

Stefan Hartmann

Prüfungstrainer Technische Mechanik



Stefan Hartmann

**Prüfungstrainer
Technische Mechanik**

Stefan Hartmann

Prüfungstrainer Technische Mechanik

WILEY-VCH
Verlag GmbH & Co. KGaA

Autor

Stefan Hartmann

TU Clausthal
Festkörpermechanik
Adolph-Roemer-Str. 2a
38678 Clausthal-Zellerfeld
Deutschland

Alle Bücher von Wiley-VCH werden sorgfältig erarbeitet. Dennoch übernehmen Autoren, Herausgeber und Verlag in keinem Fall, einschließlich des vorliegenden Werkes, für die Richtigkeit von Angaben, Hinweisen und Ratschlägen sowie für eventuelle Druckfehler irgendeine Haftung.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2016 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Boschstr. 12, 69469 Weinheim, Germany

Alle Rechte, insbesondere die der Übersetzung in andere Sprachen, vorbehalten. Kein Teil dieses Buches darf ohne schriftliche Genehmigung des Verlages in irgendeiner Form – durch Photokopie, Mikroverfilmung oder irgendein anderes Verfahren – reproduziert oder in eine von Maschinen, insbesondere von Datenverarbeitungsmaschinen, verwendbare Sprache übertragen oder übersetzt werden. Die Wiedergabe von Warenbezeichnungen, Handelsnamen oder sonstigen Kennzeichen in diesem Buch berechtigt nicht zu der Annahme, dass diese von jedermann frei benutzt werden dürfen. Vielmehr kann es sich auch dann um eingetragene Warenzeichen oder sonstige gesetzlich geschützte Kennzeichen handeln, wenn sie nicht eigens als solche markiert sind.

Umschlaggestaltung Adam-Design, Weinheim, Deutschland

Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig, Deutschland

Print ISBN 978-3-527-33700-2

ePDF ISBN 978-3-527-68165-5

ePub ISBN 978-3-527-68164-8

Mobi ISBN 978-3-527-68163-1

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort IX

Ziele der Aufgabensammlung XI

Teil I Statik starrer Körper 1

- 1 Einführung in die Vektorrechnung** 3
 - 1.1 Beispiele zur Vektorrechnung 6
 - 1.2 Aufgaben zur Vektorrechnung 14
 - 1.3 Ergebnisse der Aufgaben zu Abschn. 1.2 19

- 2 Kraftsysteme** 23
 - 2.1 Beispiele zu Kraftsystemen 25
 - 2.2 Aufgaben zu Kraftsystemen 34
 - 2.3 Ergebnisse der Aufgaben zu Abschn. 2.2 39

- 3 Schwerpunktsberechnungen** 41
 - 3.1 Beispiele zur Schwerpunktsberechnung 47
 - 3.1.1 Linienschwerpunkt 47
 - 3.1.2 Flächenschwerpunkt 48
 - 3.1.3 Volumenschwerpunkt 51
 - 3.2 Aufgaben zur Schwerpunktsberechnung 53
 - 3.3 Ergebnisse der Aufgaben zu Abschn. 3.2 57

- 4 Strukturelemente** 59
 - 4.1 Beispiele zur Lager- und Schnittgrößenberechnung 59
 - 4.1.1 Berechnung der statischen Bestimmtheit 59
 - 4.1.2 Berechnung von Lagerreaktionen 63
 - 4.1.3 Berechnung statisch bestimmter Fachwerke 69
 - 4.1.4 Schnittgrößen in Balkenstrukturen 71
 - 4.1.5 Seil- und Bogenberechnung 85
 - 4.2 Aufgaben zur Lager- und Schnittgrößenberechnung 94

- 4.2.1 Statische Bestimmtheit 94
- 4.2.2 Freischneiden und Berechnung von Lagerreaktionen 95
- 4.2.3 Fachwerkberechnung 100
- 4.2.4 Schnittgrößenberechnung 102
- 4.2.5 Seil- und Bogenberechnung 105
- 4.3 Ergebnisse der Aufgaben zu Abschn. 4.2 106

5 Reibung 111

- 5.1 Beispiele zur Haft- und Seilreibung 112
 - 5.1.1 Haftreibung 112
 - 5.1.2 Seilreibung 115
- 5.2 Aufgaben zur Haft- und Seilreibung 116
 - 5.2.1 Haftreibung 116
 - 5.2.2 Seilreibung 118
- 5.3 Ergebnisse der Aufgaben zu Abschn. 5.2 119

Teil II Statik elastischer Körper 121

6 Eindimensionaler Spannungs- und Verzerrungszustand 123

- 6.1 Beispiele zu eindimensionalen, linear elastischen Festkörpern 123
 - 6.1.1 Der Zug-Druckstab 123
 - 6.1.2 Die Fachwerkberechnung 128
- 6.2 Aufgaben zum eindimensionalen, linear elastischen Festkörper 131
 - 6.2.1 Zug-Druckstab 131
 - 6.2.2 Fachwerkberechnung 134
- 6.3 Ergebnisse zu Abschn. 6.2 137

7 Mehrdimensionale Spannungs- und Verzerrungszustände 141

- 7.1 Beispiele dreidimensionaler, isotroper Elastizität 141
 - 7.1.1 Kinematik 141
 - 7.1.2 Spannungsberechnung 152
 - 7.1.3 Elastizität und Gleichgewicht 160
- 7.2 Aufgaben zum dreidimensionalen, linear elastischen Festkörper 168
 - 7.2.1 Kinematik 168
 - 7.2.2 Spannungszustand 169
 - 7.2.3 Dreidimensionale Elastizität 171
- 7.3 Ergebnisse zu Abschn. 7.2 173

8 Technische Balkentheorie 179

- 8.1 Beispiele zu Balkensystemen 179
 - 8.1.1 Einfache Balkenberechnung 179
 - 8.1.2 Flächenträgheitsmomente 191
 - 8.1.3 Unstetige Lasten – Föppl-Symbolik 199
 - 8.1.4 Normalspannungsberechnung bei Balken 203

