





## ARQUIMÁTICA

---

## UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SALTA

### AUTORIDADES

|                                                       |                                     |
|-------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| Rector                                                | Ing. Rodolfo Gallo Cornejo          |
| Vicerrectora Académica                                | Mg. Prof. Lilian Constanza Diedrich |
| Vicerrector Administrativo                            | Dr. Darío Eugenio Arias             |
| Vicerrector de Formación                              | Pbro. Dr. Cristian Arnaldo Gallardo |
| Vicerrector de Investigación y Desarrollo             | Dr. Federico Colombo Speroni        |
| Director General del Sistema de Educación a Distancia | Ing. Lic. Daniel Torres Jiménez     |
| Secretaria General                                    | Lic. Silvia Milagro Álvarez         |
| Decano de la Facultad de Arquitectura y Urbanismo     | Dr. Pablo Andrés Prone              |

### EUCASA (EDICIONES UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SALTA)

|                  |                                |
|------------------|--------------------------------|
| Directora        | Lic. Rosanna Caramella         |
| Edición          | Prof. Soledad Martínez Saravia |
| Comercialización | Lic. Mariana Remaggi           |

# ARQUIMÁTICA

---

ROLANDO MAZZAGLIA



EUCASA  
EDICIONES UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SALTA  
SALTA - ARGENTINA

Mazzaglia, Rolando

ArquiMática / Rolando Mazzaglia. - 1a ed. - Salta: Universidad Católica de Salta. Eucasa, 2020.

Libro digital, PDF - (EUCASA clase / Arquitectura)

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-950-623-222-1

1. Arquitectura. 2. Matemática Aplicada. I. Título.  
CDD 720.2

Para citar este libro:

Mazzaglia, R. (2020). *ArquiMática*. Salta: EUCASA (Ediciones Universidad Católica de Salta). Recuperado de <http://...>, día / mes / año.



© 2020, por EUCASA (EDICIONES UNIVERSIDAD CATÓLICA DE SALTA)

Colección: *EUCASA Clase / Arquitectura*

Resolución Rectoral: 413/2020

Diseño interior: Fabio Viale ([fabiocomunicadorvisual@gmail.com](mailto:fabiocomunicadorvisual@gmail.com))

Arte de tapa: D.G. Carolina Ísola ([isocar@hotmai.com](mailto:isocar@hotmai.com))

Domicilio editorial: Campus Universitario Castañares - 4400 Salta, Argentina

Web: [www.ucasal.edu.ar/eucasa](http://www.ucasal.edu.ar/eucasa)

Tel./fax: (54-387) 426 8607

e-mail: [eucasa@ucasal.edu.ar](mailto:eucasa@ucasal.edu.ar)

Depósito Ley 11.723

ISBN: 978-950-623-222-1

*Este libro no puede ser reproducido  
total o parcialmente,  
sin autorización escrita del editor.*

# Índice general

---

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| Arquimática. ¿Qué es la Arquimática? .....                       | 9   |
| Agradecimientos .....                                            | 11  |
| Dedicatoria in memoriam .....                                    | 13  |
| Matemática, definiciones .....                                   | 15  |
| La historia de los siete sabios de Grecia y sus sentencias ..... | 17  |
| <b>Capítulo I</b>                                                |     |
| Geometría plana .....                                            | 23  |
| <b>Capítulo II</b>                                               |     |
| Geometría del espacio .....                                      | 83  |
| <b>Capítulo III</b>                                              |     |
| Geometría analítica .....                                        | 153 |
| <b>Capítulo IV</b>                                               |     |
| Secciones cónicas .....                                          | 181 |
| <b>Capítulo V</b>                                                |     |
| Superficies cuádricas .....                                      | 211 |
| <b>Capítulo VI</b>                                               |     |
| Trigonometría .....                                              | 233 |
| <b>Capítulo VII</b>                                              |     |
| Relaciones y funciones .....                                     | 293 |
| <b>Capítulo VIII</b>                                             |     |
| Análisis matemático .....                                        | 353 |
| <b>Capítulo IX</b>                                               |     |
| Desafíos y curiosidades, acertijos y diversiones .....           | 423 |
| El fin de la historia que no tiene final .....                   | 437 |



# ArquiMática

---

## ¿Qué es la ArquiMática?

En el 2014, cuando empezó mi aventura de ser lo que nunca quise ser, docente a cargo de esta materia que se llama Matemática, me di cuenta de que todo debe estar orientado hacia el objetivo que se persigue. Los alumnos me hicieron entender que esta materia debía orientarse hacia los conocimientos para el desarrollo de la carrera de Arquitectura, y aún más para la misma profesión. ¿Para qué estudiamos matemática? Fue una de las primeras preguntas. ¿Para qué nos sirve la matemática en arquitectura? Fue otra pregunta recurrente.

Me había preparado para enseñarles el teorema del coseno, la clasificación de las Funciones y también los puntos notables de un triángulo, entre otros temas propios de la materia, porque creí que sobre esta temática rondarían sus requerimientos. Nada de ello ocurrió. De haber ocurrido tenía todas las respuestas. El caso es que me preguntaban lo que ya les conté y no tenía respuesta. Podría haberles dicho que estaba en el plan de la carrera y que obligatoriamente tenían que cursarla. Pero no les dije nada y comencé a recorrer el programa de la materia y tratar de dar respuesta a las preguntas que me hacían. De repente me acordé: ¡el Parthenón! Gran obra de arquitectura proyectada con el irracional número de oro. Fue la primera aplicación que encontré y así siguieron otras tantas y muchas aplicaciones que ahora no les contaré y que descubrirán con la lectura de este libro.

¿Cuál es la bibliografía recomendada? ¿Qué libros podemos consultar? Fueron las preguntas que siguieron. De nuevo, preguntas sin respuestas. Comencé a buscar libros de matemática escritos para arquitectos y la sorpresa es que no encontré ninguno.

Libros de matemática se escribieron siempre, en todos los tiempos y en todas las lenguas, pero consagrados a la arquitectura no lo sé. Le pregunté a mi amigo Francisco, que siempre sabe de todo, y tampoco sabía.

Ahora que ya saben de qué se trata podemos ensayar una definición: “ArquiMática es el conjunto de conocimientos matemáticos que tiene aplicación en el desarrollo de la carrera de Arquitectura y es de interés para la profesión del arquitecto”.



## Agradecimientos

---

Son muchas las personas que me ayudaron con la confección de este libro a las cuales quiero agradecer. Sin sus valiosos aportes este libro no hubiera sido posible. El orden no implica importancia, todas las ayudas recibidas fueron importantes.

