulturen schriftliche Quellen hinterlassen, die seit der Mitte des 19. Jahrhunderts eingehend studiert wurden.

Im straff organisierten, zentral verwalteten Ägypten wurde seit etwa 2900 v. Chr. die Hieroglyphenschrift entwickelt. Quellen für unsere Kenntnis der ägyptischen Geometrie sind, neben den imposanten Bauwerken der Pyramiden, vor allem zwei mathematische Papyri aus der Zeit des Mittleren Reiches (11.–13. Dynastie). Ihr Inhalt gibt den Wissensstand um oder bald nach 2000 v. Chr. wieder (vgl. Bd. 1, Abschnitt 3.1). Es handelt sich offensichtlich um Texte — die beiden wichtigsten sind der Papyrus Rhind und der Moskauer Papyrus —, die von Lehrern (Schreibern) in den Beamtenschulen als Unterrichtshandbücher verfaßt wurden. Sie sind Aufgabensammlungen mit den zugehörigen Lösungsanweisungen. Der Papyrus Rhind war ursprünglich 5,34 m lang und 33 cm breit, der Moskauer Papyrus hat eine Länge von 5,44 m, ist aber nur 8 cm hoch. Letzterer enthält 25, ersterer 84 nach sachlichen Gesichtspunkten geordnete Aufgaben, denen gelegentlich veranschaulichende Skizzen beigegeben sind. Geometrische Körper werden dabei durch ihren Grund- oder Seitenriß dargestellt, denn perspektivisches Zeichnen kannten die Ägypter nicht. Manchmal werden auch auf demselben Bild das Wichtigste im Grundriß, einzelne Teile im Aufriß wiedergegeben, wie z.B. bei der Darstellung eines rechteckigen Teiches, der am Rand mit Bäumen bestanden ist: diese sind jeweils nach außen umgeklappt (Abb. 1.2.1).

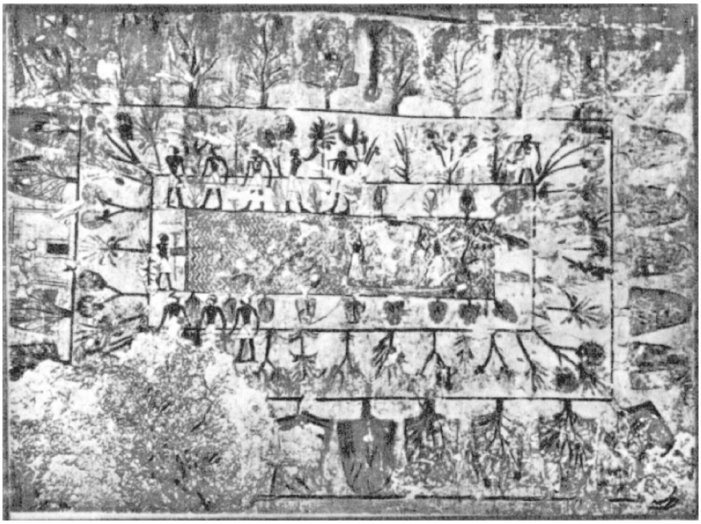


Abb. 1.2.1 Ägyptische Darstellung eines von Bäumen umgebenen Teiches Wechsel der Perspektive im gleichen Bild. [Kurt Vogel: Vorgriechische Mathematik, Teil I. Abb. 29, S. 60; aus Wreszinski, Atlas zur altägyptischen Kulturgeschichte 1923]

Zu den einfachsten Aufgaben gehört die Berechnung der Fläche F von Rechtecken, Trapezen und Dreiecken. Für ein beliebiges Viereck mit den Seiten a, b, c, d findet sich die Näherungsformel

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}, \tag{1.2.1}$$

also eine doppelte Mittelwertbildung aus den gegenüberliegenden Seiten. Interessanterweise wird sie auch einmal auf ein Dreieck angewandt, indem die vierte Seite gleich null gesetzt wird (besser gesagt: als nicht vorhanden weggelassen wird; denn den Begriff der Null kannten die Ägypter nicht).

