Dieter Lohse
Detlef Wille

# Mathematik für Wirtschaftswissenschaften

Ein Trainingsbuch
Aufgaben und kommentierte Lösungen

2. Auflage

HANSER

# MATHEMATIK

# FÜR

# WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN

## Ein Trainingsbuch:

## Definitionen und Sätze

## Aufgaben mit kommentierten Lösungen

Dr. Dieter Lohse
Dr. Detlef Wille
unter Mitarbeit von
Katharina Hogrefe
Olesya Uzunova

**2. Auflage**



**Binomi Verlag** **Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen**

**Telefon** **05105 6624000**
**Telefax** **05105 515798**
**E–Mail** **verlag@binomi.de**
**Internet** **www.binomi.de**

Druck BWH GmbH Medien Kommunikation

**Zu beziehen beim Verlag oder im Buchhandel**

ISBN 978–3–923 923–22–9

Hannover 10/08

# Vorwort

Das vorliegende Buch soll für Studierende der Wirtschaftswissenschaften eine begleitende Hilfe zu Mathematikvorlesungen sein. Darin werden Aufgaben aus allen gängigen Gebieten der Mathematik für Wirtschaftswissenschaften zu Übungszwecken angeboten.
Es wird empfohlen, Lösungen zunächst selbst zu erarbeiten und diese dann anhand der ausführlichen Lösungen zu kontrollieren. Natürlich können die Aufgaben mit Lösungen auch direkt zum Verständnis der Theorie bzw. mathematischer Verfahren durchgearbeitet werden. Um bei eventuell fehlenden Kenntnissen der zugrundeliegenden mathematischen Begriffe nicht gleich zusätzlich zu einem Lehrbuch greifen zu müssen, wurden fast allen Abschnitten eine kurze und übersichtliche Zusammenstellung der im entsprechenden Abschnitt benötigten Definitionen, sowie wichtiger Sätze vorangestellt. Dadurch ist das Buch auch gut zum Selbststudium geeignet.

Die Aufgaben sind abschnittsweise durchnumeriert worden. Bei Verweisen auf Aufgaben innerhalb des gleichen Abschnitts wird lediglich die laufende Aufgabennummer zitiert, sonst die gesamte Aufgabennummer, also einschließlich Kapitel- und Abschnittnummer.

Die Klausuraufgaben des letzten Kapitels sollen speziell der Vorbereitung und Handhabung von Fragestellungen in Klausuren dienen. Die Aufgaben wurden in den letzten Jahren am Fachbereich Wirtschaftswissenschaften der Universität Hannover in den Lehrveranstaltungen "Mathematik für Studierende der Wirtschaftswissenschaften" gestellt. Wichtig ist bei der Bearbeitung dieser Aufgaben auch die Beachtung des Zeitaufwands pro Aufgabe.

Hannover, September 2003

# Inhaltsverzeichnis

# Kapitel 1

# Funktionen

## 1.1 Grundlagen

Wir geben eine Zusammenstellung der Definitionen von Mengenbildungen.
Den Term $\{x \in X \mid ...\}$ lese man stets als:
Menge aller $x$ aus $X$ mit der Eigenschaft ....

### Mengenoperationen

$A$ und $B$ seien Teilmengen von $X$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A \cap B$ | $=$ | $\{x \in X \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$ | **Durchschnitt** von $A$ und $B$ |
| $A \cup B$ | $=$ | $\{x \in X \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$ | **Vereinigung** von $A$ und $B$ |
| $A \setminus B$ | $=$ | $\{x \in X \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$ | $A$ **vermindert** um $B$ |
| $A \times B$ | $=$ | $\{(x,y) \mid x \in A \text{ und } y \in B\}$ | **Kartesisches Produkt** von $A$ und $B$ |

### Besondere Zahlenmengen

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{N}$ | $=$ | $\{1,2,3,4,...\}$ | Menge der **natürlichen** Zahlen |
| $\mathbb{N}_0$ | $=$ | $\{0,1,2,3,4,...\}$ | |
| $\mathbb{Z}$ | | Menge der **ganzen** Zahlen | |
| $\mathbb{Q}$ | | Menge der **rationalen** Zahlen | |
| $\mathbb{R}$ | | Menge der **reellen** Zahlen | |
| $\mathbb{C}$ | | Menge der **komplexen** Zahlen | |

### Intervalle

| | | | |
|---|---|---|---|
| $[a,b]$ | $:=$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ | **(abgeschlossenes Intervall)** |
| $]a,b[$ | $:=$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ auch $(a,b)$ geschrieben | **(offenes Intervall)** |
| $[a,b[$ | $:=$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ | |
| $]a,b]$ | $:=$ | $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ | |

**1.1.1**
Es seien die folgenden Teilmengen von $\mathbb{Z}$ gegeben:
$X_1 := \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist eine gerade Zahl } \}$
$X_2 := \{y \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt ein } z \in \mathbb{Z} \text{ mit } y^2 + z^2 \leq 2\}$
$X_3 := \{y \in \mathbb{Z} \mid y \text{ ist teilbar durch } 6\}$
$X_4 := \{y \in \mathbb{Z} \mid (y^4 + y^2 - 2)(y^2 - 2y) = 0\}$
$X_5 := \{y \in \mathbb{Z} \mid 3y^2 \text{ ist teilbar durch } 4\}$

**a)** Man bestimme: $X_1 \cap X_2$, $X_3 \cup X_5$, $X_1 \setminus X_3$ und $X_2 \times X_4$.

**b)** Man untersuche, für welche $i, j \in \{1, \ldots, 5\}, i \neq j$ die Beziehung $X_i \subseteq X_j$ gilt. Welche der Mengen sind gleich?

