Dietrich Feldmann

Repetitorium der Numerischen Mathematik

2. Auflage

HANSER

REPETITORIUM
DER
NUMERISCHEN MATHEMATIK

Dietrich Feldmann

2. Auflage

Alle Rechte vorbehalten.

Binomi Verlag Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen

Telefon 05105 6624000

Telefax 05105 515798

E-Mail verlag@binomi.de

Internet www.binomi.de

Druck BWH GmbH Medien Kommunikation

Zu beziehen beim Verlag oder im Buchhandel

ISBN 978-3-923923-07-6

Hannover 10/07

Vorwort

Dieses Buch ist weder ein Lehrbuch noch kann es mathematische Vorlesungen ersetzen, im Gegenteil: Die Möglichkeiten, den Stoff parallel zur Vorlesung zu erarbeiten, soll es verbessern helfen, um mehr Studenten in die Lage zu versetzen, den Stoff *sofort* nacharbeiten zu können.

Unsere Erfahrungen zeigen, daß viele Studenten zum Verständnis mathematischen Stoffes Beispiele benötigen, anhand derer sie versuchen, Inhalt und Aussage von Sätzen, Formeln und Verfahren zu verstehen. Das geschieht gewöhnlich in Übungen, leider aber zunehmend unter Zeitdruck. Damit ist ein Ziel dieses Buches umrissen: Mathematik durch Beispiele leichter verständlich zu machen. Da es sich in der Angewandten Mathematik meist um das handelt, was man "Verfahren" nennt, werden in der Mehrzahl Rechnungen vorgeführt, die Theorie dazu ist Gegenstand von Vorlesungen. Auch werden die Verfahren gewöhnlich in ihrer "ursprünglichen" Form vorgeführt, also ohne Abwandlungen für Sonderfälle bzw. weitere Verallgemeinerungen.

Wir meinen, daß viele "Verfahren" im Grunde recht einfach sind. Um so bedauerlicher ist es, daß nicht wenige Studenten hiermit Probleme haben. Das Ziel einer *wissenschaftlichen* Ausbildung geht aber weit über ein Anwendenkönnen von Verfahren hinaus: Die zugehörige Theorie und ihre Grenzen soll der Student kennenlernen um ggf. diese dem vorliegenden Problem anpassen und die dann gewonnenen Ergebnisse richtig einschätzen zu können. Wir hoffen, daß es dem Lernenden anhand unserer Beispiele erleichtert wird, die Verfahren zu verstehen, um Zeit für das Verständnis der genannten Zusammenhänge zu finden, wie sie in Vorlesungen gebracht werden.

Ein weiteres Ziel dieses Buches ist es, bei Prüfungen, insbesondere Klausuren, zu helfen; viele der Beispiele waren Klausuraufgaben. Daher sind die Beispiele meist einfach, um "per Hand" gerechnet werden zu können. Hier befindet sich der Student vor Prüfungen in der Situation, sich selbst prüfen zu müssen, um herauszufinden, ob seine Vorbereitung ausreichend, besser: gut ist. *Während* einer Klausur sucht er, soweit erlaubt, nach Hilfsmitteln, die ihn auf den richtigen Weg führen und ist für Tips dankbar. Dazu soll der zu Beginn eines jeden Kapitels stehende kurze Abschnitt "Besondere Tips und Hinweise" dienen: Man kann sich damit hoffentlich schnell und richtig an Wesentliches und Nützlichem erinnern; Grafiken und Übersichten sollen den Ablauf eines Verfahrens veranschaulichen. Hier stehen häufig auch Tips mit dem Tenor "*erst denken - dann rechnen*". So geschieht es in Klausuren "im Eifer des Gefechts" leider oft, daß jemand das Integral über ein Intervall $[-a, a]$ für eine ungerade Funktion "berechnet" und dann (hoffentlich) 0 herausbekommt; besser ist es, *vorher* zu bemerken, daß dieses notwendig der Wert des Integrals ist. Solche und ähnliche Tips findet man hier,

bezogen auf den Stoff des jeweiligen Abschnittes. Wenn das nicht ausreicht, suchen sich viele Studenten in Klausursituation Beispiele, die der Klausuraufgabe möglichst ähneln und versuchen, sich daran zu orientieren. Um dieses zu erleichtern, sind wie die Übersichten auch die Beispiele weitgehend gegliedert. Etwa: 1) Auflösen nach ..., 2) Einsetzen in ..., 3) Integrieren ... usw.. Auch dadurch soll der Ablauf einer Rechnung übersichtlich gemacht werden.

Ein ausführlicher alphabetischer Index soll die Suche nach Begriffen erleichtern.

Dietrich Feldmann

Inhaltsverzeichnis

Lineare Gleichungssysteme	5
1. Bemerkungen zu den numerischen Verfahren	8
2. Der Gauß-Algorithmus	15
3. Gleichungssysteme mit Tridiagonalmatrix	26
4. Das Verfahren von Banachiewicz	28
5. QR-Zerlegung einer Matrix	33
6. Das Verfahren von Cholesky und Cholesky-Zerlegung	37
7. Das Jacobi- oder Gesamtschrittverfahren	43
8. Das Gauß-Seidel- oder Einzelschrittverfahren	45
9. Rundungsfehler	48
A. Abschätzung von Näherungen	48
B. Verfahren der Nachiteration	49
C. Fehler in den Eingangsdaten (Datenfehler)	52
D. Der Satz von Prager und Oettli	54
10. Methode der kleinsten Quadrate für überbestimmte Systeme	57
Eigenwertaufgaben	59
1. Begriff der Eigenwertaufgabe und Eigenschaften	63
2. Hessenberg-Matrizen	71
A. Berechnung des charakteristischen Polynoms	73
B. Das Verfahren von Hyman für Hessenberg-Matrizen	78
3. Das Verfahren von Wilkinson (Wilkinson-Transformation)	81
4. Das Verfahren von Householder (Householder-Transformation)	89
5. Matrix-Deflation durch Ähnlichkeitstransformation	95
6. Das Verfahren von Jacobi (Jacobi-Rotation)	99
7. QR-, LR- und LR-Verfahren mit Cholesky-Zerlegung	103
8. Das von Misessche Iterationsverfahren (Potenzmethode, Vektoriteration)	108
9. Inverse Iteration nach Wielandt	113
Interpolation	117
1. Das allgemeine Horner-schema	119
2. Interpolation mit Polynomen	122
3. Der Algorithmus von Neville-Aitken	130
4. Interpolation mit kubischen Splinefunktionen	131
5. Ausgleichsrechnung (Polynomausgleich)	140
Integration (Quadratur)	143
1. Interpolatorische Formeln	143
2. Gaußsche Quadraturformeln	145
Lineare Optimierung	151
1. Beschreibung des Problems	152
2. Graphisches Verfahren für Probleme mit zwei Variablen	154
3. Das Simplex-Verfahren	159
Anfangswertaufgaben	177
1. Einschrittverfahren (Euler, Heun, Cauchy, Runge-Kutta)	178
2. Mehrschrittverfahren (Adams, Bashforth)	184
3. Runge-Kutta-Verfahren für 2×2 -Systeme 1. Ordnung	186
4. Runge-Kutta-Nystroem-Verfahren für Anfangswertaufgaben 2. Ordnung	189
5. Runge-Kutta-Verfahren für 2×2 -Systeme 2. Ordnung	193
Variationsrechnung	197
1. Variationsprobleme 1. Ordnung	198
2. Variationsprobleme höherer Ordnung	207
3. Das Ritz-Verfahren für Variationsprobleme	216
4. Variationsprobleme für Funktionen von 2 unabhängigen Veränderlichen	221