- A la ingeniera Eleonora Robles, quien revisó y corrigió varios capítulos.
- A mi amigo Francisco, el licenciado Cerón García, quien también me ayudó con la revisión.
- A la dibujante Eulogia Merle, ilustradora del diario El País de Madrid, quien me permitió la utilización de sus creaciones en las portadas de los capítulos.
- Al señor Juan Carlos Fernández Gordillo de la página Vitutor, quien me autorizó a utilizar ejercicios de la web para incorporar al libro.
- Al ingeniero de caminos y profesor de matemáticas Amadeo Artacho, de la página [matematicascercanas.com](http://matematicascercanas.com), quien me autorizó a utilizar imágenes de su blog para incorporar al libro.
- Al señor Gabriel Vera Prado, de la página Portal Educativo, sitio [www.portaleducativo.net](http://www.portaleducativo.net), quien me autorizó a utilizar imágenes para incorporar al libro.
- Al señor Roberto Cardil, de la página [matematicasVisuales](http://matematicasVisuales.com), quien me autorizó a utilizar imágenes de la web para incorporar al libro.
- A la licenciada Rosanna Caramella, directora de Eucasa, quien siempre prestó su inestimable colaboración para la edición de este libro.
- A la señorita Silvana Carolina Jorqui y al señor Agustín González Boris, quienes realizaron el diseño gráfico de las portadas de los capítulos.
- Al señor Luciano Villagra Araoz, que realizó el rediseño de los gráficos de los capítulos del libro.
- A mi hijo Nicolás que revisó las tres historias de este libro.
- A mis compañeros Omar Caballero y Rodrigo Delgado.
- A los anónimos que publicaron en las páginas de Internet muchos artículos que tomé para incluir en este libro, que sirvieron de fuente de inspiración. A mí solo me pertenecen los arreglos y agregados que realicé.

A todos ellos, mis agradecimientos.



## Dedicatoria *in memoriam*

para la contadora Clara del Carmen Castro



*Clara con su inseparable amigo Felipe*

Este libro está dedicado solamente a Clara, mi estimada amiga que ya no está con nosotros. Fue ella mi compañera de colegio y de promoción en el Instituto Padre Gabriel Tommasini. Luego de graduarnos, estudiamos en la misma universidad, ella Ciencias Económicas y yo Ingeniería. Así fue como Clara se graduó de contadora pública nacional y yo de ingeniero.

A Clara le gustaba la docencia y preparaba alumnos en Contabilidad y en Matemática.

Clarita, como le decían sus alumnos, un día me llamó y me preguntó por la bibliografía de matemática para estudiantes de Arquitectura. Es que tenía que preparar alumnos de esta carrera en Matemática. No tenía respuesta para darle porque no conocía la bibliografía requerida. Entonces me encargó que le averiguara. Busqué, pero no encontré.

Tiempo después volvió a llamarme, pero esta vez para decirme que los estudiantes de Arquitectura merecían una bibliografía adecuada para estudiar matemática y que yo debía escribirles ese libro. Le dije que no, porque no disponía de tiempo, pero que lo pensaría. No pasó mucho tiempo cuando decidí comenzar con la tarea inspirada y encomendada por Clara.

No le conté de mi decisión, lo haría una vez concluida la tarea para darle una sorpresa. Cuando el libro estuvo concluido, sin revisión aún, creí que era el momento oportuno para contarle. Pero quiso el destino que esto no ocurriera. A manos de un injusto perdió su vida. Este insensato criminal le arrebató su existencia. Que descanse en paz. Este es el réquiem para Clara. Vivirá para siempre en las páginas de este libro.



# Matemática

---

**DRAE (Diccionario de la Real Academia Española):** “Ciencia deductiva que estudia las propiedades de los entes abstractos, como números, figuras geométricas o símbolos, y sus relaciones. Estudio de la cantidad considerada en abstracto o aplicada.”

## Definiciones relevantes por matemáticos y filósofos famosos

**María Moliner:** “Ciencia que trata de las relaciones entre las cantidades y magnitudes y de las operaciones que permiten hallar alguna que se busca, conociendo otras.”

**René Descartes:** “La matemática es la ciencia del orden y la medida, de bellas cadenas de razonamientos, todos sencillos y fáciles.”

**Galileo Galilei:** “Las matemáticas son el alfabeto con el cual Dios ha escrito el Universo”. “Las matemáticas son el lenguaje de la naturaleza”.

**Benjamin Peirce:** “La matemática es la ciencia que extrae conclusiones necesarias. Es el estudio de lo verdadero de las situaciones hipotéticas.”

**Daniel Henry Gottlieb:** La matemática es el estudio de los conceptos bien definidos.

**John D. Barrow:** “Matemática es el nombre que le damos a la colección de todas las pautas e interrelaciones posibles. La esencia de la matemática está en la relación entre cantidades y cualidades.”

**Georg Wilhelm Friedrich Hegel:** “Objeto de las matemáticas son el número y el espacio abstracto. El ser matemático es un ser aún sensible, aunque abstractamente.”

**David Hilbert:** “La matemática es el sistema de las fórmulas demostrables. En un cierto sentido, el análisis matemático es una sinfonía del infinito.”

**Friedrich Nietzsche:** “Las matemáticas son solo el instrumento del conocimiento general y último del ser humano.”

Cuando a **Albert Einstein** le preguntaron: “¿Cómo puede ser que las matemáticas, siendo después de todo un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, estén tan admirablemente adaptadas a los objetos de la realidad?”. Este responde (y sabe lo que dice): “...cuando las leyes de la matemática se refieren a la realidad, no son exactas; cuando son exactas, no se refieren a la realidad”.



## La historia de los siete sabios de Grecia y sus sentencias

---

Los siete sabios de Grecia eran conocidos —en Grecia, claro— además de por sabios, por lo que de práctico tenía su sabiduría. Y es que además de ser tiranos, políticos, estadistas, legisladores y reformadores sociales eran, por si fuera poco, famosos por sus aforismos y sentencias, es decir, por sus frases estudiadas y meditadas con las que pretendían guiar la conducta de los hombres para su realización personal y espiritual.

Y todos en su época decían que se les recordaría para siempre, aunque solamente uno de ellos, Thales de Mileto, que además era el único matemático de los siete, ha pasado a la posteridad para que sigamos recordando y estudiando su obra como muestra de que las matemáticas son inmortales.