| | | |
|--|--|------------|
| 8.1.5 | Zweiachsige Biegung | 206 |
| 8.1.6 | Torsion | 211 |
| 8.1.7 | Biegung mit Querkraft | 219 |
| 8.1.8 | Knicken von Stäben | 235 |
| 8.2 | Aufgaben zur Balkenberechnung | 241 |
| 8.2.1 | Einfache Biegeprobleme | 241 |
| 8.2.2 | Flächenträgheitsmomente | 243 |
| 8.2.3 | Normalspannungsberechnung bei Balken | 246 |
| 8.2.4 | Föppl-Symbolik | 249 |
| 8.2.5 | Zweiachsige Biegung | 252 |
| 8.2.6 | Torsion | 255 |
| 8.2.7 | Biegung mit Querkraft | 259 |
| 8.2.8 | Knicken von Stäben | 262 |
| 8.3 | Ergebnisse zu Abschn. 8.2 | 264 |
| 9 | Energiemethoden der Elastostatik | 275 |
| 9.1 | Beispiele zu Energiemethoden | 275 |
| 9.2 | Aufgaben zu Energiemethoden | 295 |
| 9.3 | Ergebnisse zu Abschn. 9.2 | 299 |
| | | |
| Teil III Dynamik starrer Körper 301 | | |
| | | |
| 10 | Kinematik von Punktmassen und starren Körpern | 303 |
| 10.1 | Beispiele zur Kinematik sich bewegender Körper | 306 |
| 10.1.1 | Punktbewegung | 306 |
| 10.1.2 | Starrkörperbewegung | 316 |
| 10.1.3 | Bewegte Bezugssysteme | 328 |
| 10.2 | Aufgaben zur Kinematik | 338 |
| 10.2.1 | Punktbewegung | 338 |
| 10.2.2 | Starrkörperbewegung | 341 |
| 10.2.3 | Relativbewegung | 344 |
| 10.3 | Ergebnisse zu Abschn. 10.2 | 345 |
| | | |
| 11 | Bilanzgleichungen der Mechanik | 349 |
| 11.1 | Beispiele zur Anwendung des Impuls- und Drehimpulssatzes | 352 |
| 11.1.1 | Impulssatz bei Punktmassen | 352 |
| 11.1.2 | Berechnung von Massenträgheitsmomenten | 364 |
| 11.1.3 | Ebene Starrkörperbewegung | 379 |
| 11.1.4 | Bewegte Bezugssysteme | 393 |
| 11.2 | Aufgaben zum Impuls- und Drehimpulssatz | 409 |
| 11.2.1 | Impulssatz bei Punktmassen | 409 |
| 11.2.2 | Massenträgheitsmomente | 412 |
| 11.2.3 | Ebene Starrkörperbewegung | 414 |
| 11.2.4 | Bewegte Bezugssysteme | 420 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 11.3 | Ergebnisse zu Abschn. 11.2 | 427 |
| 12 | Bilanz der mechanischen Leistung/Energiesatz | 437 |
| 12.1 | Beispiele zu Energiebetrachtungen | 437 |
| 12.1.1 | Punktmassen | 437 |
| 12.1.2 | Starrkörper | 441 |
| 12.2 | Aufgaben zur Leistung und Energieerhaltung | 448 |
| 12.2.1 | Punktbewegung | 448 |
| 12.2.2 | Starrkörperbewegung | 449 |
| 12.3 | Ergebnisse zu Abschn. 12.2 | 454 |
| 13 | Stoßtheorie | 457 |
| 13.1 | Beispiele zur Stoßtheorie | 459 |
| 13.2 | Aufgaben zur Stoßtheorie | 469 |
| 13.3 | Ergebnisse zu Abschn. 13.2 | 471 |
| | Literatur | 473 |
| | Stichwortverzeichnis | 475 |

Vorwort

Ein Fach im Studium, welches die Mathematik als Hilfswerkzeug zur Beschreibung technischer und physikalischer Prozesse heranzieht, erfordert das Üben von Aufgaben. Solch ein Fach stellt die *Technische Mechanik* dar, welches für nahezu alle Ingenieurfächer, wie zum Beispiel die Studiengänge des Bauingenieurwesens, des Maschinenbaus, der Elektrotechnik oder des Wirtschaftsingenieurwesens, erforderlich ist. Neben der eigentlichen Theorie, die zum Beispiel in dem zu dieser Aufgabensammlung zugehörigen Buch *Grundlagen der Technischen Mechanik* enthalten ist (Hartmann, 2015), müssen einerseits die Grundlagen in Form einer Formelsammlung zusammengefasst und andererseits Aufgaben zur Vertiefung durchgerechnet bzw. bereitgestellt werden. Eine Aufgabensammlung kann nicht die Theorie ersetzen, sondern sie dient dazu, Beispiele bereitzustellen, die entweder aus der Praxis kommen oder mit denen man prinzipiell auftretende Problemstellungen und Techniken zur Lösung von Fragestellungen der Technischen Mechanik übt. Da es zu viele Problemstellungen gibt, können solche Aufgaben auch nicht auswendig gelernt werden. Man kann sich lediglich Konzepte zur Lösung aneignen, aber selbst dies erfordert das Verstehen des theoretischen Hintergrundes.

Aufgabensammlungen wachsen meist historisch. So wird man auch feststellen, dass in vielen anderen Aufgabensammlungen ähnliche und gleiche Aufgaben vorliegen. Zum sehr großen Teil kann man auch nicht mehr herausfinden, wann diese Aufgaben entwickelt wurden, wer sie formuliert hat und wo sie zum ersten Mal publiziert wurden. An solchen Aufgabensammlungen haben zum Teil viele Doktorandengenerationen gesessen, die für die wöchentlichen Übungen und für Klausuren Fragestellungen entwickelt und geändert haben, sodass einige Aufgabenstellungen auch in anderen Lehrbüchern oder Aufgabensammlungen auftreten können. Bei vielen Fragestellungen gibt es auch nicht den „Königsweg“ zur Lösung, sondern vielmehr repräsentieren die Lösungen sogenannte *Musterlösungen*, d. h. es wird eine Möglichkeit, die vorgegebenen Aufgaben zu beantworten, angegeben. Manche solcher Lösungen können intuitiv, manche pragmatisch und einige sehr formal sein. Wie dies gelöst wird, hängt vom Autor und seinen Fähigkeiten bzw. Vorlieben ab.

Bei der Entstehung dieser Aufgabensammlung waren viele ehemalige Kollegen und viele Doktoranden beteiligt. Sie entstammen aus der Zeit des Autors an der

Universität Kassel und dem derzeitigen Wirken an der Technischen Universität Clausthal. Ihnen allen sei hierbei in besonderem Maße gedankt, insbesondere ist Herr Dipl.-Phys. Stephan Krämer hervorzuheben, der sich für die Pflege der Aufgaben in der Clausthaler Zeit engagiert hat. Des Weiteren möchte ich dem Verlag für die Unterstützung während des Produktionsprozesses meinen Dank aussprechen. Aber insbesondere möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, die viele Entbehrungen hinnehmen musste, damit diese Aufgabensammlung entstehen konnte.