Ritz-Verfahren für Randwertaufgaben	225
1. Berechnung der Grundfunktion	225
2. Berechnung der Belastungsglieder	233
Rand- und Eigenwertaufgaben	255
1. Vorbemerkungen zu den Eigenwertaufgaben	259
2. Teilhomogenisierung	264
3. Transformation auf $[-1,1]$ oder $[0,1]$	265
4. Das Schießverfahren	266
5. Das Differenzenverfahren	269
6. Verfahren, die den Defekt benutzen	278
Partielle Differentialgleichungen	309
1. Der Separationsansatz (Produktansatz)	314
2. Das Differenzenverfahren	320
3. Stabilität, Abbruchfehler	341
Laplace-Transformation	345
1. Laplace-Transformation	348
2. Rücktransformation	363
3. Anwendung auf Anfangswertaufgaben	369
4. Anwendungen	383
Index	393

Lineare Gleichungssysteme

Besondere Tips und Hinweise

1. Man mache sich die im 1. Abschnitt genannten Sachverhalte gut klar.
2. Gaußscher Algorithmus
 - a) Ein Gleichungssystem $A\vec{x}=\vec{b}$ wird gelöst durch Überführung in $R\vec{x}=\vec{c}$, wobei R eine obere Dreiecksmatrix ist (wenn A quadratisch), das dann durch Rückwärtssubstitution ("von unten") gelöst wird. Um Rundungsfehler möglichst klein zu halten, sollte man, insbesondere wenn Koeffizienten stark abweichender Größenordnungen auftreten, das System vor der weiteren Behandlung äquilibrieren (skalieren) – besser: so tun, als ob man es täte (Beispiel 2 am Schluß). Dabei sind drei Fälle möglich:
 1. Natürliche Pivotwahl: Die jeweils links oben stehende Zahl des entstandenen Systems wird zur Elimination benutzt (Beispiele 1 und 4).
 2. Partielle Pivotwahl (Spalten-Pivotwahl): Die betragsgrößte *unter* der links oben stehenden Zahl wird zur Elimination benutzt, z.B. wenn oben links eine 0 steht. Das hat auf die Lösung keinen Einfluß.
 - ♥ Besonderer Tip: Bei Handrechnung erzeugt man leicht Brüche, daher nehme man dann nicht unbedingt die betragsgrößte Zahl sondern eine andere (wenn möglich ± 1) (Beispiel 2).
 3. Totale Pivotwahl: Die betragsgrößte Zahl im Rest-System Zahl wird nach links oben gebracht. Das erfordert die Notierung der Spaltenvertauschungen in einem Permutationsvektor, weil die Lösung des entstandenen Systems eine Permutation der des gegebenen ist (Beispiel 3).
 - ♥ Besonderer Tip: Bei Handrechnung meist schwerfällig, man erzeugt Brüche, auch wenn A und $\vec{b}$ ganzzahlig sind; im Rechner vorteilhaft.
 - b) Bei 1. und 2. ergibt sich ohne Zusatzrechnung eine Zerlegung von A , nämlich $A=L\cdot R$ (bei natürlicher, Beispiel 1) oder $P\cdot A=L\cdot R$ (bei partieller Pivotwahl Beispiel 2), wobei P eine Permutationsmatrix ist, R obere ("rechte") und L untere ("linke") Dreiecksmatrix, die auf der Diagonale lauter 1 hat. $P\cdot A$ entsteht dabei aus A durch Vertauschung der Zeilen untereinander.
 - c) Auch lineare Matrizengleichungen $A\cdot X=B$ lassen sich als "mehrere Gleichungssysteme mit gleicher Koeffizientenmatrix A und mehreren rechten Seiten, den Spalten von B " behandeln (Beispiel 5), insbesondere Berechnung der Inversen (Beispiel 6).
3. Sonderfall: Tridiagonalmatrizen

Variante des Gauß-Algorithmus, die berücksichtigt, daß viele Elemente der Koeffizientenmatrix bereits 0 sind (Beispiel 7).
4. Verfahren von Banachiewicz (erläuterndes Beispiel 8)

Variante des Gauß-Algorithmus, die Schreiarbeit erspart: man schreibt das System, ohne die Zwischenergebnisse zu notieren, Zeile für Zeile um. Man richte sich bei der Rechnung nach den angegebenen Skizzen, die die Vorgehensweise verdeutlichen (wird Pivotwahl gemacht, wird die Sache leicht zu einer verwirrenden Konzentrationsaufgabe).

5. QR-Zerlegung (Beispiel 10)

Die Matrix A wird dargestellt als Produkt $A=Q \cdot R$, wobei Q orthogonale Matrix ist (d.h. $Q^{-1}=Q^T$) und R obere Dreiecksmatrix. **Man** berechnet $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n-1)}=R$ und Q als Produkt von Householder-Matrizen. Die Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x}=\vec{b}$ ist dann aus $R\vec{x}=Q^T\vec{b}$ zu berechnen.