A Thales de Mileto la historia le impuso la injusticia del orden alfabético al confeccionar la lista que incluía a los siete sabios. El tiempo ha demostrado que la lista se ha invertido (como lo presagiarían las Sagradas Escrituras), pasando el último a ser el primero en el respeto y la admiración de las generaciones de personas que le hemos seguido desde entonces hasta ahora. De esta manera la lista que ha llegado a nosotros a través de los siglos, con el injusto orden alfabético ya mencionado, es la siguiente:

1. **Bías de Priene:** Eminente político griego y famoso legislador.
2. **Cleóbulo de Lindos:** Tirano de Lindos, en la isla de Rodas.
3. **Periandro de Corinto:** Tirano, como su nombre indica, de Corinto, isla famosa por sus pasas de uva. Se dice de él que reglamentó y humanizó el régimen de trabajo de los esclavos. Bajo su mandato Corinto conoció una gran prosperidad.
4. **Pitaco de Mitilene:** Estadista que intentó restringir el poder de la nobleza otorgando más protagonismo a las clases populares.
5. **Quilón de Esparta:** Político que militarizó la vida civil de los espartanos dando a la juventud una educación castrense.
6. **Solón de Atenas:** Legislador y reformador social.
7. **Thales de Mileto:** Matemático, filósofo, geómetra, ingeniero y político dotado de una gran sabiduría práctica y poseedor de una ingente cantidad de conocimientos.

Un día del siglo VI a.C. Thales estaba especialmente feliz. Las autoridades de Delfos habían elegido una de sus sentencias para grabarla en el frontón del templo de Apolo. Y allí estaba Thales viendo cómo los escultores retiraban los andamios después de dejar grabada para la posteridad su máxima: “Conócete a ti mismo”.

Thales había invitado a la inauguración de la sentencia a sus colegas sabios y allí estaban todos menos Solón de Atenas y Bías de Priene. Y cuando se estaban preguntando

qué podría haberles pasado, aparecieron jadeando colina arriba hasta llegar a la puerta del templo donde los otros cinco los esperaban.

Periandro: —Salud, queridos colegas, ¿Qué os ha pasado que venís tan agitados?

—Casi nada —contestó Solón— que yo, mucha fama de sabio y Bías me engaña como a un cretense, que todavía no puedo decir “como a un indio con espejitos” ya que aún no sabemos que existe América.

—¿Qué te ha pasado? —preguntó Thales— Explícamelo tú, que para eso eres matemático.

— “No lo soy, el matemático eres tú” —contestó Solón—, pero igual te contestaré. Bías y yo teníamos que recorrer una distancia de 50 kilómetros. Disponíamos de un caballo que marchaba a 10 km/h, pero solo podía llevar a uno por vez.

—Pues vaya caballo —dijo Thales, sonriendo—. Estos del transporte están muy pretensiosos, me recuerda al burro que solo podía cargar 300 zanahorias para llevarlas hasta el mercado.

—¿Qué burro? —preguntó Bías.

—El del capítulo IX —le respondió Thales.

—¿Y eso? —protestó Bías— Recién estamos en el prefacio de este libro y tú te refieres al capítulo IX. Sigue tú, Solón.

—Sí, ¿qué le vamos a hacer?, pero no teníamos otro. Pues bien, yo caminaba a razón de 5 km/h y Bías a 8 km/h. —dijo Solón.

—¿Y eso? —preguntó, desconcertado, Cleóbulo de Lindos.

—Es que Bías es más joven que yo —contestó Solón—. Así que decidimos turnarnos andando a pie y cabalgando. Cada uno ataba el caballo a un árbol tras su cabalgata, para que lo recogiera el otro, y continuaba a pie. De esta forma llegamos a la mitad del camino al mismo tiempo y descansamos media hora. Después repetimos la misma combinación para llegar simultáneamente al final del trayecto. Y como estoy mareado y confundido, pregunto: ¿A qué hora hemos llegado a nuestro destino si salimos a las 6 de la mañana? O sea, ¿qué hora es? —preguntó Solón después de plantear el problema.

Todos iban a consultar sus relojes de arena de bolsillo, menos Pitaco de Mitilene que lo llevaba sujeto a la muñeca con una correa de cuero convencido de que era un invento con futuro, cuando Thales exclamó:

—¡No! ¡Quietos! Ya que sois tan sabios, ¿por qué no intentáis resolver la historia como un problema?

—Hombre, por qué yo, por ejemplo, soy más tirano y sabio que matemático, y a mí los cálculos, la verdad... —reconoció Periandro de Corinto, acobardado por el desafío de Thales y añadió— Pero, en cambio, ¡ayer se me ocurrió una sentencia agudísima!, escuchad: “Los placeres son mortales, las virtudes inmortales”.

—¿Y a qué viene eso? —preguntó Bías de Priene, aún agotado por el cansancio de la caminata.

—Para que vierais que, a pesar de que no se me den bien las matemáticas, también quiero que se me considere sabio.

—Pues a mí se me acaba de ocurrir otra sentencia —dijo Cleóbulo de Lindos— escuchad: “Ocupémonos de comportarnos bien con el cuerpo y con el alma”.

—Pues a mí se me ha ocurrido otra... —empezó a decir Solón.

—Y a mí otra... —dijo Quilón.

—Y a mí... —gritó Pitaco.

—Y a mí... —exclamó Bías.

—¡Un momento, por favor! —clamó súbitamente un extraño.

Todos se volvieron al escuchar la llamada de atención del extraño que, saliendo del templo, se dirigía sonriente hacia la alborotada reunión.

—Soy Quinótides, profesor de geometría y estoy atascado en un problema. Así que me he dicho: si estos señores son los siete sabios de Grecia, pues bien, me podrían echar una mano. Así que ahí va el enunciado del problema que me tiene loco: “Dadas dos circunferencias concéntricas trazamos una tangente a la interior que corta a la exterior en 2 puntos. La distancia entre cualquiera de estos puntos y el punto de tangencia es 1 m. ¿Puedes hallar el área de la corona circular que determinan las dos circunferencias?”

—Bueno, es facilísimo —dijo Cleóbulo.

—Realmente sencillo —añadió Solón.

—Pero fácil, fácil —indicó Quilón.

—Una tontería —observó Bías.

—Muy simple —aseguró Pitaco—. Ese problema no tiene solución. Para resolver un círculo necesitas un dato. Para resolver la corona circular, necesitas dos datos.

—Elemental, elemental —señaló, muy pedante, Periandro.