Eine eigentümliche Vorschrift wird für die Berechnung der Fläche F eines Kreises von gegebenem Durchmesser d verwendet: man ziehe vom Durchmesser 1/9 seiner Länge ab und multipliziere das Ergebnis mit sich selbst, bilde also

$$F = \left(\frac{8}{9}\,d\right)^2. \tag{1.2.2}$$

Eine Begründung für dieses erstaunlich genaue Verfahren wird, wie auch sonst, nicht gegeben. Doch ist der Aufgabe 48 im Papyrus Rhind eine Zeichnung beigegeben, die ein Quadrat der Seitenlänge 9 zeigt, aus dem durch Abschneiden der Ecken ein Achteck erzeugt wird, das als Annäherung an einen Kreis aufgefaßt werden kann. Diese Figur gab Kurt Vogel 1928 die Anregung zu einer Deutung der ägyptischen Vorschrift (siehe Aufgabe 1.2.1).

Neben ebenen Figuren werden in den ägyptischen Texten auch Volumina berechnet, sei es bei bautechnischen Aufgaben oder wenn das Fassungsvermögen von Gefäßen und Speichern ermittelt werden soll. Bemerkenswert ist dabei die Erwähnung eines Schichtmaßes für Rauminhalte — in analoger Weise kommt bei Flächenberechnungen ein Streifenmaß vor. Offensichtlich liegt die Vorstellung näher, den Inhalt etwa eines Ziegelsteins dadurch zu ermitteln, daß man eine seiner Grundfläche entsprechende Schicht, deren Höhe das Einheitsmaß ist, mehrfach (wie bei der Herstellung von Sperrholzplatten) übereinander legt, als der Gedanke, seinen Rauminhalt durch Ausfüllen mit Einheitswürfeln zu berechnen (denn auf letzterem beruht das heute übliche Verfahren, Länge, Breite und Höhe miteinander zu multiplizieren). Übrigens werden alle Aufgaben rezeptartig und immer nur mit konkreten Zahlenwerten berechnet; in dieser frühen Zeit stand weder eine Formelsprache noch die Möglichkeit, Größen abstrakt auszudrücken, zur Verfügung.

Bei Körperberechnungen kommen außer quaderförmigen vorwiegend zylinderförmige Behältnisse vor, wobei die erwähnte Formel für die Kreisfläche eingesetzt wird. Die großartigen Pyramidenbauten legen die Vermutung nahe, im alten Ägypten müsse auch die Inhaltsformel für die Pyramide bekannt gewesen sein. Dafür gibt es aber bisher keinen eindeutigen Beleg. (Wie Max Dehn im Jahr 1900 nachwies, ist eine strenge Herleitung dieser Formel für eine beliebige Pyramide nicht ohne einen Grenzübergang möglich. Für Spezialfälle siehe Aufgabe 1.2.2).

Dagegen enthält der Moskauer Papyrus in Aufgabe 14 die korrekte Anweisung zur Berechnung eines quadratischen Pyramidenstumpfes gemäß der richtigen Formel

$$V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{h}{3}, \tag{1.2.3}$$

(V = Volumen, a = Länge der Grundkante, b = Länge der Oberkante, h = Höhe). Man kann diese Formel gewinnen, falls diejenige für das Pyramidenvolumen bekannt ist (siehe Aufgabe 1.2.3); wie gesagt ist eine Verwendung derselben bisher aber in den spärlich erhaltenen ägyptischen Texten nicht nachgewiesen (vgl. Videofilm „Vom Zählstein zum Computer – Altertum“[1]).

[1] Verlag Franzbecker, ISBN 3-88120-236-6

Abb. 1.2.2 Die Pyramide des Cheops in Giza
[Foto H.-W. Alten]

Abb. 1.2.3 Zikkurat von Tschogah Sambil
Der aus Lehmziegeln gebaute Stufenturm hat die typische Form der von Sumerern, Babyloniern, Assyrern und Elamern im mesopotamischen Kulturkreis errichteten Tempel. Die um 1250 v.Chr. erbaute fünfstufige Zikkurat von Tschogah Sambil ist das am besten erhaltene Bauwerk dieser Art. [Foto H.-W. Alten]