♥ Besonderer Tip: $A^{(i)}$ hat dieselben Zeilen und Spalten 1 bis $i-1$ wie $A^{(i-1)}$.

6. Cholesky-Verfahren (Beispiele 11, 12, 13)

Die Matrix A wird dargestellt als Produkt $A=U \cdot U^T$, wobei U untere Dreiecksmatrix mit **positiven** Diagonalelementen ist. Geht genau dann, wenn A symmetrisch (im komplexen Fall: hermitesch) und positiv definit ist. Ist die letzte Voraussetzung (die man A nicht wie die erste sofort ansieht) nicht erfüllt, ergibt sich ein Widerspruch. Ist wohl das einfachste Verfahren, um positive Definitheit zu prüfen (Beispiel 11). Zur Vorgehensweise siehe die Übersichtsskizzen. Man berechnet die Lösung des Gleichungssystems $A\vec{x}=\vec{b}$ aus $U\vec{c}=\vec{b}$ und dann $U^T\vec{x}=\vec{c}$. (Beispiele 12, 13, 14).

7. Jacobi-Verfahren (Gesamtschritt-Verfahren) (Beispiele 15, 16, 17)

Typisches Iterationsverfahren: Aus einer "Näherung" wird eine neue berechnet, aus dieser dann nach derselben Regel wieder eine neue usw. **Man** löst nach der Diagonale auf und dividiert durch das jeweilige Diagonalelement. Dann setzt man rechts einen Startvektor ein und berechnet daraus (links) einen "neuen" Vektor, den man wieder rechts einsetzt usw. Die entstehende Folge konvergiert gegen die Lösung, wenn das starke Zeilensummenkriterium erfüllt ist.

Wenn es nicht erfüllt ist: Könnte es nach Änderung der Reihenfolge der Gleichungen zu erfüllen sein?

2 Fehlerabschätzungen (wobei Zeilensummennorm einfach zu handhaben):

- a priori: nach dem ersten Iterationsschritt durch Vergleich mit dem Startvektor.
- a posteriori: nach dem letzten Schritt durch Vergleich mit dem vorletzten (genauer).

8. Gauß-Seidel-Verfahren (Einzelschrittverfahren) (Beispiele 18, 19, 20)

Man gebe einen Startvektor vor. Aus der ersten Gleichung berechne man die erste Komponente des neuen Vektors (wie beim Jacobi-Verfahren); dann aus der 2. Gleichung dessen 2. Komponente, verwende aber bereits die berechnete neue erste Komponente. Aus der 3. Gleichung berechne man die neue 3. Komponente, verwende aber dabei die neu berechnete 1. und 2. Komponente usw. (hier liegt der Unterschied zum Jacobi-Verfahren). Wie das Jacobi-Verfahren insbesondere für große Systeme geeignet.

2 Fehlerabschätzungen analog dem Jacobi-Verfahren. Die entstehende Folge konvergiert gegen die Lösung, wenn das starke Zeilensummenkriterium erfüllt ist. Wenn es nicht erfüllt ist: Könnte es nach Änderung der Reihenfolge der Gleichungen zu erfüllen sein?

9. Rundungsfehler

A. Abschätzung der Fehler bei der Lösung linearer Gleichungssysteme (Beispiel 21).

B. Verbesserung von Näherungen: Nachiteration (Beispiel 22).

C. Untersuchung, wie genau die Lösung sein kann, wenn die Eingangs-Werte (in A und/oder $\vec{b}$) nicht genau bekannt sind (Beispiel 23).

D. Satz von Prager und Öttili: Beantwortet die Frage, ob ein Vektor $\vec{x}$ als Lösung eines Gleichungssystems "brauchbar, akzeptabel" ist aufgrund der Rundungen der Matrix und der rechten Seite des Gleichungssystems.

- ♥ Besonderer Tip: Die Verwendung der ∞ -Norm (Zeilensummen-Norm) ist meist am einfachsten (nicht unbedingt am effektivsten).
- ♥ Besonderer Tip: Man denke bei Abschätzungen insbesondere an die *Submultiplikativität*: $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (für jede Matrixnorm).
- ♥ Besonderer Tip: Vorsicht, wenn Vektoren als *Zeilen*-Vektoren geschrieben werden, obwohl sie im Sinne der Matrizenrechnung als *Spalten*-Vektoren zu schreiben wären oder transponiert sind (mit ' oder $\top$ oben): Dann ist z.B. $\|(2,3,-9)^\top\|_\infty = 9$ und $\|(2,3,-9)^\top\|_1 = 14$ (der Name Zeilen- bzw. Spaltensummenmaximum kann bei oberflächlicher Betrachtung zu Mißverständnissen führen).

10. Methode der kleinsten Quadrate für überbestimmte Systeme

Ein überbestimmtes System (mehr Gleichungen als "Unbekannte") hat i.a. keine Lösung. Man berechnet den Vektor, der in gewissem Sinne den "Fehler" minimal macht. Er genügt einem aus dem gegebenen Gleichungssystem gewonnenen linearen Gleichungssystem.

Zu allen in diesem Kapitel behandelten Verfahren (und weiteren) stehen Quelltexte (Prozeduren, Programme und weitere Beispiele) in "*Turbo-Pascal-Quelltexte zur Ingenieur-Mathematik*". Auch die verschiedenen Normen, Konditionszahlen usw. sind dort programmiert.

Eine vielleicht überflüssige Bemerkung:

In der *Geometrie* schreibt man Vektoren als oft "Zeilen- oder Spaltenvektoren", sie meinen jeweils dasselbe *geometrische Objekt*: $(3,5,1)$ und $(3,5,1)^\top$ ist derselbe Punkt oder Ortsvektor ein und desselben Punktes.

In der *Matrizenrechnung* muß man zwischen beiden unterscheiden: Die Vektoren $(3,5,1)$ und $(3,5,1)^\top$ sind verschiedene Objekte (1 Zeile 3 Spalten bzw. 3 Zeilen 1 Spalte).