Clausthal-Zellerfeld, 28. Februar 2016

Stefan Hartmann

Ziele der Aufgabensammlung

Ein Ziel dieser Aufgabensammlung besteht darin, die wichtigsten Formeln und Tabellen, die man zum Lösen von Fragestellungen, die während des Studiums und zum Teil darüber hinaus, im Rahmen der Technischen Mechanik, auftreten, bereitzustellen. Sehr ausgefeilte Formelsammlungen existieren auf dem Markt (Schneider *et al.*, 2006; Dubbel *et al.*, 2007; Franz, 1979)¹⁾, denen wir hier nicht nacheifern können. Solche sehr aufwendig entwickelten Formelsammlungen haben auch über die hier vermittelten Kenntnisse hinausgehende Tabellen und sind daher als weitere Begleiter für Studium und Praxis geeignet.

Wir konzentrieren uns hier auch auf ausgewählte Beispiele zum Studium der Technischen Mechanik an einer Hochschule. Hingewiesen sei jedoch auch auf die populärsten Werke im deutschsprachigen Raum (Hibbeler, 2005, 2006a,b; Gross *et al.*, 2006b, 2007, 2006a). Auch im Internet findet man heutzutage eine Vielzahl von Aufgabensammlungen. Ein Ziel ist jedoch auch, ausgerechnete Beispiele mit Erläuterungen aus dem gesamten Bereich der Vektorrechnung, Statik, Elastostatik sowie Dynamik vorzustellen, damit ein Student handwerkliche Fähigkeiten erhält, um später Fragestellungen der Praxis bearbeiten zu können. Zum Teil geht es in den vorgestellten Beispielen und Aufgaben auch nur darum, die Grundgleichungen, d. h. die mathematischen Modellgleichungen, aufzustellen, da einerseits das Grundverständnis für die Thematik gefördert werden soll, und es andererseits viele Fragestellungen gibt, bei denen keine analytischen Lösungen existieren. In solchen Fällen folgt die Numerische Mechanik bzw. die Numerische Mathematik, also denjenigen Disziplinen, in denen Computerprogramme entwickelt oder herangezogen werden, um unterschiedliche Problemstellungen der Mechanik näherungsweise zu lösen. In diesem Buch soll daher zum Üben des erworbenen Grundlagenwissens eine Reihe durchgerechneter *Beispiele* sowie *Aufgaben* mit Endergebnis in den jeweiligen Anhängen bereitgestellt werden, um sich vertieft mit den Themen der Technischen Mechanik zu befassen.

Die Kapitelnummerierung richtet sich nach (Hartmann, 2015). Zunächst werden tabellarisch die Grundlagen zusammengefasst und anschließend Beispiele

1) Dieses Werk ist eine jährliche Ausgabe, in welcher nur in einigen Ausgaben eine sehr ausführliche Beschreibung der Statik und Dimensionierung mechanischer Strukturen enthalten ist.

durchgerechnet. Abschließend folgen verschiedene Aufgabenstellungen und deren Lösungen in Form von Endergebnissen. Im Anschluss an einige Kapitel werden dann noch einige vermischte Aufgaben angegeben, die die Grundkenntnisse einiger zuvor betrachteter Abschnitte erfordern.

Teil I

Statik starrer Körper

Ziele der Aufgaben zur Statik

Die Ziele von Vorlesungen der Statik ist die Wissensvermittlung des Zusammenwirkens von Körpern (Bauteile) unter äußeren Kräften und Momenten sowie die Berechnung von Gleichgewichtssystemen. Da sowohl Kräfte als auch Momente vektorielle Größen sind, muss zunächst ein Fokus auf der Vektorrechnung liegen. Danach stehen Kraftsysteme, insbesondere Gleichgewichtssysteme, im Vordergrund, zu deren Berechnung das Freischneiden von materiellen Körpern absolut essentiell ist, also dem Sichtbarmachen von Kräften und Momenten innerhalb der Bauteile. Dies dient nicht nur zur Berechnung von Lagerreaktionen, d. h. derjenigen Kräfte und Momente, die in einem Lager wirken und damit für die Auslegung von Anschlüssen, wie Schrauben- oder Schweißnahtverbindungen, bzw. des erforderlichen Untergrundes, notwendig sind, sondern auch der Schnittgrößenbestimmung. Da das häufigste Konstruktionselement der Balken ist, wird dies vorwiegend an diesem Strukturelement demonstriert.

Zur Berechnung von kontinuierlich verteilten Lasten, wie zum Beispiel das Eigengewicht, Verkehrs-, Schnee- oder Windlasten, ist der Schwerpunktsbegriff unbedingt erforderlich. Dieser steht im Zusammenhang mit der Flächen- und Volumenberechnung, d. h. der Integralrechnung, die zur Massenberechnung benötigt wird.

Zuletzt erfolgt zumeist die Berechnung der Haftreibung zwischen zwei Körpern, die je nach Konstruktion gewollt oder ungewollt ist. Die eigentliche Schwierigkeit ist hierbei das Verständnis von Ungleichungen und Fallunterscheidungen, welches wir uns aneignen müssen.

1

Einführung in die Vektorrechnung

Neben der Integral- und Differentialrechnung ist die Vektorrechnung eine der wichtigsten mathematischen Disziplinen für die Ausbildung in einem Ingenieurfach, da in der Mechanik sehr viele gerichtete Größen wie Kräfte, Momente, Geschwindigkeiten, Verschiebungen, Ortsvektoren etc. auftreten. Die in den Boxen 1.1–1.4 aufgeführten Rechenregeln zur Beschreibung von geometrischen Vektoren sowie deren Komponentendarstellung, siehe Box 1.1, des Skalarproduktes in Box 1.2, des Vektorproduktes in Box 1.3 sowie des Spatproduktes aus Box 1.4 dienen zur Berechnung von Längen, Winkeln und Projektionen, Flächen und Normalenvektoren sowie Volumina und der linearen Abhängigkeit von Vektoren.

Box 1.1: Grundrechenregeln der Vektorrechnung

Grundrechenregeln ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V}^3$):

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (1.1)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1.2)$$

$$(\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a}) \quad (1.3)$$

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \quad (1.4)$$

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \quad (1.5)$$

Komponentendarstellung von Vektoren:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \quad \text{oder} \quad \vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \quad (1.6)$$

Vektoraddition:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_1 + (a_2 + b_2)\vec{e}_2 + (a_3 + b_3)\vec{e}_3 \quad (1.7)$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\alpha\vec{a} = \alpha(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) = (\alpha a_1)\vec{e}_1 + (\alpha a_2)\vec{e}_2 + (\alpha a_3)\vec{e}_3 \quad (1.8)$$

Box 1.2: Skalarprodukt**Skalarprodukt:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha \quad (1.9)$$

Grundbeziehungen:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (1.10)$$

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) \quad (1.11)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (1.12)$$

Kronecker-Symbol (Orthogonalität der Basisvektoren):

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (1.13)$$

Komponentenberechnung eines Vektors:

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i \quad (1.14)$$

Komponentendarstellung des Skalarproduktes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \quad (1.15)$$

Norm (Betrag) eines Vektors:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \quad (1.16)$$

Winkel zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b}

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (1.17)$$

Einheitsvektor in Richtung des Vektors \vec{a} :

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} (a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3) \quad (1.18)$$

Box 1.3: Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Vektorprodukt (\vec{a} , \vec{b} und \vec{n} stellen ein Rechtssystem dar ($|\vec{n}| = 1$):

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a} \times \vec{b}| \vec{n} = (|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha) \vec{n} \quad (1.19)$$

Grundbeziehungen:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \quad (1.20)$$

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) \quad (1.21)$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \quad (1.22)$$

$$\vec{a} \times (\lambda\vec{a}) = \vec{0}, (\lambda \neq 0) \quad (1.23)$$

Berechnungsmöglichkeit mit verallgemeinerter Determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \quad (1.24)$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \vec{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3 \quad (1.25)$$

Box 1.4: Spatprodukt

Spatprodukt:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = |\vec{a}| |\vec{b}| |\vec{c}| \sin \alpha \cos \beta \quad (1.26)$$

Zyklische Vertauschbarkeit des Spatproduktes:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \quad (1.27)$$

Komponentendarstellung des Spatproduktes:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.28)$$

$$= (b_2 c_3 - b_3 c_2) a_1 + (b_3 c_1 - b_1 c_3) a_2 + (b_1 c_2 - b_2 c_1) a_3 \quad (1.29)$$

Lineare Abhängigkeit, Rechts- oder Linkssystem:

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{cases} > 0 & \text{Rechtssystem} \\ < 0 & \text{Linkssystem} \\ = 0 & \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ sind linear abhängig} \end{cases} \quad (1.30)$$

1.1

Beispiele zur Vektorrechnung

Beispiel 1.1 (Summe und Differenz zweier Vektoren)

Gegeben seien zwei in der Ebene aufgespannte Vektoren $\vec{a} = 3\vec{e}_x + \vec{e}_y$ sowie $\vec{b} = -\vec{e}_x + 2\vec{e}_y$.¹⁾ Der Vektor \vec{a} hat demnach einen Anteil mit dem Betrag 3 in x -Richtung und einen Anteil mit dem Betrag 1 in y -Richtung, siehe Abb. 1.1a. Der Vektor \vec{b} hingegen hat den Betrag 1 in x -Richtung. Aufgrund des negativen Vorzeichens zeigt er in negative x -Richtung. Zudem hat \vec{b} einen Anteil der Länge 2 in y -Richtung. Ausgehend von der Schulmathematik würde man die beiden Vektoren in Spaltenform darstellen

$$\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 2 \end{Bmatrix},$$

die wir uns gedanklich merken können, aber nicht weiter verwenden wollen, da damit keine Aussage vorliegt, auf welche Basis man sich bezieht (siehe Beispiel 1.5, wo der gleiche Vektor unterschiedliche Koeffizienten relativ zu unterschiedlichen Basissystemen hat).

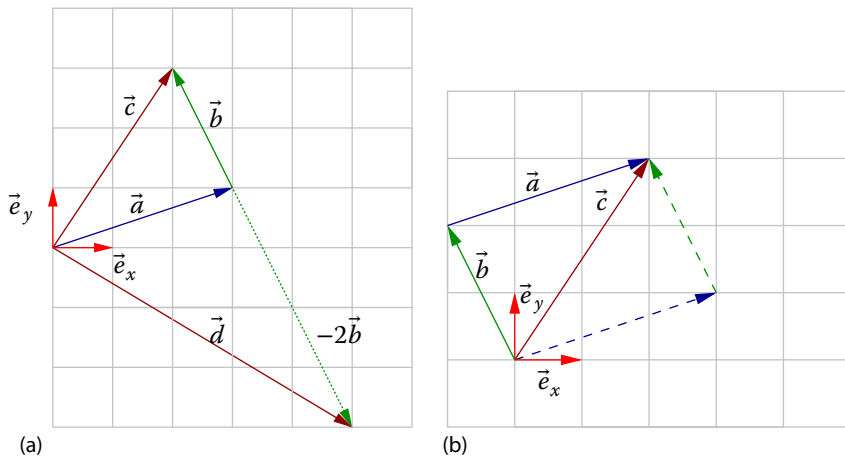


Abb. 1.1 Vektoraddition, Vektorsubtraktion sowie Kommutativität. (a) Vektoraddition $\vec{a} + \vec{b}$ und Vektordifferenz $\vec{a} - \vec{b}$, (b) Kommutativität der Vektoraddition.

1) Steht nur ein Basisvektor, z. B. \vec{e}_y , als Vektorkomponente, wie im Vektor \vec{a} , so steht als Koeffizient (Vorfaktor) der Wert 1.

Die Addition der Vektoren \vec{a} und \vec{b} bedeutet die Addition der Vektorkomponenten bzw. Vektorkoeffizienten, siehe Gl. (1.7),

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \underbrace{3\vec{e}_x + \vec{e}_y}_{\vec{a}} + \underbrace{(-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)}_{\vec{b}} = (3-1)\vec{e}_x + (1+2)\vec{e}_y = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y.$$

Graphisch verschiebt man den Fußpunkt des Vektors \vec{b} in die Spitze von \vec{a} , und der resultierende Vektor, hier \vec{c} , bedeutet der Vektor mit dem Fußpunkt im Fußpunkt von \vec{a} und der Spitze in der Spitze von \vec{b} . Aufgrund der Kommutativität der Vektoraddition, siehe Gl. (1.2), könnte man auch den Fußpunkt von \vec{a} in die Spitze von \vec{b} legen, siehe Abb. 1.1b, um den resultierenden Vektor \vec{c} zu erhalten.

Analog lässt sich die Differenz $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b}$ mit

$$2\vec{b} = 2(-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) = 2(-1)\vec{e}_x + 2 \cdot 2\vec{e}_y = -2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y,$$

bestimmen

$$\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} = \underbrace{3\vec{e}_x + \vec{e}_y}_{\vec{a}} - \underbrace{(-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_y)}_{2\vec{b}} = (3+2)\vec{e}_x + (1-4)\vec{e}_y = 5\vec{e}_x - 3\vec{e}_y.$$

Der Vektor \vec{d} ist ebenfalls in Abb. 1.1a abgebildet. Das in diesem Beispiel behandelte ebene Problem lässt sich formal auf jeden dreidimensionalen Vektor übertragen. Die graphische Veranschaulichung ist jedoch schwieriger und daher nur zum Teil aufgeführt.