Manchmal nähern die Ägypter den quadratischen Pyramidenstumpf auch durch Mittelbildung an: sie behandeln ihn wie einen Quader, dessen Basis B als das arithmetische Mittel von Grundfläche und Deckfläche gewählt wird:

$$B = \frac{a^2 + b^2}{2}, \tag{1.2.4}$$

woraus

$$V = (a^2 + b^2) \cdot \frac{h}{2} \tag{1.2.5}$$

folgt. Der Mathematikhistoriker Kurt Vogel meinte, vielleicht hätten die Ägypter den Fehler wahrgenommen und deshalb noch ein mittleres Flächenstück $a \cdot b$ eingefügt:

$$B = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \tag{1.2.6}$$

und so aus einer unrichtigen Formel durch unbewiesene Verallgemeinerung die richtige Berechnungsvorschrift gefunden. (Nebenbei bemerkt: Sieht man die Pyramide als einen Pyramidenstumpf mit der Deckfläche $b^2 = 0$ an, so liefert die Formel für den Inhalt des Stumpfes die richtige Formel für das Pyramidenvolumen.)

1.2.3 Die babylonische Mathematik

Viel reichhaltiger als die Quellen zur ägyptischen Mathematik sind diejenigen über die babylonische, da als Schreibmaterial in Mesopotamien Tontafeln verwendet wurden. Sie überstanden die Zeiten wesentlich besser als der leicht vergängliche Papyrus (vgl. Bd. 1, Abschnitt 3.2). Zahlreiche Texte stammen aus der Zeit des altbabylonischen Reiches (ca. 1900 bis ca. 1600 v. Chr.), dem die sumerischen Stadtstaaten (ca. 3000 bis ca. 2700) und die Herrschaft der Akkader (ca. 2700 bis 2000) vorausgegangen waren. Doch lassen Funde aus den folgenden Jahrhunderten, in denen sich im Zweistromland viele politische Umwälzungen ereigneten (Herrschaft der Assyrer, der Hethiter, der Chaldäer), erkennen, daß nach anfänglicher Entwicklung der Mathematik lange Zeit kaum Veränderungen eintraten. Erst in der Seleukidenzeit (den letzten vorchristlichen Jahrhunderten) sind Fortschritte zu verzeichnen — insbesondere in der Astronomie. Denn wie in Ägypten diente die Mathematik in Mesopotamien der Praxis und wurde in diesem Zusammenhang entwickelt: Wirtschaft, Handel, Bauwesen und Himmelsbeobachtung gaben Anlaß zur Beschäftigung mit mathematischen Überlegungen. Diese erreichten in Babylon einen höheren

Entwicklungsstand als in Ägypten. Insbesondere begannen die Forscher aufzuhorchen, als 1916 in den Texten der pythagoreische Lehrsatz und ein Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln entdeckt wurde.

Felderpläne, Grundrisse von Häusern oder solche von technischen Bauten wie Dämmen und Kanälen sind häufiger den einschlägigen Berechnungsvorschriften beigegeben und lassen auf den ersten Blick die Praxisnähe der Aufgaben erkennen. Teilweise fehlen noch Fachausdrücke; der Alltagssprache entnommene Bezeichnungen wie Mauer, Damm, Graben usw. werden ersatzweise verwendet. Wo freilich nach dem Flächeninhalt regelmässiger Vielecke gefragt und dazu passende geometrische Zeichnungen in die Tafeln eingeritzt wurden, scheint frühes theoretisches, über unmittelbare Alltagsbedürfnisse hinausgehendes Interesse auf, wie es auch in der sog. babylonischen Algebra feststellbar ist (siehe Abb. 1.2.2).