Besondere Aufmerksamkeit ist erforderlich, wenn Produkte auftreten ("Zeilen mal Spalten") oder Normen ("Zeilen- oder Spaltensummennorm"), da diese Ausdrücke sonst etwas Falsches suggerieren könnten. So ist z.B. das Skalarprodukt von $(2,3,5)$ mit $(3,-1,3)$ als $(2,3,5) \cdot (3,-1,3)^\top$ zu schreiben (auch $(3,-1,3)'$ ist verbreitet) -in der Vektorrechnung oft kurz $(2,3,5) \cdot (3,-1,3)$. Auch bei $\vec{x}^\top A \vec{x}$ ($\vec{x}$ Spaltenvektor) beachte man dieses; $\vec{x}^\top$ ist Zeilenvektor. Ferner ist z.B.

$$\|(2, -6, 3)\|_\infty = 11 \text{ aber } \|(2, -6, 3)^\top\|_\infty = 6 \text{ (s.o.)}$$

1. Vorbemerkungen zu den numerischen Verfahren

A. Bei der Beschreibung und Anwendung vieler Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme oder Eigenwertaufgaben kommen besondere Typen von Matrizen vor, mit deren Hilfe die gegebene Matrix (meist sukzessive) in gewisser Hinsicht vereinfacht wird, wobei bestimmte Eigenschaften (z.B. die Lösungen des Gleichungssystems oder das charakteristische Polynom, damit die Eigenwerte) erhalten bleiben oder auf übersichtliche Art verändert werden (z.B. die Eigenvektoren). So bringen z.B. der Gaußsche Algorithmus das System auf Dreiecksform, das Wilkinsonverfahren und die Householder-Transformation die Matrix auf Hessenbergform.

B. Bei der Fehlerabschätzung ist es nötig, den "Abstand" zweier Vektoren oder Matrizen zu "messen". Hier sind drei "Abstandsbegriffe" (sie werden Normen genannt) von besonderer Bedeutung.

Beispiel: Welche Näherung für $(1.0, 3.7, 2.6, 1.3)$ ist "besser":

$(1.1, 3.6, 2.5, 1.2)$ oder $(1.0, 3.7, 2.6, 1.7)$?

Die Antwort lautet zunächst wohl: "Das kommt darauf an, was man will", mathematisch: welche Norm man verwendet.

A. Besondere Matrizen und ihre Eigenschaften

Im Folgenden stehen leere Plätze in Matrizen für Nullen.

1. Transpositionsmatrizen

a) Begriff

Es sei E die $n \times n$ -Einheitsmatrix (also auf der Diagonale 1, sonst 0). Jede Matrix, die aus E durch Vertauschung zweier Zeilen (oder Spalten) hervorgeht, heißt eine *Transpositionsmatrix*: P_{ik} geht aus E durch Vertauschung der i -ten mit der k -ten Spalte (oder Zeile, was dasselbe Resultat hat) hervor.

Beispiel

Ist $n=5$, so ist

$$P_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{(alte 4. Zeile)} \\ \text{(alte 2. Zeile)} \end{array}$$

b) Eigenschaften bezüglich der Multiplikation

Multipliziert man eine Matrix A von links (bzw. rechts) mit einer Transpositionsmatrix P_{ik} , so entsteht dieses Produkt $P_{ik}A$ (bzw. AP_{ik}) aus A durch Vertauschung der i -ten mit der k -ten Zeile (bzw. Spalte).

Beispiel ($n=4$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad P_{23}A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad AP_{23} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

c) Inverse

Die Inverse von P_{ik} ist wieder P_{ik} (denn Multiplikation von P_{ik} mit sich selbst bewirkt ein "Rückvertauschen"). Ferner ist auch die Transponierte wieder P_{ik} .

2. Permutationsmatrizen

a) Begriff

Jedes Produkt von Transpositionsmatrizen heißt *Permutationsmatrix*.

Beispiel (n=4)

$$P = P_{24}P_{14} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix wird durch die zugehörige Permutation $\vec{\sigma} = (2,4,3,1)$ beschrieben, da in ihr die *Spalten* der Einheitsmatrix in dieser Reihenfolge stehen. Man kann auch so beschreiben: Eine Permutationsmatrix ist eine Matrix, die aus der Einheitsmatrix durch eine beliebige Vertauschung (Permutation) der Spalten (bzw. Zeilen) hervorgeht. Dann steht in jeder Zeile und jeder Spalte *genau eine* 1, sonst 0.

b) Inverse

Die Inverse der Permutationsmatrix P ist P^T . Ein Beispiel für zwei Faktoren:

$$\text{Aus } P = P_{ik}P_{rs} \text{ folgt } P^{-1} = (P_{ik}P_{rs})^{-1} = P_{rs}^{-1}P_{ik}^{-1} = P_{rs}^T P_{ik}^T = (P_{ik}P_{rs})^T = P^T.$$

Beispiel

Die vorige Matrix P hat die Inverse

$$P^{-1} = P^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu ihr gehört die Permutation $\vec{\tau} = (4,1,3,2)$, die auch mit $\vec{\sigma}^{-1}$ bezeichnet wird, wenn $\vec{\sigma}$ die von P bezeichnet (in ihr stehen die *Zeilen* in der Reihenfolge $(2,4,3,1)$).

c) Eigenschaften bezüglich der Multiplikation

Multipliziert man eine Matrix A von *links* (bzw. *rechts*) mit einer Permutationsmatrix P , so vertauschen sich ihre *Zeilen* (bzw. *Spalten*) entsprechend der Permutationsmatrix P (bzw. P^T) miteinander (d.h. der zugehörigen Permutationen, die diese Vertauschungen beschreiben).
Beispiel

Multipliziert man die folgende Matrix A von links bzw. rechts mit der zu $\vec{\sigma}=(2,4,3,1)$ gehörigen Permutationsmatrix P (siehe oben), so bekommt man

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad PA = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \quad AP = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 9 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

In AP stehen die *Spalten* in der Reihenfolge $\vec{\sigma}=(2,4,3,1)$, dem zu P gehörigen Permutationsvektor, in PA die *Zeilen* in der Reihenfolge $(4,1,3,2)$, dem zu $P^{-1}=P^T$ gehörenden Permutationsvektor.