Alle fünf Mengen lassen sich leicht in aufzählender Schreibweise angeben. Damit kann man dann a) und b) beantworten.
Sofort ersichtlich ist:

$$X_1 = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$$

und

$$X_3 = \{..., -12, -6, 0, 6, 12, 18, ...\}$$

Für $X_2$ findet man durch Einsetzen:

$$X_2 = \{-1, 0, 1\}$$

Da ein Produkt genau dann 0 ist, wenn mindestens ein Faktor 0 ist, folgt für $X_4$:

$$y \in X_4 \quad \Longleftrightarrow \quad y \in \mathbb{Z} \text{ und } \left(y(y-2) = 0 \text{ oder } y^4 + y^2 - 2 = 0\right)$$

$$\begin{aligned} y(y-2) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y = 0 \text{ oder } y = 2 \\ y^4 + y^2 - 2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad y = 1 \text{ oder } y = -1 \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$X_4 = \{-1, 0, 1, 2\}$$

$X_5$ kann nur gerade Zahlen enthalten. Ein Quadrat einer ungeraden Zahl und das Produkt ungerader Zahlen sind nämlich ungerade. Ist $y$ aber eine gerade Zahl, so ist $y^2$ und damit auch $3y^2$ durch 4 teilbar. Also gilt

$$X_5 = X_1 \,.$$

**a)** Man erhält:

$$\begin{aligned} &X_1 \cap X_2 = \{0\} \\ &X_3 \cup X_5 = X_1 \\ &X_1 \setminus X_3 = \{..., -8, -4, -2, 2, 4, 8, 10, 14, ...\} \\ &X_2 \times X_4 = \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (-1,2), ..., (1,2)\} \\ &X_2 \times X_4 \text{ hat } 3 \cdot 4 = 12 \text{ Elemente.} \end{aligned}$$

**b)** Durch Vergleich ergeben sich folgende Beziehungen:

$$X_2 \subseteq X_4, \qquad X_3 \subseteq X_1, \qquad \text{sowie } X_1 = X_5$$

**1.1.2**
Es seien $A$, $B$ und $C$ die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$,

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2x + 1\}, \quad B := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 10\},$$

und

$$C := \{x \in \mathbb{R} \mid x \cdot (1 - x) \leq x^2\}.$$

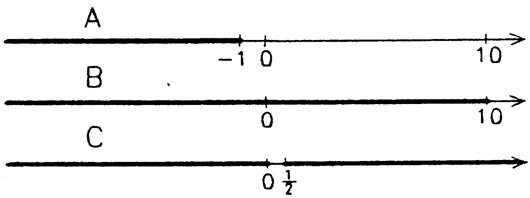
Man skizziere die Mengen A, B, C, $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$.
Man verifiziere am Beispiel
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ und $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Wegen $\quad x \geq 2x + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq -1 \quad$ ist $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$.

Zu $C$: Wegen $\quad x\,(1 - x) \leq x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x - x^2 \leq x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{2} \leq x^2$
muß $x \geq \frac{1}{2}$ oder $x \leq 0$ sein. (Bitte veranschaulichen Sie sich diesen Sachverhalt auch anhand einer Skizze der Graphen der Funktionen $f$ und $g$ mit $f(x) = \frac{x}{2}$ und $g(x) = x^2$.)

Also folgt: $\quad C = ]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, \infty[$

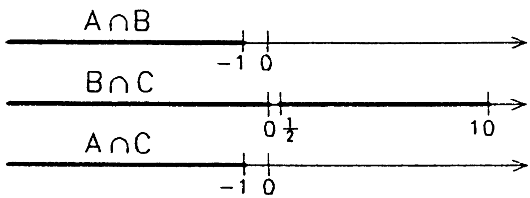
Skizze:




$$A \cap B = ]-\infty, -1], \quad B \cap C = ]-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, 10], \quad A \cap C = ]-\infty, -1]$$

$$A \cap B \cap C = ]-\infty, -1]$$

Skizze:

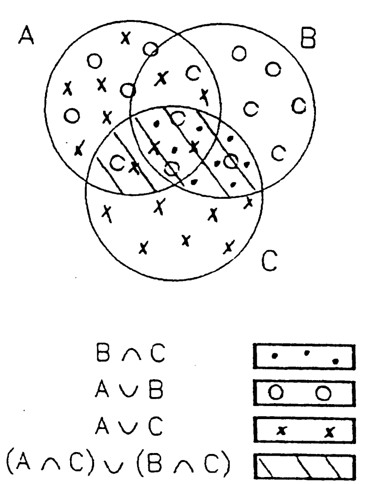


Es gilt $A \cup B = ]-\infty, 10]$. Nun folgt:

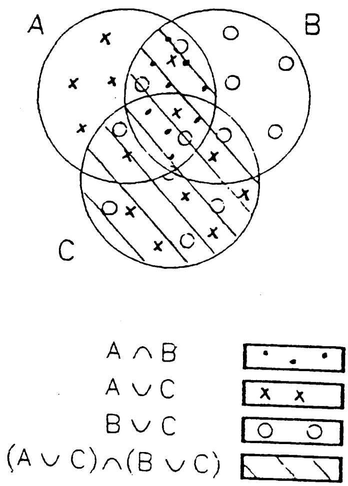
$$\begin{aligned}
(A \cup B) \cap C &= \;]-\infty,10] \cap (\,]-\infty,0] \cup [\,\tfrac{1}{2},\infty[\,) \\
&= \;]-\infty,0\,] \cup [\,\tfrac{1}{2},10\,] \\
(A \cap C) \cup (B \cap C) &= \;]-\infty,-1] \cup (\,]-\infty,0] \cup [\,\tfrac{1}{2},10]\,) \\
&= \;]-\infty,0\,] \cup [\,\tfrac{1}{2},10\,] \\
(A \cap B) \cup C &= \;]-\infty,-1] \cup (\,]-\infty,0] \cup [\,\tfrac{1}{2},\infty[\,) \\
&= \;]-\infty,0\,] \cup [\,\tfrac{1}{2},\infty[ \\
(A \cup C) \cap (B \cup C) &= (\,]-\infty,0] \cup [\,\tfrac{1}{2},\infty[\,) \cap \,]-\infty,\infty[ \\
&= \;]-\infty,0\,] \cup [\,\tfrac{1}{2},\infty[
\end{aligned}$$

**1.1.3**
Man mache sich an einem Bild für Mengen $A$, $B$ und $C$ die folgenden, allgemeinen Regeln klar:
$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ und $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$