—Muy bien —dijo el profesor de geometría y preguntó— Pero ¿cuál es la solución?

—Bueno, yo es que... ahora no tengo tiempo porque estoy puliendo una sentencia preciosa —se disculpó Quilón—, a ver si os gusta: “Que tu lengua no se adelante a tu razón”.

Y se despidió de Thales para bajar hacia el centro de Delfos mientras disimulaba, fingiendo estar abstraído en la elaboración de una nueva sentencia.

Los demás, al ver cómo su compañero se quitaba el problema de encima, le siguieron rápidamente fingiendo estar ocupadísimos en pensar sentencias que era a lo que se dedicaban fundamentalmente todos los sabios, menos Thales.

—“Si eres adolescente aplícate en la acción, si eres anciano en la sabiduría”. ¿A que está bien esta sentencia? —le preguntó Bías a Periandro, dándole un codazo, mientras continuaban descendiendo hacia el centro de Delfos.

—Sí, pero la mía es mejor —se entrometió Pitaco—. Escuchad: “No cuentes tus proyectos, porque si fracasas se reirán de ti”.

—¿Y que me decís de esta: “Cuando hayas aprendido a obedecer, sabrás mandar”? —les preguntó orgulloso, Solón.

—Esta las supera a todas: “En las ocasiones buenas no seas orgulloso y en las malas no te humilles” —dijo Cleóbulo, mirando hacia atrás para ver la cara de estupor del profesor de geometría.

—Y además “Sé previsor en todas las cosas”, así que ya sabes “Es mejor morir con dinero ahorrado que vivir necesitado” —añadió Periandro.

—¡Eh, un momento! Eso no vale. No se pueden decir las sentencias de dos en dos —saltó Solón.

—¿Y por qué no? —le preguntó desconcertado Periandro.

—Pues... no lo sé; pero en Atenas somos muy sentenciosos y no presumimos de ello. Yo tengo un montón de sentencias que serán las mejores de la Historia y no voy por ahí diciéndolas de dos en dos.

—Más tengo yo, y tampoco voy presumiendo de ellas. Tengo patentadas más de 200 sentencias —dijo Pitaco.

—¡Y yo más de 300! —exclamó Bías.

Y así, discutiendo quién era el que más sentencias había creado, llegaron lentamente al mesón “Etoctse” en el que comenzaría la celebración por el grabado de la sentencia del más conspicuo de los sabios, su colega Thales, recién grabada en el frontón del templo.

Y allí seguían discutiendo y gritando “Y yo más, y yo más” cuando entraron Thales y Quinótides, contentos de haber resuelto el problema de la corona circular.

—Por suerte, estabas tú —le dijo Quinótides a Thales—, “ya que tus amigos, muy sabios, pero se sacaron el problema con la excusa de las sentencias.

—Suerte que me encontraste —dijo Thales a Quinótides—, ya que Pitágoras todavía no nació, y si Pitágoras no quisiera ayudarte, tendrías que esperar hasta el tercer milenio y consultar con la Ingeniera Eleonora que ya lo resolvió.

—¿Cómo sabes estas cosas maestro? —le preguntó perplejo Quinótides.

—Pitágoras de Samos..., Eleonora de Argentum... son recuerdos del futuro querido profesor.

—¿Qué tal, mis queridos colegas? —preguntó Thales mientras ingresaba al mesón— Ya veo que seguís dándole vueltas a la importancia de sus propias sentencias y apotegmas, pero yo me pregunto, ¿no tenéis curiosidad por saber el resultado del problema de las dos circunferencias?

Nadie respondió y todos siguieron con la discusión por saber quién era el de mayor cantidad de sentencias. Hicieron de cuenta que no lo escucharon a Thales.

Entonces Thales les dijo: —Pues vais a tener vuestro justo castigo. Escuchad: las autoridades de Delfos para festejar el grabado de mi sentencia en el templo de Apolo nos invitaban a este ágape. Y he dicho bien “nos invitaban” porque les he propuesto que utilicen el dinero para que erijan una estatua al auriga vencedor de la próxima carrera de caballos, que espero sea más rápido que el de Solón y Bías y menos pretencioso que el burro de las zanahorias. Seguro que esta escultura se hará famosísima y se la conocerá como “El auriga de Delfos”. Y las autoridades aceptaron la propuesta.

—¿Y quién pagará el ágape? —preguntaron aterrados los seis sabios al unísono.

—El último en resolver este problema, tomad nota e intentad resolverlo por separado: “Al intercambiar los dígitos de un número de 3 cifras de modo que ningún dígito quede en su posición original, resultarán 2 número de 3 cifras. Al restar el número viejo menos el número nuevo, resultará un número de 2 cifras que es cuadrado perfecto. Hallar todos los resultados posibles”.

—Pero... —iba a protestar Cleóbulo.

—¡Pero nada! —exclamó Thales— Mucha sentencia, mucha sentencia y no eres digno de ellas. Ni tú ni tus amigos.

—Vamos a ver —siguió Thales—. Cleóbulo, tú mucho dices “La moderación es la cosa mejor” y eres un inmoderado que abusa de la comida y la bebida y de otros placeres que el decoro me impide nombrar. Y tú no te rías, Solón, ya que predicas que “Nada en demasía” y estoy viendo que se te ha ido la mano en el vino. Y tú lo mismo, Quilón, que mucho decir “Cuando bebas guárdate de hablar mucho, pues cometerás faltas” y veo la jarra de tinto que ya está vacía a tu lado. Y tú, Pitaco, mucho decir “Devuelve lo que se te haya confiado” y todavía no me has devuelto la lira que te presté para el

cumpleaños de tu hija y aun me debes 80 monedas de plata desde hace dos años. Y a ver si prestas atención, Bías, que tu sentencia preferida es “Sé un oyente complaciente” y no estás haciendo ni caso. Y no digamos, Periandro, que de tanto repetir “El descanso es cosa buena” no pega golpe en casa, que me lo ha dicho su mujer. Así que, calladitos y a trabajar. Vamos.

Thales dio dos sonoras palmadas como punto final a su largo y acusador discurso y sirvió dos copas de vino para él y para su amigo Quinótides, mientras observaba cómo sus colegas, avergonzados, empezaban a hacer sus cálculos, aterrados ante la posibilidad de tener que pagar la cuenta que seguro, como en el problema, ascendería a un número de tres cifras.

—Está bien esto de las sentencias —dijo el profesor de geometría, compadeciéndose de los sabios y tratando de simpatizar con ellos.