3. Diagonalmatrizen

a) Begriff

Eine *Diagonalmatrix* ist eine quadratische Matrix, deren Elemente außerhalb der Diagonale alle 0 sind. Wir bezeichnen die Diagonalelemente einer solchen Matrix mit $d_1, d_2, \dots$

b) Eigenschaften bezüglich der Multiplikation

Multipliziert man eine Matrix von *links* (bzw. *rechts*) mit einer Diagonalmatrix, so multiplizieren sich die *Zeilen* (bzw. *Spalten*) von A der Reihe nach mit $d_1, d_2, \dots$

Beispiel (Leerplätze stehen für 0)

$$\begin{pmatrix} 3 & & \\ & 4 & \\ & & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 8 & 8 & 4 \\ -9 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & & \\ & 4 & \\ & & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -9 \\ 6 & 8 & -3 \\ 9 & -8 & 12 \end{pmatrix}$$

c) Inverse einer Diagonalmatrix

Sind alle Diagonalelemente $d_1, d_2, \dots$ der Diagonalmatrix D ungleich 0, so existiert die Inverse von D und ist ebenfalls Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $1/d_1, 1/d_2, \dots$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & & & \\ & -1/3 & & \\ & & 2 & \\ & & & -1 \\ & & & & 0.2 \end{pmatrix} \text{ hat die Inverse } \begin{pmatrix} 1/3 & & & \\ & -3 & & \\ & & 1/2 & \\ & & & -1 \\ & & & & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Frobenius-Matrizen

a) Begriff

Ist E Einheitsmatrix und ersetzt man die Nullen unterhalb *einer* der 1 durch beliebige Zahlen, so erhält man eine *Frobenius-Matrix*.

Beispiel

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & -1 & & 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Frobenius-Matrix. Wir bezeichnen sie mit L_2 ; der Index 2 soll andeuten, daß in der 2. Spalte von E unter dem Diagonalelement beliebige Zahlen stehen. (Der Buchstabe L soll an die LR-Zerlegung von Matrizen erinnern, wo diese Matrizen auftreten.) Es werden die Zahlen 2 bzw. -1 mit l_3 bzw. l_4 bezeichnet.

b) Eigenschaften bezüglich der Multiplikation

Multipliziert man eine Matrix A von *links* mit einer Frobenius-Matrix L_k , so entsteht das Produkt $L_k \cdot A$ aus A dadurch, daß

- die *Zeilen* 1 bis k ungeändert bleiben und
- Vielfache der k -ten *Zeile* zu den folgenden *Zeilen* addiert werden und zwar
 - zur $k+1$ -ten *Zeile* das in der l_{k+1} -fache
 - zur $k+2$ -ten *Zeile* das in der l_{k+2} -fache
 - usw.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 5 & 1 & \\ & -2 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \\ 7 & 17 & 37 & 1 \\ -1 & -5 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

Hier ist $k=2$. Die Zeilen 1 und 2 bleiben also ungeändert, die 3. Zeile der rechts stehenden Produktmatrix entsteht aus der alten 3. Zeile durch Addition des $l_3=5$ -fachen (die 5 in der 3. Zeile von L_2) der 2. Zeile und die 4. Zeile durch Addition des $l_4=(-2)$ -fachen (-2 der 4. Zeile von L_2) der 2. Zeile zur alten 4. Zeile.

Multipliziert man eine Matrix A von *rechts* mit einer Frobenius-Matrix L_k , so entsteht das Produkt $A \cdot L_k$ aus A dadurch, daß

- alle *Spalten* bis auf die k -te *Spalte* ungeändert bleiben und
- die k -te *Spalte* aus der alten k -ten *Spalte* dadurch entsteht, indem zu ihr addiert wird
 - das l_{k+1} -fache der $k+1$ -ten *Spalte*
 - das l_{k+2} -fache der $k+2$ -ten *Spalte*
 - usw.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & -3 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -19 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Hier ist $k=2$. Nur die 2. Spalte von A ändert sich und entsteht dadurch, daß zu ihr das 2-fache der 3. und das (-3) -fache der 4. Spalte addiert werden (z.B. $-19 = -2 \cdot (-4) + (-3) \cdot 3$).

c) Inverse einer Frobenius-Matrix

Die Inverse einer Frobenius-Matrix L_k entsteht dadurch, daß die Elemente unterhalb der Diagonale mit (-1) multipliziert werden.

Beispiel (Leerplätze 0)

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & 5 & 1 & \\ & -3 & & 1 \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix} \text{ hat die Inverse } \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & -5 & 1 & \\ & 3 & & 1 \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

B. Vektor- und Matrixnormen

Vektornormen

Um den "Abstand" zwischen zwei Vektoren anzugeben, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

Beispiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2.34 \\ 1.36 \\ -2.40 \end{pmatrix} \text{ sei eine "Näherung" für } \vec{b} = \begin{pmatrix} 2.38 \\ 1.31 \\ -2.42 \end{pmatrix}, \text{ dann ist } \vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix} -0.04 \\ -0.05 \\ 0.02 \end{pmatrix}.$$

1. Möglichkeit: Der Betrag $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(0.04^2+0.05^2+0.02^2)} = 0.067$ ist ein "Maß" für die "Güte der Näherung" $\vec{a}$ für $\vec{b}$. Wir schreiben hierfür auch $\|\vec{a}-\vec{b}\|_2$. Das ist die *euklidische Norm*.
2. Möglichkeit: Die Summe der Beträge der Elemente von $\vec{a}-\vec{b}$, die mit $\|\vec{a}-\vec{b}\|_1$ bezeichnet wird: $0.04+0.05+0.02 = 0.11$; sie ist ebenfalls ein "Maß" für die Güte der Näherung. Dieses ist die *Spaltensummennorm*.
3. Möglichkeit: Der Betrag der betragsgrößten Komponente von $\vec{a}-\vec{b}$, der mit $\|\vec{a}-\vec{b}\|_\infty$ bezeichnet wird: 0.05. Das ist die *Maximumnorm*.

Eigenschaften:

Es gilt für jede dieser Normen die Dreiecksungleichung $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$.

Es gilt für jeden n-dimensionalen Vektor $\vec{x}$: $\|\vec{x}\|_\infty \leq \|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\|_1 \leq n \cdot \|\vec{x}\|_\infty$.