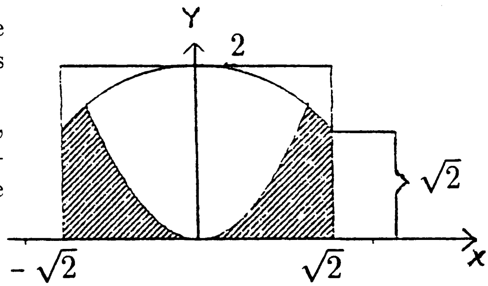

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$



**1.1.4**
Man skizziere die Menge

$$\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\le 4 \quad \text{und} \quad 0\le y\le x^2\le 2\}.$$

$\{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 4\}$ ist die abgeschlossene Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius 2.
$\{(x,y) \mid x^2 \ge y \ge 0\}$ beschreibt die Fläche unter der Parabel $y=x^2$ bis zur $x$-Achse.
Eine zweite Bedingung ist $x^2 \le 2$, also $x \le \sqrt{2}$ und $x \ge -\sqrt{2}$. Es ergibt sich die nebenstehend skizzierte Menge.




**1.1.5**
**a)** Man schreibe ausführlich:

$$\sum_{i=2}^{8}(2i+1) \qquad \text{und} \qquad \prod_{j=7}^{14} j$$

**b)** Man schreibe mit dem Summenzeichen:

$$4+6+8+10+12+14$$

**c)** Man schreibe mit dem Produktzeichen:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}$$

**a)** Es gilt:

$$\sum_{i=2}^{8}(2i+1) = 5+7+9+11+13+15+17$$

$$\prod_{j=7}^{14} j = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12\cdot 13\cdot 14$$

b) $$4+6+8+10+12+14 = \sum_{k=2}^{7} 2k$$

c) $$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5} = \prod_{n=1}^{4}\frac{n}{n+1}$$

**1.1.6**

Man berechne die folgenden Summen:

a) $\sum_{k=0}^{4} k^2$ b) $\sum_{i=1}^{5}(i^2+2)$

c) $\sum_{k=2}^{5} 10\cdot(\frac{1}{3})^k$ d) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k\cdot(k+1)}$

a)

$$\sum_{k=0}^{4} k^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2 = 30$$

b)

$$\sum_{i=1}^{5}(i^2+2) = 3+6+11+18+27 = 65$$

c)

$$\sum_{k=2}^{5} 10\,(\frac{1}{3})^k = 10\,(\frac{1}{3})^2 + 10\,(\frac{1}{3})^3 + 10\,(\frac{1}{3})^4 + 10\,(\frac{1}{3})^5 = \frac{400}{243}$$

**d)** Wegen $\frac{1}{k\,(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k\,(k+1)} &= \sum_{k=1}^{10}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}) = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}) = \\ &= 1-\frac{1}{11} = \frac{10}{11}\end{aligned}$$

<u>Hinweis:</u> In manchen Fällen verwendet man folgende Summen:
Für jede natürliche Zahl $n$ gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i &= 1+2+3+\ldots+n = \frac{n}{2}\,(n+1) \\ \sum_{i=1}^{n} i^2 &= 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n}{6}\,(n+1)\,(2n+1)\end{aligned}$$

**1.1.7**

Schreiben Sie unter Verwendung des Summenzeichens:

**a)** $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{1024}$

**b)** $3+8+15+24+\ldots+99$

**c)** $a+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}a^3+\ldots.+\frac{1}{128}a^8$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{1024} &= \frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\ldots+\frac{1}{2^{10}} \\
&= \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2^k} \\
3+8+15+24+\ldots+99 &= (4-1)+(9-1)+(16-1)+ \\
&\quad +(25-1)+\ldots+(100-1) \\
&= \sum_{i=2}^{10}(i^2-1) \\
a+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}a^3+\ldots+\frac{1}{128}a^8 &= (\frac{1}{2})^0 a+(\frac{1}{2})^1 a^2+\ldots+(\frac{1}{2})^7 a^8 \\
&= \sum_{k=0}^{7}(\frac{1}{2})^k a^{k+1} \\
\text{oder} \quad &= \sum_{k=1}^{8}(\frac{1}{2})^{k-1} a^k
\end{aligned}$$

**1.1.8**

Gegeben sind die Summen $\sum_{i=1}^{10} a_i = 3$ und $\sum_{i=1}^{10} a_i^2 = 6$ . Wie lautet

$$\sum_{i=1}^{10}(2a_i+1)(3a_i-2) \quad ?$$

Wegen $(2a_i+1)\,(3a_i-2) = 6a_i^2 - a_i - 2$ folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10}(2a_i+1)(3a_i-2) &= (\sum_{i=1}^{10} 6a_i^2) - (\sum_{i=1}^{10} a_i) - (\sum_{i=1}^{10} 2) = \\
&= 6\,(\sum_{i=1}^{10} a_i^2) - 3 - 10\cdot 2 = 6\cdot 6 - 3 - 20 = 13
\end{aligned}$$

**1.1.9**

Man schreibe die Doppelsumme $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{5} a_{ij}$ ausführlich.

Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{5} a_{ij} &= a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{25}\\ &\quad +a_{32}+a_{33}+a_{34}+a_{35}\end{aligned}$$

Man erkennt durch Umordung der Summanden, daß man die Summationsreihenfolge vertauschen darf.

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=2}^{5} a_{ij} = \sum_{j=2}^{5}\sum_{i=1}^{3} a_{ij}$$

**1.1.10**

Gegeben ist die Summe $\sum_{i=1}^{50} a_i = 400$ . Wie lautet

$$\sum_{k=1}^{50}\sum_{i=1}^{50} a_i(a_k+4) \quad ?$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{50}\sum_{i=1}^{50} a_i\,(a_k+4) &= \sum_{k=1}^{50}(a_k+4)(\sum_{i=1}^{50} a_i) =\\ &= 400\,((\sum_{k=1}^{50} a_k)+(\sum_{k=1}^{50} 4)) = 400\,(400+200)\\ &= 240000\end{aligned}$$

## 1.2 Ungleichungen

Für Ungleichungen gelten die folgenden Rechenregeln, mit denen äquivalente Umformungen durchgeführt werden können.
Beachten Sie insbesondere Regel 3.