Beispiel 1.2 (Skalarprodukt)

Wir sind an der Charakterisierung einer Raumdiagonalen eines Würfels im Hinblick ihrer Winkel zu den einzelnen Achsen bzw. Ebenen interessiert. Die Raumdiagonale in Abb. 1.2 ist durch den Vektor $\vec{g} = a(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$ charakterisiert, wobei a die Seitenlänge des Würfels ist. Zunächst berechnen wir den Einheitsvektor in Richtung der Diagonalen, siehe Gl. (1.18). Mit

$$|\vec{g}| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3},$$

siehe auch Gl. (1.16), folgt $\vec{e}_D = \vec{g}/|\vec{g}| = (1/\sqrt{3})(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$. Die Länge der Diagonalen ist demnach $a\sqrt{3}$. Der Winkel β zwischen der Raumdiagonalen und der z -Achse lässt sich mithilfe von Gl. (1.17) bestimmen,

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \Rightarrow \beta &= \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 54,74^\circ \end{aligned}$$

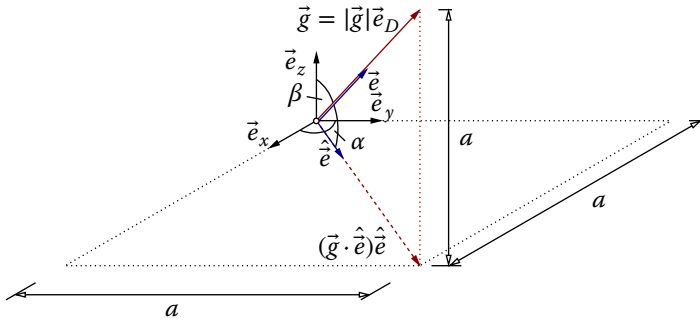


Abb. 1.2 Geometrie einer Raumdiagonalen ($\hat{e} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$).

Daraus resultiert der Winkel $\alpha = 90^\circ - \beta \approx 35,26^\circ$. Da die Projektion von \vec{g} auf die Diagonale in der x/y -Ebene, $\hat{e} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$ durch

$$\begin{aligned} (\vec{g} \cdot \hat{e}) \hat{e} &= \left((\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \right) \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2}(1+1)(\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \vec{e}_x + \vec{e}_y \end{aligned}$$

gegeben ist, könnte der Winkel α auch durch das Skalarprodukt berechnet werden,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} \cdot \frac{(\vec{g} \cdot \hat{e}) \hat{e}}{|(\vec{g} \cdot \hat{e}) \hat{e}|} = \vec{e}_D \cdot \hat{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \\ &= \frac{1+1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{2}{3} \approx 35,26^\circ, \end{aligned}$$

(Erinnerung: $2 = \sqrt{2}\sqrt{2}$)

Beispiel 1.3 (Längenberechnung mit dem Skalarprodukt)

Für einen Transport benötigt man die Länge der Diagonalen eines Schrankes mit der Länge $L = 240$ cm, der Breite $B = 90$ cm und der Tiefe $H = 30$ cm. Der Vektor der Diagonalen ist $\vec{x} = 240\vec{e}_x + 90\vec{e}_y + 30\vec{e}_z$ [cm] und damit ist die Länge

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{240^2 + 90^2 + 30^2} \approx 258 \text{ cm}.$$

Beispiel 1.4 (Skalarprodukt und Projektion)

Gegeben sei eine Gerade im Raum

$$\vec{x}(\lambda) = \vec{x}_0 + \lambda \vec{g}$$

mit $\vec{x}_0 = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_z$ und $\vec{g} = 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$. Die Gerade liegt demnach parallel zur y/z -Ebene und der Vektor \vec{x}_0 befindet sich in der x/z -Ebene, siehe Abb. 1.3a. Es liegt daher die Geradengleichung

$$\vec{x}(\lambda) = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_z + \lambda(2\vec{e}_y + \vec{e}_z) = 3\vec{e}_x + 2\lambda\vec{e}_y + (2 + \lambda)\vec{e}_z,$$

d. h. die Komponentendarstellung

$$x(\lambda) = 3, \quad y(\lambda) = 2\lambda, \quad z(\lambda) = 2 + \lambda$$

vor. Wir betrachten als Nächstes den Punkt C , $\vec{c} = 3\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$, und suchen den kürzesten Abstand des Punktes zur Geraden. Hierzu berechnen wir den Verbindungsvektor

$$\vec{s} = \vec{c} - \vec{x}_0 = (3\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) - (3\vec{e}_x + 2\vec{e}_z) = -3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z.$$

Der Einheitsvektor \vec{e} in Richtung der Geraden lautet, siehe Gln. (1.16) und (1.18),

$$\vec{e} = \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z) = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

und wird für die rechtwinklige Projektion des Vektors \vec{s} auf die Gerade benötigt, siehe Abb. 1.3b,

$$(\vec{s} \cdot \vec{e})\vec{e} = \underbrace{\left((-3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \right)}_{(6+1)/\sqrt{5}=7/\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z) = \frac{7}{5}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z).$$

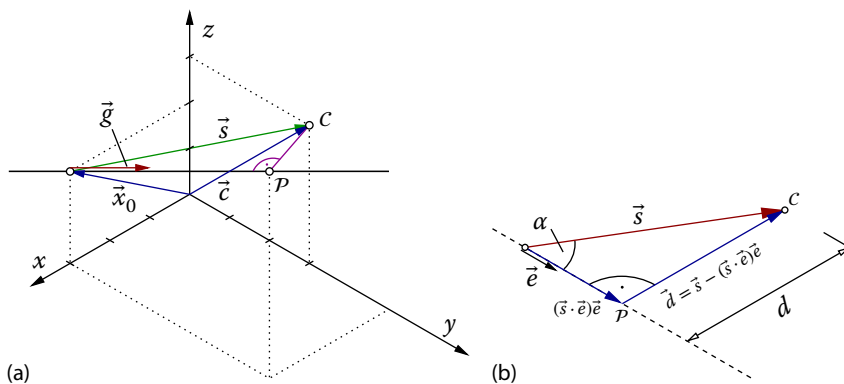


Abb. 1.3 Projektion und kürzester Abstand zu einer Geraden. (a) Gerade im Raum, (b) Projektion und kürzester Abstand.