—Ya lo creo —dijo Thales con su ánimo claramente más sereno—. Además, mis seis amigos sabios y yo estamos muy contentos ya que a finales del siglo IV a. de C., más o menos, Demetrio de Fáleros, que será discípulo de mi discípulo Aristóteles, recogerá todas nuestras sentencias para que pasen a la posteridad y se puedan leer hasta por Internet.

—¿Y en qué trabajas ahora, querido maestro?

—Pues acabo de determinar el número exacto de días que tiene un año y un método infalible para que los marinos se guíen en sus peligrosas travesías utilizando la constelación de la Osa Mayor.

—¡Qué maravilla! —exclamó Quinótides.

—Pues eso no es nada; ahora estoy muy entretenido con sacar adelante un teorema que se llamará, por supuesto, el teorema de Thales, que para eso lo estoy inventando yo. Es que aquí hay que ponerle tu nombre a todo, que luego cualquiera de estos —y señaló a sus seis colegas que se devanaban los sesos tratando de resolver el problema— se lo adjudica. Aunque mi problema mayor es el agua ya que “El principio original de todas las cosas es el agua, de la que todo procede y a la que todo vuelve”. Y el mesonero que nos ha servido este vino debe de estar de acuerdo con este principio, porque tienes que reconocer que lo ha bautizado en exceso. Este mesonero debe creerse de Argentum, un país del sur del continente con el que tropezará don Cristóforo, dentro de 2.000 años. Así que vamos a otro mesón a ver si encontramos mejor vino y a lo mejor, con un poco de suerte, mejores sabios.

—¿Quién es don Cristóforo? —preguntó Quinótides.

—Pues todavía no es —le dijo Thales—. Este navegante genovés recién asomará sobre la faz de la tierra antes del Renacimiento. Y se hará llamar Colombo. Luego descubrirá que la Tierra es redonda (en realidad se apropiará del descubrimiento del pobre Eratóstenes). Convencerá a los reyes de la Hispania para que le financien un viaje a las Indias. Por suerte para él se encontrará con el continente que ya te dije.

—¿De Argentum el mesonero? —siguió preguntando Quinótides con notoria curiosidad— Ya habías mencionado ese sitio en oportunidad de las circunferencias concéntricas.

—Pues sí, Quinótides —respondió Thales— Ese país donde se creen los más listos del mundo. Los más listos y los mejores del mundo.

Y Thales y Quinótides salieron del mesón dejando a los seis sabios enfrascados, y no como el vino, precisamente, en otra discusión ya que ninguno avanzaba en la resolución del problema del número de tres cifras.

—¿Qué te ocurre Quinótides? Te noto preocupado —le preguntó Thales a su amigo, ya fuera del mesón, en la claridad del aire libre y el cielo azul.

—Ustedes, los sabios de Grecia son famosos y serán siempre recordados, mientras que yo caeré en el olvido para la eternidad. ¿Podrías hacer algo por mí para que sea famoso y recordado?

—¡No te preocupes, Quinótides! Serás recordado como el profesor de Geometría de la antigua Grecia que inspiró el talento de un tal Thales para que resuelva el problema de la corona circular antes del nacimiento de Pitágoras. Y seguramente estaremos nombrados en el prefacio de un libro que será escrito por un profesor de matemática o ingeniero o algo así en Argentum a mediados del primer tercio del tercer milenio.

—¡Pero el tercer milenio ya pasó! ¿Qué es un libro?

—El que ya pasó es el tercer milenio a.C. Estamos aproximadamente a 500 años de la llegada de El Salvador, el Cristo que se llamará Jesús (que dividirá la historia antes y después de él) y a 2500 años de ser nombrados y reconocidos en ese libro que te hablé, que ahora está en manos de quien lo está leyendo, que por suerte así se llamará el compendio de folios prolijamente encuadernados. Ahora los escritos los hacemos sobre los papiros que traemos de Egipto y los enrollamos en delicados teucos.

Nota 1: Cuentan los que conocieron esta historia que luego de esta conversación, Quinótides fue feliz por el resto de sus días y Thales de Mileto también.

Nota 2: Demetrio de Fáleros cuenta también que ninguno de los seis sabios logró resolver el problema, así que, maldiciendo a Thales, decidieron pagar la cuenta del ágape a Escote (que así se llamaba el mesonero).

Nota 3: Quinótides, que se enteró de la maldición a Thales, se animó a presagiar la maldición sobre el autor que echarán los lectores de ese libro que mencionó Thales, porque no podrán resolver ninguno de los 3 problemas planteados en esta historia.

Nota 4: Cuando Thales se enteró del presagio de Quinótides, ya había escrito el teorema que lleva su nombre y que dice: “Si tres o más sabios son atravesados por las transversales de la inspiración y la imaginación, las sentencias para guiar la conducta humana surgidas sobre la inspiración son directamente proporcionales a las correspondientes a la imaginación”.

## A stylized, textured illustration of an elderly man with a large, bushy white beard and a small, round, light-colored cap. He has a serious, almost stern expression, with deep-set eyes and a prominent nose. The background is a soft, warm yellow.



# CAPÍTULO I

## GEOMETRÍA PLANA

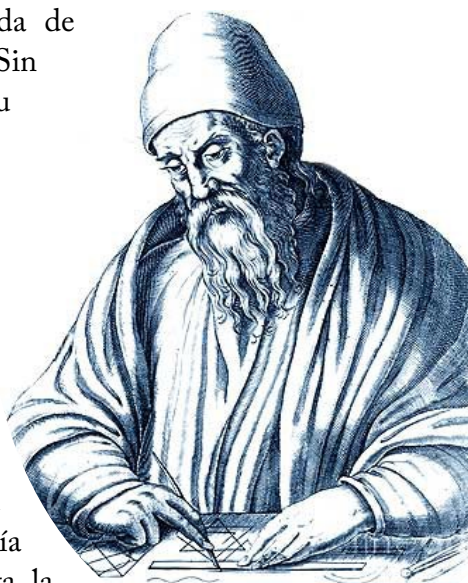
---

### EUCLIDES

Aproximadamente hace 2400 años, Euclides de Alejandría (330 a.C.-275 a.C.) escribió los *Elementos*, hasta hace poco mundialmente utilizado como el libro de texto de geometría. El expresidente de Estados Unidos, Abraham Lincoln, estudió este libro para agudizar su mente y de verdad entender la deducción matemática. Incluso hoy en día, sigue siendo la base de lo que consideramos un primer curso en geometría. Esta lección da un poco de contexto sobre los *Elementos* y luego sienta las bases conceptuales de puntos, líneas, círculos y planos, conceptos que usaremos en nuestro viaje a través del mundo de Euclides.