**Rechenregeln für Ungleichungen**

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $a, b, c \in \mathbb{R}$ | : $a < b$ | $\Longleftrightarrow$ | $a + c < b + c$ |
| 2. | $a, b, c \in \mathbb{R}\,,\ c > 0$ | : $a < b$ | $\Longleftrightarrow$ | $ac < bc$ |
| 3. | $a, b, c \in \mathbb{R}\,,\ c < 0$ | : $a < b$ | $\Longleftrightarrow$ | $ac > bc$ |

**Betrag einer Zahl**

$$|x| := \begin{cases} x\,, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x\,, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Merke: **Der Betrag einer Zahl ist ihr Abstand vom Nullpunkt auf der Zahlengeraden.**

**1.2.1**
Welche reellen Zahlen $x$ erfüllen die Ungleichung

$$\frac{1}{x-1} < 1\,?$$

Multipliziert man hier mit dem Nenner $x - 1$, so hängt es von $x$ ab, welche der angegebenen Regeln 2 und 3 anzuwenden sind. Es wird also eine **Fallunterscheidung** durchgeführt:
<u>1. Fall:</u> $x - 1 > 0$, d. h. $x > 1$
In diesem Fall gilt:

$$\frac{1}{x-1} < 1 \iff 1 < x - 1 \iff 2 < x$$

In diesem Fall erhält man also die **Erfüllungsmenge** $L_1 = (2, \infty)$ der Ungleichung.
<u>2. Fall:</u> $x - 1 < 0$, d. h. $x < 1$
Hier gilt:

$$\frac{1}{x-1} < 1 \iff 1 > x - 1 \iff 2 > x$$

Dies führt auf einen zweiten Teil der Erfüllungsmenge, nämlich $L_2 = (-\infty\,, 1)$.
Insgesamt gilt für die Erfüllungsmenge $L$:

$$L = L_1 \cup L_2 = (-\infty\,, 1) \cup (2, \infty)$$

**1.2.2**

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden Ungleichungen?
Man gebe äquivalente Umformungen an, und skizziere die entsprechenden Punktmengen auf der Zahlengeraden.

a) $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} < 1$ b) $\dfrac{x^2+x-2}{|x^2-1|} < 1$

Beide Quotienten sind für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ definiert.
**a)** 1. Fall: $x^2 > 1$

Dann ist

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-1} < 1 \iff x^2+x-2 < x^2-1 \iff x < 1$$

Also folgt hier $x < -1$ wegen $x^2 > 1$.

2. Fall: $x^2 < 1$

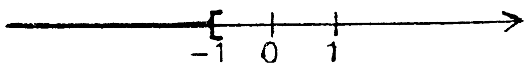
Dann ist

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-1} < 1 \iff x^2+x-2 > x^2-1 \iff x > 1$$

In diesem Fall erfüllen keine $x \in \mathbb{R}$ die gegebene Ungleichung, da aus der Voraussetzung $x^2 < 1$ folgt: $-1 < x < 1$

Insgesamt erfüllen genau alle $x \in ]-\infty, -1[$ die gegebene Ungleichung.

Skizze:




**b)**

$$\frac{x^2+x-2}{|x^2-1|} < 1 \iff x^2+x-2 < |x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & \text{falls } x^2 > 1 \\ 1-x^2 & \text{falls } x^2 < 1 \end{cases}$$

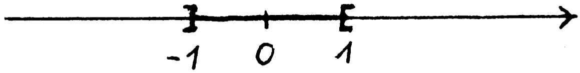
Wieder werden Fallunterscheidungen wie unter a) gemacht, wobei der erste Fall sogar identisch mit dem Fall unter a) ist.
2. Fall: $x^2 < 1$

$$x^2+x-2 < 1-x^2 \iff x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{2} < 0 \iff (x-1)\,(x+\frac{3}{2}) < 0$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt für alle $x$ mit $-\frac{3}{2} < x < 1$, da ein Produkt aus zwei Faktoren genau dann negativ ist, wenn ein Faktor negativ und der andere

Faktor positiv ist. Unter der Voraussetzung $x^2 < 1$ dieses 2. Falles erfüllen also alle $x$ mit $x \in ]-1,1[$ die Ungleichung.

Skizze:




**1.2.3**

Welche $x \in \mathbb{R}$ genügen den folgenden Ungleichungen?

**a)** $\dfrac{x^2+2x-4}{x-2} < x+3$ **b)** $\dfrac{2x+3}{|x+1|} < 1$

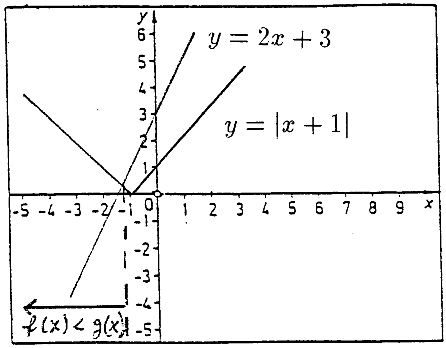
Die Ungleichungen gelten für:

**a)** $x \in (-2, 2)$

**b)** $x \in (-\infty, -\frac{4}{3})$

Graphische Interpretation:

$$\frac{2x+3}{|x+1|} < 1 \iff \underbrace{2x+3}_{f(x)} < \underbrace{|x+1|}_{g(x)}$$




**1.2.4**

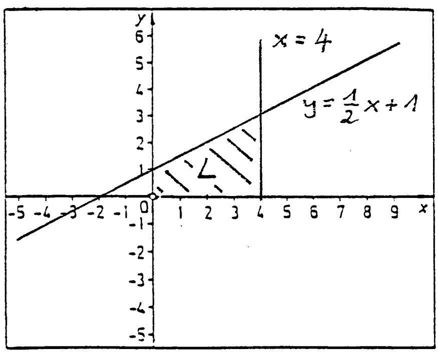
Welche Punkte der $(x, y)$–Ebene erfüllen die folgenden drei Ungleichungen?

$$\frac{1}{2}x - y + 1 \geq 0\,, \qquad y \geq 0\,, \qquad 0 \leq x \leq 4$$

Wir führen die äquivalente Umformung

$$\frac{1}{2}x - y + 1 \iff y \leq \frac{1}{2}x + 1$$

durch. Man erkennt nun alle Begrenzungsgeraden des Lösungsbereichs, und erhält so die nebenstehende Skizze.