Der auf der Geraden senkrecht stehende Vektor berechnet sich aus der Differenz des Vektors \vec{s} und der Projektion $(\vec{s} \cdot \vec{e})\vec{e}$

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \vec{s} - (\vec{s} \cdot \vec{e})\vec{e} = -3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + \vec{e}_z - \frac{7}{5}(2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \\ &= -3\vec{e}_x + \frac{1}{5}\vec{e}_y - \frac{2}{5}\vec{e}_z.\end{aligned}$$

Der Betrag des Vektors \vec{d} gibt den kürzesten Abstand des Punktes C zur Geraden an,

$$d = |\vec{d}| = \sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{1}{25} + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{46}{5}}.$$

Wir können noch den Abstand auf der Geraden ausrechnen, den der Punkt P zum Punkt \vec{x}_0 besitzt,

$$\vec{x}(\lambda) = \vec{x}_0 + \lambda\vec{g} = \vec{x}_0 + \mu\vec{e}, \quad \mu = \lambda|\vec{g}|.$$

Da $\mu\vec{e} = (\vec{s} \cdot \vec{e})\vec{e}$ gilt, folgt

$$\mu = \vec{s} \cdot \vec{e} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$

μ hat die Dimension einer Länge, da der Einheitsvektor \vec{e} dimensionsfrei ist, währenddessen $\lambda = \mu/|\vec{g}|$ keine Dimension hat und die Koeffizienten des Vektors \vec{g} die Dimension einer Länge haben.

Beispiel 1.5 (Skalarprodukt zur Komponentenberechnung)

Häufig tritt die Fragestellung der Darstellung von Vektoren in einem anderen Basissystem auf. In Abb. 1.4a ist der Vektor $\vec{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$ relativ zu dem Basissystem $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ gegeben. Das neue Basissystem $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ sei durch die Drehung $\varphi = 30^\circ$ um die z -Achse definiert,

$$\begin{aligned}\vec{e}_\xi &= \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y \\ \vec{e}_\eta &= -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y = -\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y \\ \vec{e}_\zeta &= \vec{e}_z\end{aligned}$$

($\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\sin 30^\circ = 1/2$). Die Darstellung des Vektors \vec{a} in Bezug auf die neue Basis lautet

$$\vec{a} = a_\xi \vec{e}_\xi + a_\eta \vec{e}_\eta + a_\zeta \vec{e}_\zeta,$$

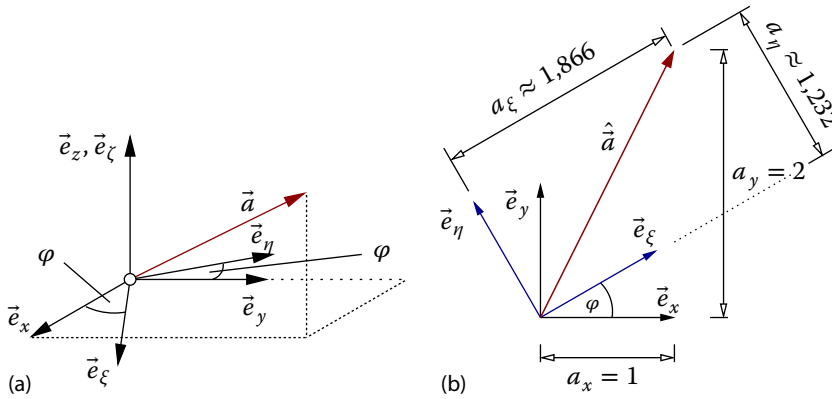


Abb. 1.4 Wechsel des Basissystems ($\hat{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ ist nur derjenige Anteil in der x/y -Ebene – Projektion von \vec{a} auf die x/y -Ebene). (a) Drehung des Basissystems (3D-Darstellung), (b) ebene Darstellung der Drehung.

und wir suchen die Koeffizienten a_ξ , a_η und a_ζ . Durch das Skalarprodukt des Vektors \vec{a} mit den einzelnen Basisvektoren kann man sich diese Koeffizienten beschaffen,

$$a_\xi = \vec{a} \cdot \vec{e}_\xi = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_x + \frac{1}{2}\vec{e}_y \right) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2) \approx 1,866 ,$$

$$a_\eta = \vec{a} \cdot \vec{e}_\eta = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{e}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_y \right) = \frac{1}{2}(-1 + 2\sqrt{3})$$

$$\approx 1,232 ,$$

$$a_\zeta = \vec{a} \cdot \vec{e}_\zeta = (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_z = 1 .$$

In diesem Sinne entsprechen die Produkte $\vec{a} \cdot \vec{e}_I$, $I = \xi, \eta, \zeta$, der Projektion des Vektors \vec{a} auf die Richtung \vec{e}_I , $I = \xi, \eta, \zeta$. Wir erhalten hiermit den Vektor \vec{a} ausgedrückt in der Basis \vec{e}_I

$$\vec{a} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y + \vec{e}_z = \left(\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2) \right) \vec{e}_\xi + \left(\frac{1}{2}(-1 + 2\sqrt{3}) \right) \vec{e}_\eta + \vec{e}_\zeta \approx$$

$$\approx 1,866\vec{e}_\xi + 1,232\vec{e}_\eta + \vec{e}_\zeta .$$

In Abb. 1.4b ist dies graphisch in der ξ/η -Ebene dargestellt. Der Vektor ändert sich demnach nicht. Es ändern sich beim Wechsel des Basissystems die Vektor-koeffizienten, d. h. Richtung und Betrag bleiben konstant beim Wechsel des Basissystems.

Beispiel 1.6 (Vektorprodukt)

Wir betrachten eine Dreiecksfläche parallel zur x/z -Ebene. Die notwendigen Koordinaten der Ecken der Fläche, hier gegeben durch die Ortsvektoren, lauten $\vec{x}_1 = 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$, $\vec{x}_2 = 3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$ sowie $\vec{x}_3 = 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z$, siehe Abb. 1.5. Die Zahlenwerte der Vektorkoeffizienten seien in mm gegeben. Gesucht ist der Normalenvektor \vec{n} auf der Fläche, die Dreiecksfläche A selbst sowie die Länge der Verbindungslinie zwischen den Punkten 2 und 3. Wir berechnen zunächst die Vektoren \vec{a} und \vec{b} , welche die Fläche aufspannen,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{x}_3 - \vec{x}_1 = 3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z - (3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = (3 - 3)\vec{e}_y + (4 - 2)\vec{e}_z = 2\vec{e}_z, \\ \vec{b} &= \vec{x}_2 - \vec{x}_1 = 3\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z - (3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z) = 3\vec{e}_x + (3 - 3)\vec{e}_y + (2 - 2)\vec{e}_z \\ &= 3\vec{e}_x.\end{aligned}$$

Der auf den beiden Vektoren \vec{a} und \vec{b} stehende (bei einem Rechtssystem) Vektor \vec{c} berechnet sich aus dem Kreuzprodukt (1.25)

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = 2\vec{e}_z \times 3\vec{e}_x = 6\vec{e}_y.$$

Hieraus kann der Normaleneinheitsvektor $\vec{n} = \vec{c}/|\vec{c}|$ bestimmt werden:

$$\vec{n} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \frac{6}{|6\vec{e}_y|} \vec{e}_y = \frac{6}{\sqrt{6^2}} \vec{e}_y = \vec{e}_y$$