Junto con Arquímedes y Apolonio de Perга, posteriores a él, Euclides fue pronto incluido en la tríada de los grandes matemáticos de la Antigüedad. Sin embargo, a la luz de la inmensa influencia que su obra ejercería a lo largo de la historia, hay que considerarlo también como uno de los más ilustres de todos los tiempos.

Euclides ha sido un gran compilador del saber matemático griego. Su gran mérito reside en su labor de sistematización: partiendo de una serie de definiciones, postulados y axiomas, estableció por rigurosa deducción lógica todo el armonioso edificio de la geometría griega. Juzgada como uno de los más altos productos de la razón humana, la geometría euclidiana mantendría su vigencia durante más de veinte siglos, hasta la aparición, ya en el siglo XIX, de las llamadas *geometrías no euclidianas*.



### Biografía

Poco se conoce a ciencia cierta de la biografía de Euclides, pese a ser el matemático más famoso de la Antigüedad. Es probable que se educara en Atenas, lo que permitiría explicar su buen conocimiento de la geometría elaborada en la escuela de Platón.

Euclides enseñó en Alejandría, donde abrió una escuela que acabaría siendo la más importante del mundo helénico, y alcanzó un gran prestigio en el ejercicio de su magisterio durante el reinado de Ptolomeo I Sóter, fundador de la dinastía ptolemaica que gobernaría Egipto desde la muerte de Alejandro Magno hasta la ocupación romana. Se cuenta que el rey lo requirió para que le mostrara un procedimiento abreviado para acceder al conocimiento de las matemáticas, a lo que Euclides repuso que no existía una vía regia para llegar a la geometría. Este epigrama, sin embargo, se atribuye también al matemático Menecmo, como réplica a una demanda similar por parte de Alejandro Magno.

La tradición ha conservado una imagen de Euclides como hombre de notable amabilidad y modestia, y ha transmitido asimismo una anécdota relativa a su enseñanza, recogida por Juan Estobeo: un joven principiante en el estudio de la geometría le preguntó qué ganaría con su aprendizaje. Euclides le explicó que la adquisición de un conocimiento es siempre valiosa en sí misma; y dado que el muchacho tenía la pretensión de obtener algún provecho de sus estudios, ordenó a un sirviente que le diera unas monedas.

### Los *Elementos* de Euclides

Euclides fue autor de diversos tratados, pero su nombre se asocia principalmente a uno de ellos, los *Elementos*, que rivaliza por su difusión con las obras más famosas de la literatura universal, como la Biblia o el *Quijote*. Se trata, en esencia, de una compilación de obras de autores anteriores (entre los que destaca Hipócrates de Quíos).

De los trece libros que la componen, los seis primeros corresponden a lo que se entiende todavía como geometría plana o elemental. En ellos Euclides recoge las técnicas geométricas utilizadas por los pitagóricos para resolver lo que hoy se consideran ejemplos de ecuaciones lineales y cuadráticas; se incluye también la teoría general de la proporción, atribuida tradicionalmente a Eudoxo.

Los libros del séptimo al décimo tratan de cuestiones numéricas: las principales propiedades de la teoría de los números (divisibilidad, números primos), los conceptos de conmensurabilidad de segmentos a sus cuadrados y las cuestiones relacionadas con las transformaciones de los radicales dobles. Los tres restantes se ocupan de la geometría de los sólidos, hasta culminar en la construcción de los cinco poliedros regulares y sus esferas circunscritas, que habían sido ya objeto de estudio por parte de Teeteto.

De las restantes obras de Euclides sólo poseemos referencias o breves resúmenes de comentaristas posteriores. Los tratados sobre los *Lugares superficiales* y las *Cónicas* ya contenían, al parecer, algunos de los resultados expuestos posteriormente por Apolonio de Perga. En los *Porismas* se desarrollan los teoremas geométricos denominados actualmente de tipo proyectivo; de esta obra sólo conservamos el resumen trazado por Pappo de Alejandría. En *Óptica* y *Catóptica* se estudiaban las leyes de la perspectiva, la propagación de la luz y los fenómenos de reflexión y refracción.

### Dos mil años de vigencia

La influencia posterior de los *Elementos* de Euclides fue decisiva; tras su aparición, se adoptó de inmediato como libro de texto ejemplar en la enseñanza inicial de la

matemática, con lo cual se cumplió el propósito que debió de inspirar a Euclides. Tras la caída del Imperio Romano, su obra fue preservada por los árabes y de nuevo ampliamente divulgada a partir del Renacimiento.

Más allá incluso del ámbito estrictamente matemático, Euclides fue tomado como modelo, en su método y exposición, por autores como Galeno, para la medicina, o Spinoza, para la ética. También filósofos y científicos de todas las épocas tuvieron en mente el admirable rigor lógico de la geometría de Euclides.

De hecho, Euclides estableció lo que había de ser la forma clásica de una proposición matemática: un enunciado deducido lógicamente a partir de unos principios previamente aceptados. En el caso de los *Elementos*, los principios que se toman como punto de partida son veintitrés definiciones, cinco postulados y cinco axiomas o nociones comunes.

La naturaleza y el alcance de dichos principios han sido objeto de frecuente discusión a lo largo de la historia, en especial por lo que se refiere a los postulados y, en particular, al quinto postulado, llamado de las paralelas. Según este postulado, por un punto exterior a una recta sólo puede trazarse una paralela a dicha recta. Su condición distinta respecto de los restantes postulados fue ya percibida desde la misma Antigüedad, y hubo diversas tentativas de demostrar el quinto postulado como teorema.

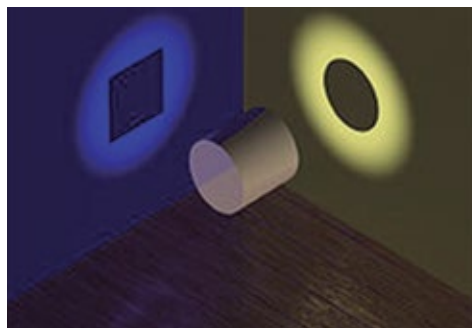
Los esfuerzos por hallar una demostración resultaron infructuosos y prosiguieron hasta el siglo XIX, cuando algunos trabajos inéditos de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y las investigaciones del matemático ruso Nikolai Lobachevski (1792-1856) evidenciaron que era posible definir una geometría perfectamente consistente (la geometría hiperbólica) en la que no se cumplía el quinto postulado. Se iniciaba así el desarrollo de las geometrías no euclidianas, de entre las que destaca la geometría elíptica del matemático alemán Bernhard Riemann (1826-1866), juzgada por Albert Einstein como la que mejor representa el modelo de espacio-tiempo relativista.