### 1.2.5

Herr G. Recht möchte jedem seiner Kinder ein Geschenk machen. Dazu stehen ihm höchstens 36 € zur Verfügung. Der Preis für jedes Geschenk soll mindestens 10 € betragen, beide Geschenke sollen sich in ihrem Wert um höchstens 5 € unterscheiden. Man bezeichne die Preise mit $x$ und $y$ und skizziere die möglichen Preiskombinationen in der $(x, y)$−Ebene.

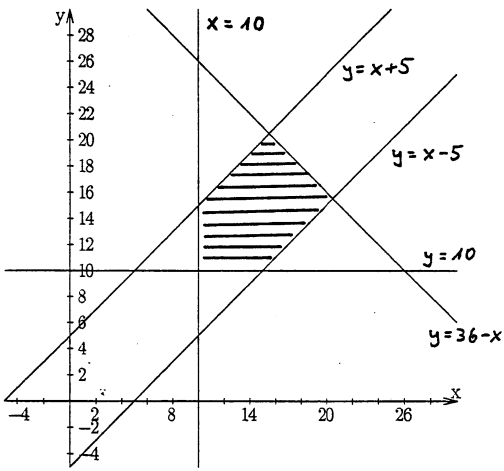
Die nachstehende Skizze ergibt sich aus den folgenden Bedingungen:

$$x \geq 10, \quad y \geq 10, \quad |x - y| \leq 5, \quad x + y \leq 36$$

Dabei führt $|x - y| \leq 5$ wegen

$$|x - y| \leq 5 \iff -5 \leq x - y \leq 5$$

auf die beiden eingezeichneten parallelen Geraden, die durch $y = x - 5$ (rechte Ungleichung) und $y = x + 5$ (linke Ungleichung) gegeben sind.



## 1.3 Elementare Funktionen

Eine mengentheoretische Schreibweise für Funktionen ist:

$$f : \begin{cases} A & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

$A$ heißt **Definitionsbereich**, $B$ heißt **Wertebereich** von $f$.
Wir geben Funktionen hier meist durch ihre **Funktionsgleichung**

$$f(x) = \ldots \quad \text{oder} \quad y = f(x)$$

an.

**Verknüpfung von Funktionen**

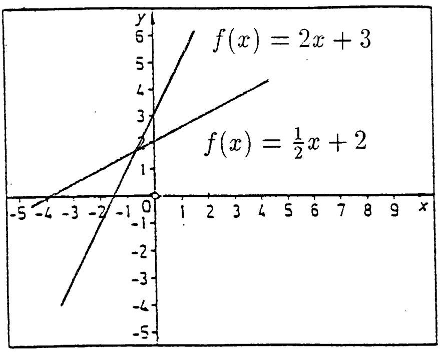
| | | | |
|---|---|---|---|
| $(f+g)(x)$ | $:=$ | $f(x)+g(x)$ | **Summe** von $f$ und $g$ |
| $(f \cdot g)(x)$ | $:=$ | $f(x) \cdot g(x)$ | **Produkt** von $f$ und $g$ |
| $(f \circ g)(x)$ | $:=$ | $f(g(x))$ | **Verkettung** von $f$ und $g$ |

**1.3.1**
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen mit:

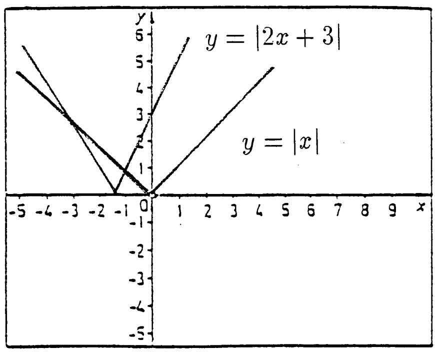
**a)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ **b)** $f(x) = 2x + 3$ **c)** $y = |x|$

**d)** $y = |2x + 3|$ **e)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$ **f)** $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ , $|x| \leq 3$

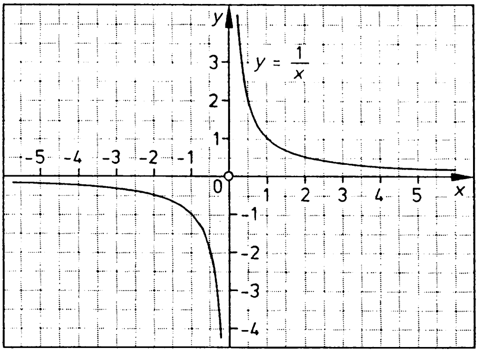
a) , b)



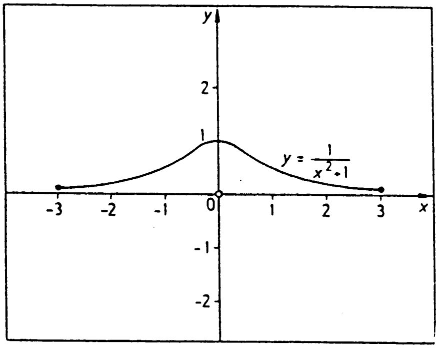

c) , d)



e)




f)




**1.3.2**
Es sei $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ und $g(x) = x^2$.
Man berechne die Funktionsterme für $f + g$, $f \cdot g$, $f \circ g$, $g \circ f$, und gebe jeweils den größtmöglichen Definitionsbereich der entstehenden Funktion an.

Zunächst folgt für $f + g$ und für $f \cdot g$:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x^2+\frac{1}{2}x+2, \qquad (f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = \frac{1}{2}x^3+2x^2$$

Für die Verkettung folgt:

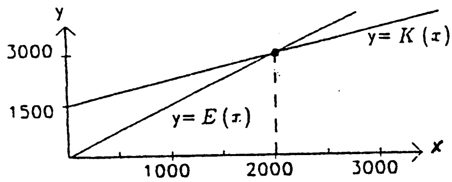
$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = \frac{1}{2}x^2 + 2\\ (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(\frac{1}{2}x + 2) = (\frac{1}{2}x + 2)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4\end{aligned}$$

Alle diese Funktionen besitzen den Definitionsbereich $\mathbb{R}$.