(die Koeffizienten des Vektors \vec{n} sind dimensions- bzw. einheitenfrei). Ein Ergebnis, welches zu erwarten war. Die Dreiecksfläche A ist halb so groß wie die Fläche des durch die Vektoren \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms,

$$A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{6}{2} = 3 \text{ mm}^2,$$

und die Länge der Dreiecksseite zwischen den Punkten 2 und 3 berechnet sich aus dem Betrag

$$L = |\vec{x}_3 - \vec{x}_2| = |-3\vec{e}_x + 2\vec{e}_z| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \text{ mm}.$$

Beispiel 1.7 (Spatprodukt)

Mithilfe des Spatproduktes (1.29) können wir das Volumen einer Pyramide ausrechnen, siehe Abb. 1.6a. Wir wissen, dass der Tetraeder (Vierflächler) ein Sechstel des Volumens eines Parallelepipeds hat (Hartmann, 2015), und somit die Pyramide, welche das zweifache Volumen eines Tetraeders besitzt, das Volumen

$$V_{\text{pyr}} = \frac{1}{3} |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

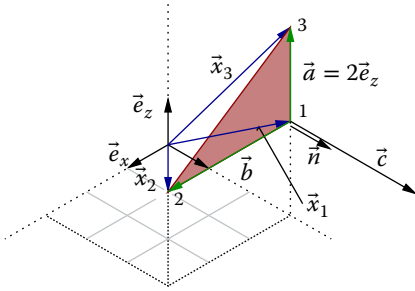


Abb. 1.5 Dreiecksfläche.

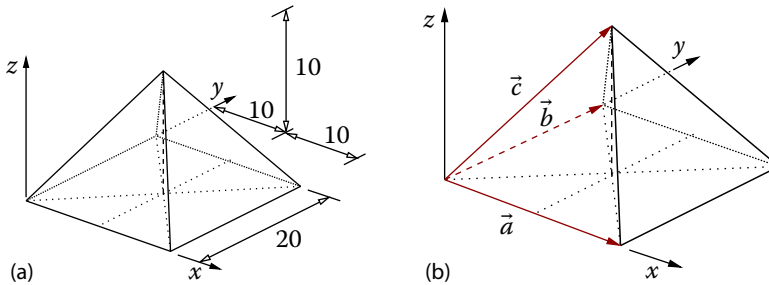


Abb. 1.6 Geometrie einer Pyramide. (a) Geometrie (Angaben in m), (b) aufspannende Vektoren.

aufweist. Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} spannen die Grundseite auf und der Vektor \vec{c} zeigt in Richtung des Gattes, siehe Abb. 1.6b. Durch Ablesen erhalten wir $\vec{a} = 20\vec{e}_x$, $\vec{b} = 20\vec{e}_y$ und $\vec{c} = 10\vec{e}_x + 10\vec{e}_y + 10\vec{e}_z$ (alle Koeffizienten haben die Einheit m). Wir berechnen zunächst das Kreuzprodukt über die verallgemeinerte Determinante (1.24)

$$\vec{d} := \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 20 & 0 \\ 10 & 10 & 10 \end{vmatrix} = 200\vec{e}_x - 200\vec{e}_z .$$

Das noch fehlende Skalarprodukt gemäß Gl. (1.15) liefert

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{d} = 20\vec{e}_x \cdot (200\vec{e}_x - 200\vec{e}_z) = 4000 \text{ m}^3 .$$

Das Volumen der Pyramide ist daher

$$V_{\text{pyr}} = \frac{4000}{3} \approx 1333,33 \text{ m}^3 ,$$

und nebenbei erhalten wir die Aussage, siehe Gl. (1.30), dass die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} ein Rechtssystem aufbauen ($\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) > 0$) und linear unabhängig sind.

Beispiel 1.8 (Lineare Abhängigkeit)

Wir nehmen Bezug auf Beispiel 1.7. Die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} sind gemäß Gl. (1.30) linear unabhängig und bilden ein Rechtssystem. Es sei der Vektor $\vec{f} = 5\vec{e}_x + 5\vec{e}_y$ gegeben. Wir überprüfen anhand des Spatproduktes (1.29) die Eigenschaften der Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{f} zueinander,

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{f} &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 20 \cdot (20 \cdot 0 - 5 \cdot 0) + 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Die Vektoren sind demnach linear abhängig. Da der Vektor \vec{f} in der von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Ebene liegt, wird kein Parallelepiped (Spat) aufgespannt und das „Volumen“ ist null. Der Vektor lässt sich demnach durch die Vektoren \vec{a} und \vec{b} ausdrücken, $\vec{f} = (\vec{a} + \vec{b})/4$.

1.2**Aufgaben zur Vektorrechnung****Aufgabe 1.1 (Summen und Differenzen von Vektoren)**

1. Addieren Sie graphisch und rechnerisch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} .
2. Führen Sie sowohl graphisch als auch rechnerisch die Rechenoperation $\vec{b} + 2\vec{c} - \vec{a} + (2\vec{a} + \vec{c})$ aus.
3. Bestimmen Sie rechnerisch den Vektor \vec{d} aus der Gleichung

$$3(\vec{u} - \vec{v}) - 2(2\vec{w} - \vec{u}) + 2\vec{v} + 3\vec{d} = \vec{0}.$$

Gegeben: $\vec{a} = 5/2\vec{e}_x + 3/2\vec{e}_y$, $\vec{b} = -2\vec{e}_x + \vec{e}_y$, $\vec{c} = -3/2\vec{e}_y$, $\vec{u} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y$, $\vec{v} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$, $\vec{w} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y$

Aufgabe 1.2 (Summe und Skalarprodukt)

1. Bestimmen Sie den Vektor \vec{u} aus der Summe $\vec{u} = 2(\vec{a} + 3\vec{b}) - 4(\vec{a} - \vec{c}) + 3(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{d})$.
2. Bestimmen Sie \vec{v} aus der Gleichung $3(\vec{f} - \vec{g}) - 2(-\vec{f} + 2\vec{h}) + 2(\vec{g} - \vec{v}) = \vec{0}$.
3. Bestimmen Sie mit dem Skalarprodukt die Längen von \vec{u} und \vec{v} sowie den Winkel α , den diese Vektoren einschließen.

Gegeben: $\vec{a} = \vec{e}_x + 4\vec{e}_y - \vec{e}_z$, $\vec{b} = 3\vec{e}_x - 2\vec{e}_z$, $\vec{c} = -4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y - \vec{e}_z$, $\vec{d} = 3\vec{e}_y - 3\vec{e}_z$, $\vec{f} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{g} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 2\vec{e}_z$, $\vec{h} = \vec{e}_x + \vec{e}_y - \vec{e}_z$

Aufgabe 1.3 (Skalarprodukt)

Ein Dreieck sei gegeben durch die Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Fertigen Sie hierzu eine Skizze an.