Beispiel

Ein lineares Gleichungssystem wurde gelöst und man erhielt als Näherung für die Lösung $\vec{x}$ den Vektor

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 71.326 \\ 39.753 \\ 88.232 \end{pmatrix}.$$

1. Wenn man weiß, daß $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|_\infty \leq 0.003$ gilt, dann weicht *keine* der Komponenten der Näherung $\vec{x}_0$ um mehr als 0.003 von denen der (unbekannten) Lösung ab, es liegt also die erste Komponente von $\vec{x}$ zwischen $71.326-0.003$ und $71.326+0.003$, die zweite zwischen $39.753-0.003$ und $39.753+0.003$ und die dritte zwischen $88.232-0.003$ und $88.232+0.003$.
2. Wenn man weiß, daß $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|_1 \leq 0.007$ gilt, dann ist die *Summe* der Differenzen der Komponenten höchstens 0.007. Wenn die erste Komponente um mindestens 0.005 abweicht, bleibt für die anderen noch eine Abweichung um höchstens 0.002.
3. Bei $\|\vec{x}-\vec{x}_0\|_2$ handelt es sich um den "normalen" (euklidisch genannten) Abstand der durch $\vec{x}_0$ und $\vec{x}$ bestimmten Punkte (Satz von Pythagoras).

Matrixnormen

Zu jeder der drei genannten *Vektor*-Normen gehört eine *Matrix*-Norm. Ist $A = (a_{ik})$ eine $m \times n$ -Matrix, so sind:

$$1. \|A\|_1 = \max_{i=1}^m \left\{ \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right\} : \text{Spaltensummennorm}$$

Beispiel

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 5 & 5 & -4 \\ 0 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

ist $\|A\|_1 = \max\{7, 16, 12\} = 16$ (16 ist die Summe der Beträge der 2. Spalte).

2. $\|A\|_2$ bezeichnet die Wurzel aus dem größten Eigenwert der symmetrischen Matrix $U := A^T A$ und wird *Spektralnorm* genannt. Auch $A \cdot A^T$ ist möglich, beide Matrizen haben dieselben Eigenwerte.

Es ist dann übrigens

$$\|A\|_2 = \max\{ \|A \cdot \vec{x}\|_2 / \|\vec{x}\|_2 = 1 \}.$$

Alle Eigenwerte von U sind reell und nicht-negativ.

Beispiel

Für die Matrix A aus obigem Beispiel ist

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -3 & 5 & 8 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^T A = \begin{pmatrix} 29 & 19 & -14 \\ 19 & 98 & -69 \\ -14 & -69 & 50 \end{pmatrix}.$$

(Man sieht, daß $A^T A$ symmetrisch ist.) Die Matrix $A^T A$ hat die Eigenwerte 0.93859, 24.46546 und 151.59684, die Wurzel aus dem größten unter ihnen ist 12.31247 (alle Werte auf diese Stellen gerundet). Also ist $\|A\|_2 = 12.31247$.

$$3. \|A\|_\infty = \max \left\{ \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \mid 1 \leq i \leq n \right\} : \text{Zeilensummennorm}$$

Beispiel

Die obige Matrix A hat die Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max\{8, 14, 13\} = 14$ (14 ist Summe der Beträge der Elemente der 2. Zeile von A).

Es gilt für jede dieser Matrixnormen die "Dreiecksungleichung": $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Ferner gilt die *Submultiplikativität*: $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, das ist Kennzeichen einer *Matrix-Norm*.

Zusammenhang zwischen Vektor- und Matrixnorm:

Für das Produkt einer *Matrix* A mit einem *Vektor* $\vec{x}$ gilt $\|A\vec{x}\| \leq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$, wobei jeweils für Matrix und Vektor *dieselbe* Norm (Index 1, 2 oder ∞) zu nehmen ist. Diese Eigenschaft nennt man *Verträglichkeit* von Matrix- und Vektornorm. Aus diesem Grunde bezeichnet man diese sich so entsprechenden Normen häufig mit dem gleichen Symbol.

C. Konditionszahl einer Matrix

Ist A eine quadratische reguläre (d.h. invertierbare) Matrix, so heißt die Zahl $\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ die *Konditionszahl* von A . Dabei bedeuten die beiden Normen eine der drei behandelten (1, 2 oder ∞ , die auch als Index, z.B. $\text{cond}_\infty(A)$ angefügt wird).

Beispiel

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -14 & 12 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ ist } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & -2/4 & -3/4 \\ -1/4 & -3/4 & -4/4 \\ -1/4 & -4/4 & -3/4 \end{pmatrix}.$$

Ihre Zeilensummennormen sind $\|A\|_{\infty}=28$ und $\|A^{-1}\|_{\infty}=2$, daher ist $\text{cond}_{\infty}(A) = 28 \cdot 2 = 56$.

Es ist $\|A\|_1=18$, $\|A^{-1}\|_1=2.5$ und daher $\text{cond}_1(A)=18 \cdot 2.5=45$.

Die Berechnung von $\text{cond}_2(A)$ ist erheblich mühseliger:

Man berechnet (beachten, daß $A^T A^{-1} = (A^{-1})^T$ gilt)

$$A^T A = \begin{pmatrix} 204 & -176 & 28 \\ -176 & 160 & -32 \\ 28 & -32 & 12 \end{pmatrix}, \quad A^T A^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 9 & 10 \\ 9 & 29 & 30 \\ 10 & 30 & 34 \end{pmatrix}$$

und findet die größten Eigenwerte dieser beiden Matrizen mit einem der Verfahren zur Eigenwert-Berechnung (z.B. von Mises-Iteration): $\lambda = 364.4166$ der ersten und $\lambda = 4.0340$ der zweiten Matrix. Daher sind die 2-Normen dieser Matrizen (Wurzeln daraus):

$$\|A^T A\|_2 = 19.0897, \quad \|A^T A^{-1}\|_2 = 2.0085 \text{ und } \text{cond}_2(A) = 19.0897 \cdot 2.0085 \approx 38.3415.$$

2. Der Gauß-Algorithmus

Der Gauß-Algorithmus dient

- a) zur Lösung linearer Gleichungssysteme und ist die mehr algorithmische Form des bekannten Gaußschen Eliminationsverfahrens,
- b) zur Berechnung der LR-Zerlegung (Links-Rechts) einer Matrix,
- c) zur Berechnung der Determinante einer quadratischen Matrix.