**1.3.3**
Bei der Produktion eines Gutes entstehen fixe Kosten von 1500 € und variable Kosten von 0,75 € /Stück. Geben Sie die Funktion an, die die Gesamtkosten $K$ in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge bestimmt. Wie groß muß die produzierte und abgesetzte Menge $x_1$ sein, damit ein Gewinn erzielt wird, wenn für die Erlösfunktion $E$ gilt: $E(x) = 1,5x$?
Zeichnen Sie die Graphen der Kosten– und Erlösfunktionen!

Während die fixen Kosten von der Ausbringungsmenge $x$ unabhängig sind, ergeben sich die variablen Kosten zu $0,75 \cdot x$ (Einheit ist € ). Also ist

$$K(x) = 1500 + 0,75x, \quad (x \geq 0)$$




die Kostenfunktion. Es wird Gewinn erzielt, wenn $K(x) < E(x)$ gilt. Es ist $K(x) < E(x)$ genau dann, wenn $1500 + 0,75x < 1,5x$ gilt. Dies ist für $x = 2000$ erfüllt.

Ergebnis: Für $x > 2000$ wird Gewinn erzielt.

**1.3.4**
Der Preis eines Produktes ist eine lineare Funktion der Ausbringungsmenge $x$ mit der Gleichung $p = 5 - 0,2 \cdot x$. Man skizziere den Graphen von $p = p(x)$ und ermittle den Erlös in Abhängigkeit von der Ausbringungsmenge. Man bestimme die Ausbringungsmenge mit dem maximalen Erlös.

Aus dem Zusammenhang

Erlös = Preis * Absatz

folgt für den Erlös $E(x)$ in Abhängigkeit von dem Absatz $x$:

$$E(x) = p(x) \cdot x = (5 - 0,2x)\,x = 5x - 0,2x^2$$

Die Erlösfunktion ist also eine quadratische Funktion, ihr Graph also eine Parabel.

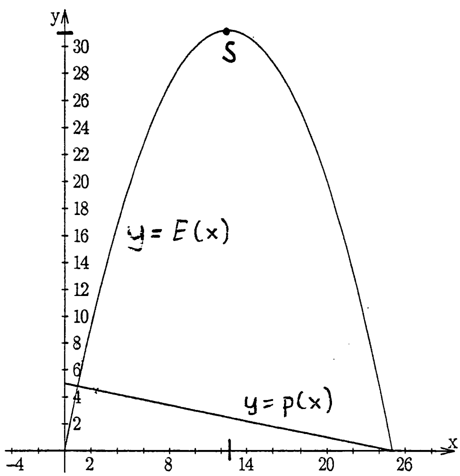
Die Nullstellen von

$$E(x) = x\,(5 - 0,2x)$$

sind 0 und 25. Das Argument $x_s$ des Scheitelpunktes einer quadratischen Parabel ist aus Symmetriegründen die Mitte zwischen den Nullstellen. Es folgt:

$$x_s = \frac{1}{2}(0 + 25) = 12,5$$

Wegen $E(12,5) = 31,25$ folgt
$S = (12,5\,;\,31,25)$,
d. h. der maximale Erlös beträgt 31,25.



**1.3.5**

Durch die nachstehenden Gleichungen sind Parabeln gegeben.

$(i) \quad y = x^2 + 2x - 3 \quad (ii) \quad y = 3x^2 - 12x + 9 \quad (iii) \quad y = 2x^2 - 8x + 6$

**a)** Man bestimme die Scheitelpunkte der Parabeln.

**b)** Man bestimme die Nullstellen der Parabeln.

**c)** Mit Hilfe von b) bestimme man – falls möglich – die Scheitelpunkte der Parabeln auf eine zweite Art.

**d)** Man fertige eine Skizze an.

**a)** Aus der Form $y = a\,(x - x_s)^2 + y_s$ erkennt man $(x_s, y_s)$ als Scheitelpunkt der Parabel. Mittels quadratischer Ergänzung wird also die gegebene Gleichung jeweils auf diese Form gebracht.

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad y &= x^2 + 2x - 3 \\
&= (x+1)^2 - 1 - 3 \\
&= (x+1)^2 - 4 && \Longrightarrow \quad \text{Scheitelpunkt:} \quad S = (-1, -4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad y &= 3x^2 - 12x + 9 \\
&= 3\,(x^2 - 4x) + 9 \\
&= 3\,(x-2)^2 - 12 + 9 \\
&= 3\,(x-2)^2 - 3 && \Longrightarrow \quad \text{Scheitelpunkt:} \quad S = (2, -3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(iii)} \quad y &= -2x^2 + 16x - 33 \\
&= -2\,(x^2 - 16x) - 33 \\
&= -2\,(x-4)^2 + 32 - 33 \\
&= -2\,(x-4)^2 - 1 && \Longrightarrow \quad \text{Scheitelpunkt:} \quad S = (4, -1)
\end{aligned}$$

**b)** Die Nullstellen von $x^2 + px + q$ sind gegeben durch

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ ,$$

falls $\dfrac{p^2}{4} - q \geq 0$.

(i) $\quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+3} = -1 \pm 2 \qquad$ Nullstellen: $\;1$ und $-3$

(ii) $\quad 3x^2 - 12x + 9 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3}$
Nullstellen sind 1 und 3.