Los axiomas de la geometría son:

- Punto
- Recta
- Plano
- Espacio

## FUNDAMENTOS DE DISEÑO

En todo diseño se tienen en cuenta lo conceptual y lo visual. Son elementos conceptuales aquellos que no son visibles: el **punto**, la **línea**, el **plano** y el **volumen**. Cuando los elementos conceptuales se hacen visibles, adquieren forma.



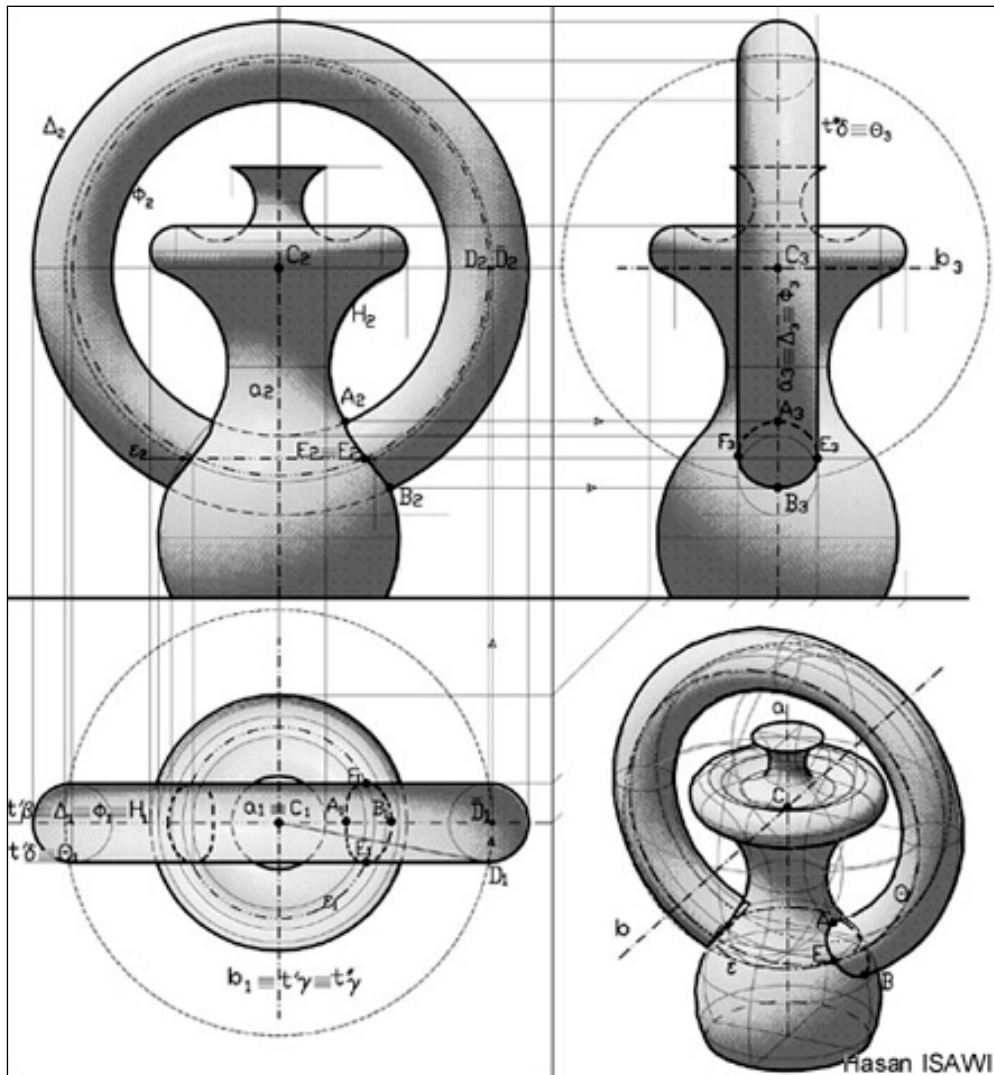
*Cilindro proyectado en dos planos*

## GEOMETRÍA DESCRIPTIVA

La geometría descriptiva es un conjunto de técnicas geométricas que permite representar el espacio tridimensional sobre una superficie bidimensional. Por tanto, mediante una «lectura» adecuada, posibilita resolver problemas espaciales en dos dimensiones de modo que se garantiza la reversibilidad del proceso.

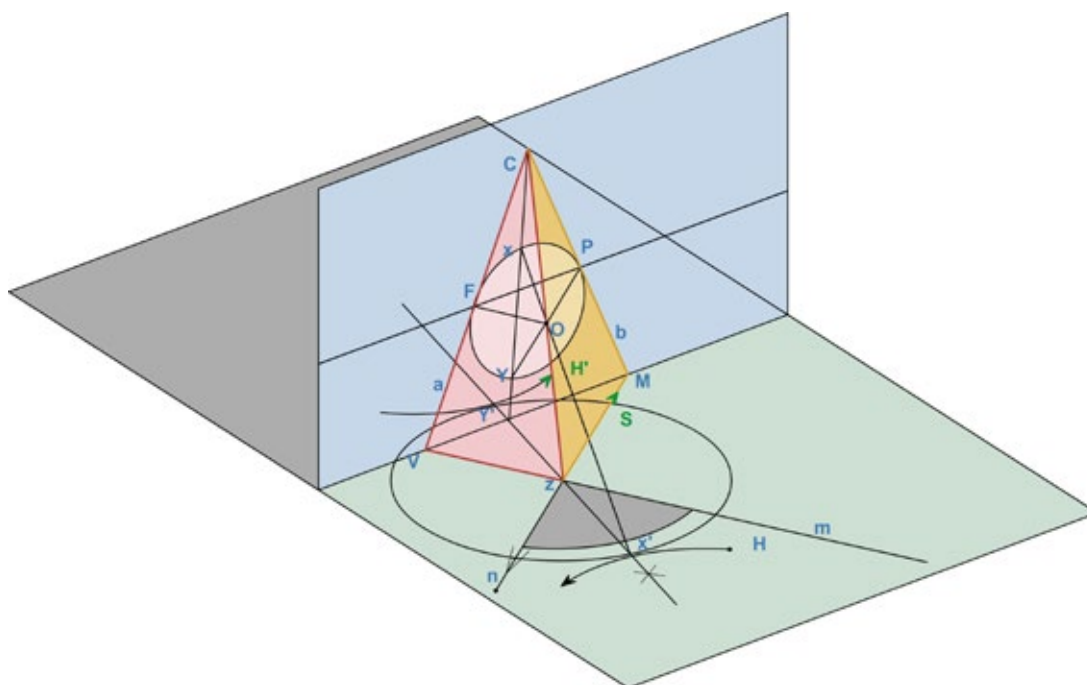
En la época actual se reconocen dos modelos, en los cuales se les considera:

1) «Lenguaje» de representación y de sus aplicaciones; 2) tratado de geometría. Aunque no es exactamente lo mismo, su desarrollo ha estado relacionado con el de la Geometría proyectiva.