1. Wie groß ist der Winkel zwischen \vec{a} und \vec{b} ?
2. Berechnen Sie den Betrag von \vec{c} .
3. Welche Beziehung besteht zwischen den Beträgen \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} , wenn $\vec{b} = 2\vec{e}_y$ gilt?

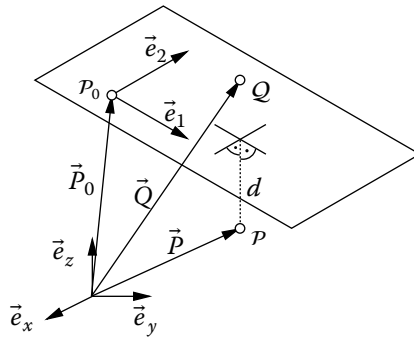
Gegeben: $\vec{a} = 4\vec{e}_x$, $\vec{b} = -\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_y$

Aufgabe 1.4 (Skalarprodukt)

Eine Ebene \vec{E} im Raum sei gegeben durch die Gleichung $\vec{E}(\alpha_1, \alpha_2) = \vec{P}_0 + \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2$. Jeder Punkt der Ebene kann auf diese Weise durch eine geeignete Wahl der Parameter α_1 und α_2 dargestellt werden.

1. Zeigen Sie, dass der Punkt Q , der durch den Vektor \vec{Q} gegeben ist, in der Ebene \vec{E} liegt. Dies trifft für den Punkt P , dargestellt durch den Vektor \vec{P} , nicht zu.
2. Wie groß ist der Abstand d des Punktes P von der Ebene?

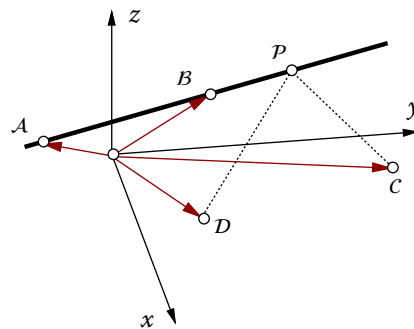
Gegeben: $\vec{P}_0 = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{e}_1 = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$, $\vec{e}_2 = (\vec{e}_x - \vec{e}_y + 2\vec{e}_z)/\sqrt{6}$, $\vec{P} = 2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$, $\vec{Q} = 5\vec{e}_x - \vec{e}_y + 7\vec{e}_z$, Normaleneinheitsvektor der Ebene $\vec{n} = (\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z)/\sqrt{3}$

**Aufgabe 1.5 (Skalarprodukt)**

Gegeben seien die vier Punkte A , B , C und D .

1. Geben Sie die Gleichung der Geraden \vec{g} an, die durch die Punkte A und B geht.
2. Bestimmen Sie den Punkt P auf der Geraden durch A und B , der von C und von D gleich weit entfernt ist.

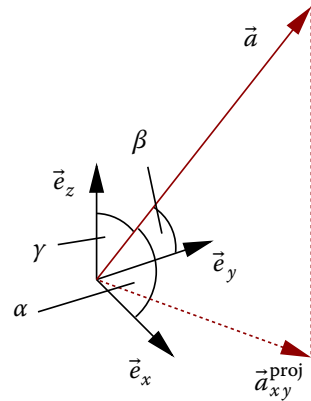
Gegeben: Die Ortsvektoren der zugehörigen Punkte werden mit kleinen Buchstaben bezeichnet, d. h. \vec{a} zeigt vom Koordinatenursprung zum Punkt A . $\vec{a} = \vec{e}_x - 2\vec{e}_y + \vec{e}_z$, $\vec{b} = 3\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z$, $\vec{c} = 2\vec{e}_x + 7\vec{e}_y$, $\vec{d} = 8\vec{e}_x + \vec{e}_y + 2\vec{e}_z$



Aufgabe 1.6 (Skalarprodukt)

In einem kartesischen Koordinatensystem ist der Vektor \vec{a} durch seine Koeffizienten a_x , a_y und a_z gegeben.

1. Bestimmen Sie die drei Winkel α , β und γ , die den Vektor mit den Koordinatenrichtungen x , y und z einschließen.
2. Bestimmen Sie die Projizierte $\vec{a}_{xy}^{\text{proj}}$ des Vektors \vec{a} , die in der x/y -Ebene liegt, und leiten Sie den zugehörigen Einheitsvektor her.
3. Wie groß ist der Winkel φ , den die Projektion mit der x -Richtung einschließt, und wie groß ist der Anstellwinkel ϑ des Vektors \vec{a} gegenüber der x/y -Ebene?
4. An welche Stelle des Koordinatensystems zeigt der Vektor \vec{a} , wenn man seine Länge verdoppelt und die Winkel φ und ϑ halbiert?



Gegeben: $a_x = 3$, $a_y = 4$, $a_z = 5$

Aufgabe 1.7 (Wechsel des Basissystems)

Gegeben sei der Vektor \vec{x} im kartesischen Basissystem $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Die Basisvektoren

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), \quad \vec{E}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3), \quad \vec{E}_3 = \sqrt{6}\vec{e}_1$$

bilden ein weiteres Basissystem. Stellen Sie den Vektor \vec{x} im neuen Basissystem gemäß $\vec{x} = Y_1\vec{E}_1 + Y_2\vec{E}_2 + Y_3\vec{E}_3$ dar, und geben Sie die Komponenten Y_1 , Y_2 und Y_3 an.

Gegeben: $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$

Aufgabe 1.8 (Wechsel des Basissystems)

1. Gegeben seien die Vektoren

$$\vec{a} = 5\vec{e}_x + 3\vec{e}_y \quad \text{sowie} \quad \vec{g}_1 = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y \quad \text{und} \quad \vec{g}_2 = 4\vec{e}_x - 2\vec{e}_y.$$

Überzeugen Sie sich davon, dass \vec{g}_1 und \vec{g}_2 orthogonal sind, und ermitteln Sie graphisch und rechnerisch die Komponentendarstellung des Vektors \vec{a} in Bezug auf die Basisvektoren \vec{g}_1 und \vec{g}_2 .

2. Bestimmen Sie die Koeffizienten b_1 , b_2 und b_3 des Vektors $\vec{b} = \vec{e}_x + 3\vec{e}_y + 9\vec{e}_z = b_1\vec{g}_1 + b_2\vec{g}_2 + b_3\vec{g}_3$ in Bezug auf die orthogonalen Basisvektoren

$$\vec{g}_1 = \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z, \quad \vec{g}_2 = -2\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z, \quad \vec{g}_3 = \vec{e}_y - \vec{e}_z.$$