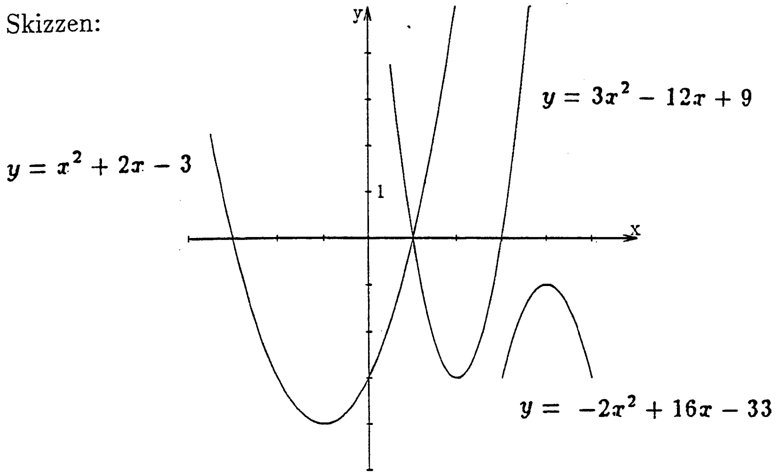
(iii) $\quad -2x^2 + 16x - 33 = 0 \iff x^2 - 8x + \dfrac{33}{2} = 0$

$\dfrac{p^2}{4} - q = 16 - \dfrac{33}{2} < 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Es existieren keine Nullstellen.

(Das entnimmt man auch schon Teil a), da es sich um eine nach unten geöffnete Parabel handelt, deren Scheitelpunkt unterhalb der $x$–Achse liegt.

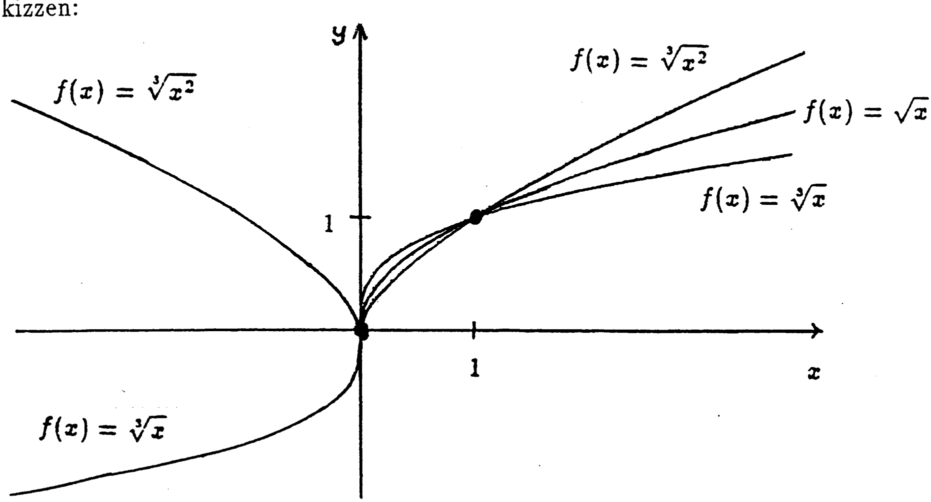
c) Sind Nullstellen vorhanden, so ist aus Symmetriegründen die Abszisse des Scheitelpunktes die Mitte zwischen den Nullstellen.
Damit erhält man bei der ersten Parabel $S = (-1, f(-1))$ und bei der zweiten Parabel $S = (2, f(2))$. Der jeweilige Funktionswert läßt sich mittels der gegebenen Gleichung berechnen.
Bei der dritten Parabel versagt diese Methode, da keine Nullstellen vorhanden sind.

d) Skizzen:




**1.3.6**
Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen, die gegeben sind durch:
a) $y = f(x) = \sqrt{x}\,, \quad x \in [0, \infty)$ b) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}\,, \quad x \in \mathbb{R}$
c) $y = f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}$

Skizzen:



**1.3.7**

Durch die nebenstehende Tabelle sind Werte einer Funktion $f$ gegeben. Aus Erfahrung weiß man, daß $f$ eine quadratische Funktion ist, d. h. es gilt $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Welcher Funktionswert ergibt sich für $f$ an der Stelle 5,2?

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 3 |

Aufgrund der Einfachheit des Problems sollte hier keine Polynominterpolation nach LAGRANGE vorgenommen werden. Aus dem Wertepaar $(0; 0)$, d. h. $f(0) = 0$ erkennt man nämlich sofort, daß $c = 0$ gilt. Es verbleibt der Ansatz $f(x) = ax^2 + bx$.

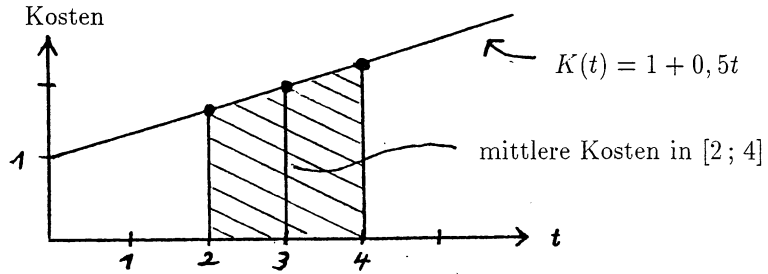
Das Wertepaar $(2; 1)$ ergibt: $1 = 4a + 2b$
Das Wertepaar $(4; 3)$ ergibt: $3 = 16a + 4b$

Diese beiden Gleichungen liefern ein einfaches Gleichungssystem mit der Lösung $a = \frac{1}{8}$, $b = \frac{1}{4}$.

Damit folgt $f(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$ und es ist $f(5,2) \approx 4,68$.

**1.3.8**

Für ein gewisses Problem sei der Graph der momentanen Kosten gegeben durch $K(t) = 1 + 0,5t$ (wie stets unter Festlegung entsprechender Einheiten). $(t \geq 0)$
Veranschaulichen Sie die Kosten für das Zeitintervall $[2\,; 4]$, und bestimmen Sie diese.




Da $K(t)$ eine lineare Funktion darstellt, gilt:

$$\text{Kosten für das Zeitintervall} = \underbrace{\begin{matrix}\text{mittlere Kosten}\\ \text{im Zeitintervall}\end{matrix} * \text{Intervallänge}}_{=\text{ schraffierte Trapezfläche}}$$

$$= K(3) \cdot 2 = 2,5 \cdot 2 = \underline{\underline{5}}$$

# 1.4 Polynome, binomischer Satz, Binomialkoeffizient

Wir geben hier die Definition sowie einige wichtige Formeln für die Binomialkoeffizienten an.