Cuatro representaciones bidimensionales (2D) del mismo objeto tridimensional (3D). Dos vistas, una planta y una perspectiva.

Se debe observar la correspondencia de trazos en las vistas y la planta.



## Un poco de historia

La geometría proyectiva ha tenido su época de desarrollo en el siglo XIX y a principios del siglo XX, aunque algunos de sus resultados ya eran conocidos desde mucho antes.

Podemos citar a Menelao, quien entre los años 200-400 aproximadamente hace un profundo estudio sobre triángulos esféricos, completado por Ptolomeo, quien también desarrolla el estudio de proyecciones para la construcción de cartas geográficas.

La época siguiente corresponde a los trabajos de Diofanto y Pappus. El principal problema de Pappus, también conocido como lugar determinado por 3 o 4 rectas, pide: dadas 3 rectas de un plano, hallar el lugar geométrico de los puntos  $P$  que se mueven de tal manera que el cuadrado del segmento  $PA$ , trazado con un ángulo fijo a una de las rectas, es proporcional al producto de los segmentos  $PB$  y  $PC$ , trazados a las otras dos con el mismo ángulo.

Apolonio, el gran geómetra, ya había estudiado el problema. Pappus prueba que, en todos los casos, el lugar geométrico es una cónica; y extiende el problema a 6 rectas. No puede analizar el problema para 8 rectas, ya que aparecería entonces un producto de 4 segmentos, que no tiene significado geométrico; el de 3 es un volumen. Pappus también trabaja las relaciones entre foco y directriz.

La geometría proyectiva reaparece con la mirada propia de los artistas y arquitectos del Renacimiento, quienes en su búsqueda de una fundamentación matemática para la teoría de perspectiva (representación bidimensional de objetos tridimensionales), trabajaron sobre conceptos geométricos como secciones y proyecciones: Piero Della Francesca (1410-1492); Leone Battista Alberti (1404-1472); Leonardo Da Vinci (1452-1519) y Alberto Durero (1471-1528). Alberto Durero, pintor, publica un libro

llamado *Introducción sobre la medida con regla y compás de figuras planas y sólidas*. El libro tiene algunas justificaciones, aunque está pensado esencialmente para artistas. El estudio de propiedades geométricas invariantes por proyectividades surge de algunos problemas de perspectiva, ya estudiados, por ejemplo, por Leonardo Da Vinci.

La mirada científica viene de la mano de Galileo (1564-1642) que analiza curvas como la cicloide y la catenaria, y conjetura acertadamente que el área de la cicloide es el triple de la del círculo que la genera, pero se equivoca al identificar ambas curvas (la cicloide y la catenaria). También de Kepler (1571-1630), quien dio su nombre al foco. Kepler introduce la idea del principio de continuidad unificado, que permite definir las cónicas a partir del movimiento de uno de los focos.

El matemático francés Gérard Desargues (1591-1661), arquitecto e ingeniero militar de Lyon, introdujo este tipo de métodos en su estudio de las cónicas. Sus desarrollos de las nociones proyectivas fundamentales y de los nuevos métodos de demostración (ahora válidos para todas las cónicas, a diferencia de los griegos que tenían métodos distintos para diferentes casos) generan un avance significativo desde la época de Apolonio. Influidos por él, los desarrollos son continuados por Blaise Pascal (1623-1662) y Philippe de Hire (1649-1718).

Blaise Pascal (1623-1662) publicó a los 16 años su *Ensayo para las cónicas*, donde desarrolla el hexagrama místico, hoy conocido como teorema de Pascal. Aparece entonces la geometría descriptiva con Gaspard Mongue (1746-1818), que trabaja esencialmente en la proyección bidimensional de objetos tridimensionales y logra despertar un nuevo interés por la geometría en Francia.

Se desarrolla la geometría proyectiva con Carnot (1785-1823), Víctor Poncelet (1778-1867), Charles (1793-1880); que se extiende rápidamente a otros países europeos con Moebius (1790-1868), Steiner (1790-1863), Staudt (1798-1867) y Cayley (1821-1895).

Cabe señalar que un estudio sistemático en este sentido recién fue realizado a fines del siglo XVIII, cuando un oficial francés, J.V. Poncelet (1788-1867), escribió su famoso *Traité des propriétés projectives des figures* en 1813, siendo prisionero de guerra en Rusia.

Finalmente, en el siglo XIX, aparecen las geometrías no euclidianas de la mano de Karl F. Gauss (1777-1855), Janos Bolyai (1802-1860) y Lobachevski (1793-1856), quienes desarrollaron una geometría en que por un punto exterior a una recta pasan dos paralelas a esta; y Riemann (1826-1866) que desarrolla la geometría propia.

La prueba de indemostrabilidad del 5° postulado de Euclides recién la lograrán Beltrami (1835-1900) y Klein (1849-1925). La idea de clasificar las propiedades geométricas según clases de transformaciones fue propuesta por Felix Klein.

Ya Galois (1811-52) había entrevisto la idea de grupo como algo importante en los desarrollos algebraicos, pero la idea de englobar las distintas geometrías usando esta noción fue desarrollada por Christian Felix Klein (1849-192) en su programa de Erlangen.

Para captar la esencia del programa de Erlangen, pensemos en un proyector de imágenes que, puesto en una determinada posición, permite captar una imagen ampliada de la figura original. Si movemos la pantalla, obtendremos deformaciones, pero como siempre transforma rectas en rectas, tendrá invariantes proyectivos (es decir, las transformaciones son colineaciones, que conservan las razones dobles).