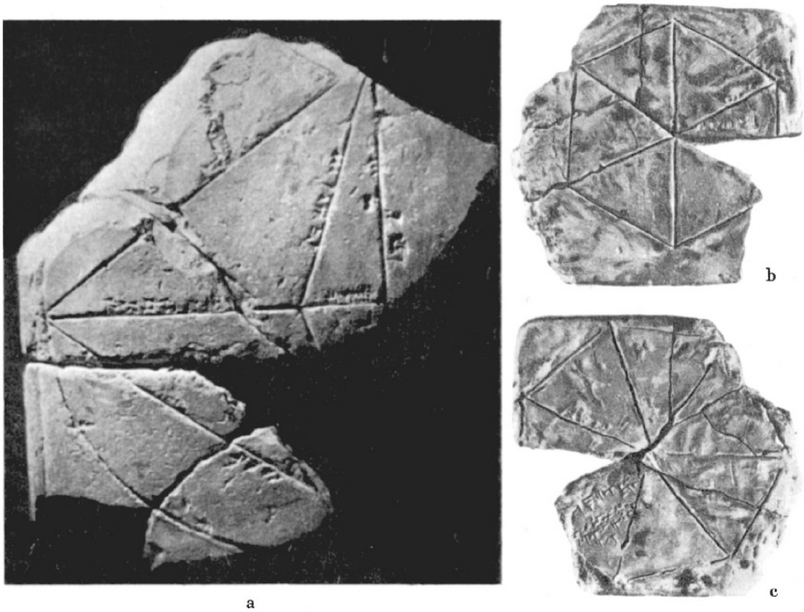


Abb. 1.2.4 Babylonische Polygone
[Kurt Vogel: „Vorgriechische Mathematik“, Teil II. Abb. 22a-c, S. 69, nach E.M. Bruins und M. Rutten: Mémoires de la Mission Archéologique française en Iran, Tome XXXIV]

Auffällig ist das häufige Vorkommen der Berechnung der Diagonale von Rechtecken mittels des pythagoreischen Lehrsatzes — viele Jahrhunderte vor Pythagoras! Dabei wählten die babylonischen Mathematiker oft die Zahlenwerte so, daß sich rationale Seiten ergaben, doch konnten sie Quadratwurzeln auch näherungsweise berechnen. Das kann entweder durch Iteration geschehen sein oder durch Anwendung der sog. heronischen Formel

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 \pm r} \approx a \pm \frac{r}{2a}, \tag{1.2.7}$$

wobei $n \epsilon \mathbb{N}$ in die nächstliegende Quadratzahl a^2, vermehrt oder vermindert um den Rest r, zerlegt ist.

Eine Problem der Art, wie es nicht nur vom heutigen Schulunterricht her bekannt ist, sondern wie es auch in der chinesischen und indischen Mathematik und im europäischen Mittelalter vorkommt, ist die in einem Text aus der Seleukidenzeit behandelte Aufgabe einer an eine Wand gelehnte Stange (BM 34568, British Museum London). Zunächst senkrecht an eine Mauer gelehnt, reiche sie bis zu einer unbekannten Höhe. Dann werde der Fuß um neun Ellen von der Mauer entfernt, wobei sich die Spitze um drei Ellen senke. Gefragt wird nach der Länge (x) der Stange. Zu berechnen ist also die Größe x aus der folgenden Gleichung für ein pythagoreisches Dreieck: $x^2 = (x-3)^2 + 9^2$ (siehe Aufgabe 1.2.4).

Der Geometrie zugehörig sind auch die verbreiteten Teilungsaufgaben. Soll etwa ein beliebiges viereckiges Feld mit den Seiten a, b, c, d durch eine von b nach d verlaufende Transversale x in zwei flächengleiche Teile zerlegt werden, so berechnet man sie nach der Vorschrift

$$x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}. \tag{1.2.8}$$

Man könnte diese Näherung deuten als Bildung eines mittleren Quadrates aus den beiden Quadraten über den Seiten a und c, dessen Seite dann als Größe der Transversale genommen wird. Dabei gehen allerdings, wie man sieht, die Längen der Seiten b und d in die Berechnung nicht ein; die Vorschrift kann also nur für gewisse Feldformen einen annähernd richtigen Wert liefern (siehe Aufgabe 1.2.5).

Für die Kreisberechnung verwendeten die Babylonier ein eigenartiges, von der Vorschrift der Ägypter völlig verschiedenes Verfahren. Die Fläche F des Kreises wurde nämlich auf dem Umweg über seinen Umfang u berechnet: man solle ein Zwölftel des Quadrates des Umfanges nehmen, also

$$F = \frac{u^2}{12}. \tag{1.2.9}$$

Dabei wurde als Kreisumfang nur grob der dreifache Durchmesser d genommen. Setzt man das ein, folgt $F = \frac{9d^2}{12} = 3r^2$.

Es stellt sich die Frage, warum die Kreisfläche in der babylonischen Mathematik auf diesem seltsamen Weg berechnet wurde, wo es doch nahezuliegen scheint, vom Durchmesser oder vom Radius r auszugehen. Dazu muß man sich zunächst klarmachen, daß beim Studium des Kreises eigentlich zwei Proportionalitätsfaktoren auftreten: einerseits besteht ein festes Verhältnis zwischen