Es wird definiert: $0! := 1$
$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ für $n \in \mathbb{N}$
(lies: $n-$**Fakultät**)

**Binomischer Satz**

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ heißen **Binomialkoeffizienten** und sind definiert durch:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \quad \text{für } n, k \in \mathbb{N}_0\,,\ n \geq k$$

Es gilt:

1. $\binom{n}{k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$ falls $n \geq k \geq 1$

2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3. **Rekursionsformel** $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

**1.4.1**
Man dividiere das Polynom $p(x) = x^3 + 2x - 1$ durch den Linearfaktor $x+1$.

Es ist auf übersichtliche Schreibweise zu achten, da der Term $x^2$ nicht auftritt.

$$\begin{array}{rrrrrrl}
x^3 & & & + & 2x & - & 1 \quad : (x+1) = x^2 - x + 3 - \dfrac{4}{x+1} \\
-(x^3 & + & x^2\,) & & & & \\
\hline
& - & x^2 & + & 2x & - & 1 \\
-( & - & x^2 & - & x\,) & & \\
\hline
& & & & 3x & - & 1 \\
& & & & -(3x & + & 3) \\
\hline
& & & & & - & 4
\end{array}$$

**1.4.2**
Man berechne alle reellen Nullstellen der folgenden Polynome $p$, $(x \in \mathbb{R})$

**a)** $p : x \mapsto 3x^2 + 12x - 15$  **b)** $p : x \mapsto x^3 - 2x^2 - 5x + 6.$

(Hinweis zu (b): $p$ hat eine ganzzahlige Nullstelle.)

**a)** $p(x) = 0 \iff x^2 + 4x - 5 = 0$

Nullstellen von $x^2 + px + q = 0$ berechnen sich zu:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Mit $p = 4$ und $q = -5$ erhält man hier:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{9} = -2 \pm 3$$

Ergebnis: Nullstellen sind 1 und $-5$.

**b)**
1. Schritt: Eine ganzzahlige Nullstelle wird geraten. 1 ist eine Nullstelle, wie man durch Einsetzen erhält.
2. Schritt: $x - 1$ ist ein Teiler von $p$, d. h. es gilt $p(x) = (x - 1)\,q(x)$, wobei die weiteren Nullstellen von $p$ die Nullstellen von $q$ sind. Es wird nun also eine Polynomdivision durchgeführt, um $q(x)$ zu berechnen.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x^3 & - & 2x^2 & - & 5x & + & 6) \quad : (x-1) = x^2 - x - 6 \\
-(x^3 & - & x^2\ ) & & & & \\
\hline
 & - & x^2 & - & 5x & + & 6 \\
 & -(- & x^2 & + & x\ ) & & \\
\hline
 & & & - & 6x & + & 6 \\
 & & & -(- & 6x & + & 6) \\
\hline
 & & & & & & 0
\end{array}$$

Es ist also $q(x) = x^2 - x - 6$, und Nullstellen von $q$ sind:

$$x_{1,2} = -\frac{(-1)}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$$

Ergebnis: Nullstellen sind $-2$, 1 und 3.

**1.4.3**
Eine ganze rationale Funktion besitzt die Form

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R})$$

und hat die vier Nullstellen $x_1 = 2$; $x_2 = 3,5$; $x_3 = -1$; $x_4 = 4$.
Wie lautet $d$ ?

Die ganze rationale Funktion ist ein normiertes Polynom vom Grade 4. Ein solches Polynom ist durch die Angabe aller 4 Nullstellen $x_1$, $x_2$, $x_3$ und $x_4$ eindeutig bestimmt zu:

$$(x - x_1)\,(x - x_2)\,(x - x_3)\,(x - x_4)$$

Ausmultiplizieren liefert für $d$:

$$d = (-x_1)\,(-x_2)\,(-x_3)\,(-x_4) = (-2)\,(-3,5)\,(+1)\,(-4) = -28$$

**1.4.4**

Aus $(4 + 0,5x)^{10}$ erhält man durch Umformung ein Polynom 10. Grades der Form $a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{10}x^{10}$. Wie lautet der Koeffizient $a_8$ des Summanden $a_8x^8$ ?

In der binomischen Formel $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ setzen wir hier:

$a = 4$, $b = \frac{x}{2}$, $n = 10$ und $k = 8$.

Es folgt:

$$a_8x^8 = \binom{10}{8} \cdot 4^{10-8} \cdot (\frac{x}{2})^8$$

$$a_8 = \binom{10}{2} \cdot 4^2 \cdot (\frac{1}{2})^8 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^4}{2^8} = \frac{45}{16}$$

**1.4.5**

Schreiben Sie ausführlich (ohne Klammer) :

**a)** $(a+b)^5$ **b)** $(1+x)^6$ **c)** $(2 - \frac{x}{2})^7$ **d)** $(1 + 0,1x)^5$

**a)** $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

**b)** $1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$

**c)** $128 - 224x + 168x^2 - 70x^3 + \frac{35}{2}x^4 - \frac{21}{8}x^5 + \frac{7}{32}x^6 - \frac{1}{128}x^7$

**d)** $1 + 0,5x + 0,1x^2 + 0,01x^3 + 0,0005x^4 + 0,00001x^5$

**1.4.6**

Berechnen Sie:

**a)** $\binom{10}{4}$ **b)** $\binom{201}{198}$ **c)** $\binom{23}{4} + \binom{23}{5}$

**a)**

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$$

**b)** Wir benutzen hier die Formel: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\binom{201}{198} = \binom{201}{3} = \frac{201 \cdot 200 \cdot 199}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 1\,333\,300$$

**c)** Für die Binomialkoeffizienten gilt die Rekursionsformel:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

$$\binom{23}{4} + \binom{23}{5} = \binom{24}{5} = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 42\,504$$

### 1.4.7

Man zeige: Für jede natürliche Zahl $n$ gilt: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Die Richtigkeit der Aussage läßt sich mittels vollständiger Induktion zeigen. Unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes ist jedoch auch ein direkter Beweis möglich:
Man wählt in $(a+b)^n$ die Zahlen a und b jeweils zu 1 und erhält:

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$