Gegeben sei ein lineares Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei A eine $m \times n$ -Matrix ist.

- a) Das Gleichungssystem wird durch Elimination (äquivalent) so umgeformt, daß ein Gleichungssystem $B\vec{y} = \vec{c}$ entsteht, dabei hat die $m \times n$ -Matrix B die Form

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & * & * & \dots & * \\ & b_{22} & \dots & b_{2r} & * & * & \dots & * \\ & & \dots & & & & \dots & \\ & & & b_{rr} & * & * & \dots & * \\ & & & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Hier stehen leere Plätze für Nullen. Dieses Gleichungssystem kann man dann "rückwärts" durch Einsetzen ab r-ter Gleichung lösen, wenn es lösbar ist (i.a. hat es dann mehrere, unendlich viele Lösungen). Bei quadratischen Systemen ($m=n$) wird oft $r=n$ sein. Hierbei geht $\vec{y}$ aus $\vec{x}$ durch Vertauschungen der Komponenten hervor (oft ist $\vec{y}=\vec{x}$, z.B. bei natürlicher und partieller Pivotwahl).

- b) Es werden je eine Matrix L ("links"), R ("rechts") und P ("Permutation") berechnet, wobei L eine untere Dreiecksmatrix mit nur 1 auf der Diagonale ist, R eine obere Dreiecksmatrix und P eine Permutationsmatrix sind, für die gilt

$$P \cdot A = L \cdot R \text{ (L-R d.h. "links-rechts-Zerlegung" von } P \cdot A \text{)}.$$

$P \cdot A$ entsteht also aus A durch Vertauschung der Zeilen (was auf die Lösung des Gleichungssystems keinen Einfluß hat, da das lediglich eine andere Reihenfolge der Gleichungen bedeutet; vielfach ist $P=E$). $P \cdot A$ ist also als Produkt von zwei Dreiecksmatrizen dargestellt.

Häufig wird die Zerlegung als LU-Zerlegung bezeichnet: 'Lower-Upper'.

- c) Ist A quadratisch, so ist $\det A$ das Produkt der Diagonalelemente von R, wenn keine Permutationen gemacht wurden, sonst gilt $|\det A| = |\det R|$.

Beispiel 1

Man löse das Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 12 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & -3 & 6 \\ 8 & 5 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 13 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Ferner bestimme man eine LR-Zerlegung von A (falls möglich).

man erhält der Reihe nach

$$x_5 = 0, x_4 = 1, x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 1, \text{ also den Lösungsvektor}$$

$$\vec{x} = (1, 0, 0, 1, 0)^T.$$

Wir schreiben $\vec{x}$ also als Spaltenvektor (T deutet das an); der Grund ist, daß in Matrix-Schreibweise $A\vec{x}=\vec{b}$ die Lösung $\vec{x}$ ein Spaltenvektor ist; in bezug auf die Lösung des Gleichungssystems ist das unwesentlich.

Der Grund dafür, daß wir die Faktoren hinter den "eigentlichen" Gleichungen notiert haben, ist der Folgende: Die hier entstandene Matrix ist, wenn man ihre Diagonale durch lauter 1 ersetzt, die gesuchte Matrix L, links steht die aus A entstandene Matrix R:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 3 & 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & -3 & 1 & \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ & 1 & 2 & 1 & -3 \\ & & 1 & 2 & -3 \\ & & & 2 & 0 \\ & & & & 3 \end{pmatrix},$$

wobei leere Plätze für 0 stehen. Man prüfe nach, daß in der Tat $A = L \cdot R$ gilt (hierbei sieht man, daß obige Rechnung erneut nachvollzogen wird). Hier ist also $P=E$ die Einheitsmatrix.

Hinweis: Der erste Schritt (also die Erzeugung der Matrix mit Nullen unter der 4 in der ersten Spalte) bedeutet in Matrix-Formulierung, daß A von links mit der Frobenius-Matrix

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ -3 & & 1 & & \\ -1 & & & 1 & \\ -2 & & & & 1 \end{pmatrix} \text{ multipliziert wird}$$

(siehe Multiplikationseigenschaften der Frobenius-Matrizen), weswegen Frobenius-Matrizen mit dem Buchstaben L (links) bezeichnet wurden.

Rechnet man mit einem Rechner, so wird man, um Platz im Arbeitsspeicher zu sparen, die Zahlen der Matrix L (bis auf die Diagonalelemente) auf den entsprechenden Plätzen der Matrix A (wo nun Nullen entstanden sind) speichern. Dann sieht das letzte Schema im Rechner so aus (ohne die rechte Seite):

$$\begin{array}{cccc|c} 4 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & \text{---} & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & \text{---} & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & \text{---} & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \text{---} & 3 \end{array}$$

Der Strich soll die Trennungslinie der Elemente der Matrizen R und L (ohne die Diagonale 1,1,1,1,1 von L) markieren.

Wäre auf der Diagonale eine 0 (und darunter nicht überall auch) entstanden, so hätte das Verfahren so offenbar nicht geklappt. Man sagt, wir haben das Verfahren mit *natürlicher Pivotwahl* durchgeführt (durchführen können, nicht müssen). Das folgende Beispiel zeigt, wie man im anderen Fall verfahren kann.

Beispiel 2

Man löse folgendes Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ und berechne eine LR-Zerlegung:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ 8 & 2 & 3 & 0 \\ 16 & 3 & 1 & 10 \\ 12 & -2 & -3 & 16 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 8 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Lösung:

In obiger Schreibweise bekommt man

$$\begin{array}{cccc|ccc} 4 & 1 & 2 & -1 & 9 & & \\ & 0 & -1 & 2 & -4 & & 2 \\ & -1 & -7 & 14 & -28 & & 4 \\ & -5 & -9 & 19 & -37 & & 3 \end{array}$$

Hier kann man die -1 und -5 nicht mit Hilfe der 0 darüber eliminieren. Daher suche man nun in der zweiten Spalte unter der 0 eine Zahl $\neq 0$ (wenn es eine solche nicht gibt, hat man also die gewünschten Nullen und kann mit der nächsten Spalte weitermachen) und vertausche die entsprechende Zeile mit der zweiten Zeile (was einer Multiplikation mit einer Transpositionsmatrix von links entspricht, siehe dort, und auf die Lösung des *Gleichungssystems* keinen Einfluss hat, wohl aber eine andere *Matrix* entstehen läßt). Wir wählen die -1 unter der Null, vertauschen also die 2. mit der 3. Zeile; das entspricht einer Multiplikation mit der Transpositionsmatrix P_{23} ; wir haben es fortan mit der Matrix $P_{23}A$ zu tun. Die Zahl -1 , die dann auf der Diagonale steht, ist unser Pivot-Element.

Wir hätten ebensogut die zweite mit der vierten Gleichung vertauschen können, dann wäre die Zahl -5 Pivot-Element geworden und die Matrix $P_{24}A$ behandelt worden. Da -5 die betragsgrößte der Zahlen ist, wäre dieses Vorgehen *partielle Pivotwahl* oder *Spalten-Pivot-Wahl*.

$$\begin{array}{cccc|ccc} 4 & 1 & 2 & -1 & 9 & & \\ & -1 & -7 & 14 & -28 & & 4 \\ & 0 & -1 & 2 & -4 & & 2 \\ & -5 & -9 & 19 & -37 & & 3 \end{array}$$

Nun geht es weiter wie beschrieben, um Nullen unter der -1 zu erzeugen:

$$\begin{array}{cccc|ccc} 4 & 1 & 2 & -1 & 9 & & \\ & -1 & -7 & 14 & -28 & & 4 \\ & & -1 & 2 & -4 & & 2 & 0 \\ & & 26 & -51 & 103 & & 3 & 5 \end{array}$$

Weiter mit der entstandenen -1 auf der Diagonale als Pivot-Element:

$$\begin{array}{cccc|ccc} 4 & 1 & 2 & -1 & 9 & & \\ & -1 & -7 & 14 & -28 & & 4 \\ & & -1 & 2 & -4 & & 2 & 0 \\ & & & 1 & -1 & & 3 & 5 & -26 \end{array}$$

Hieraus ist das Ergebnis, die Lösung des Gleichungssystems zu berechnen:

$$x_4 = -1, \quad x_3 = 2, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 1, \quad \text{also } \vec{x} = (1, 0, 2, -1)^T.$$

Eine LR-Zerlegung der Matrix A ist also nicht möglich, wir haben aber eine LR-Zerlegung der

Matrix $P \cdot A$ erhalten, also $P \cdot A = L \cdot R$, wobei (Probe) $P = P_{23}$ und

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 4 & 1 & & \\ 2 & 0 & 1 & \\ 3 & 5 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & -1 \\ & -1 & -7 & 14 \\ & & -1 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Hätte man noch einmal vertauschen müssen, wäre P das Produkt *zweier* Transpositionsmatrizen, also eine Permutationsmatrix.

Es ist noch $\det(P \cdot A) = \det(L \cdot R) = \det(R) = 4 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 4$ (Produkt der Diagonalelemente von R), da $\det(P) = (-1)^1$ (eine Permutation), ist $\det A = -4$.

Bevor man ein Gleichungssystem löst, kann man es *skalieren*: Dazu dividiere man jede Gleichung durch die Summe der Beträge aller Koeffizienten dieser Zeile. Das ist besonders dann empfehlenswert, wenn die Koeffizienten unterschiedliche Größenordnung haben.

In unserem Beispiel ist die erste Gleichung durch $4+1+2+1=8$, die zweite durch $8+2+3+0=13$, die dritte durch 30 und die vierte durch 33 zu dividieren. Nach dieser *Skalierung* ist es *zeilenäquilibriert*, d.h. alle Zeilensummen (der Beträge) sind einander gleich, hier 1. Danach fährt man mit etwa partieller Pivot-Wahl fort.

Diese Skalierung führt man allerdings nicht wirklich aus, sondern benutzt im ersten Schritt als Pivot-Element das betragsgrößte der ersten Spalte nach (gedachter) Skalierung: Die erste Spalte lautet nach Skalierung $4/8, 8/13, 16/30$ und $12/33$, die betragsgrößte dieser Zahlen ist $8/13$, also wird im Ausgangssystem die Zahl $a_{21}=8$ Pivot-Element: Zeile 1 und 2 werden vertauscht (wie betont: ohne die Zeilen wirklich zu dividieren). Der Rest ist dann analog zu rechnen.

Bei partieller Pivot-Wahl ohne Skalierung wäre $a_{31}=16$ Pivot-Element geworden. Hätte man die 1. Gleichung mit 100 multipliziert, so wäre bei partieller Pivot-Wahl diese $a_{11}=400$ Pivot-Element: Man sieht, so könnte man (außer Nullen) jede zur betragsgrößten machen wobei i.a. Zahlen unterschiedlicher Größenordnung entstehen.

Man kann auch in jedem Schritt das betragsgrößte Element der "Restmatrix" nach links oben, also in die Position des Pivot-Elementes auf der Diagonale bringen. Man spricht dann von *totaler Pivotwahl*. Das folgende Beispiel zeigt das.

Beispiel 3

Man berechne die Lösung des Gleichungssystems $A \vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 8 & 3 & 0 \\ 6 & 32 & 2 & 20 \\ -2 & 12 & -3 & 16 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \\ -10 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung totaler Pivot-Wahl.

Lösung:

Pivot-Element im ersten Schritt ist die betragsgrößte Zahl der Matrix A, also 32. Um diese Zahl der 3. Zeile und 2. Spalte nach links oben zu bringen, müssen die 1. und 3. Zeile vertauscht werden (entspricht Multiplikation mit der Transpositionsmatrix P_{13} von *links* und hat keinen Einfluß auf die Lösung, da es auf die Reihenfolge der Gleichungen nicht ankommt; da wir eine LR-Zerlegung nicht suchen, notieren wir diese Vertauschung nicht) und dann die 1. mit der 2. *Spalte*. Letzteres entspricht der Multiplikation mit der Transpositionsmatrix P_{12} von *rechts*. Nach diesem letzten Schritt gehört die Variable ("Unbekannte") x_1 zur 2. und x_2 zur 1. Spalte, anders: Diese Variablen stehen nun in der Reihenfolge x_2, x_1, x_3, x_4 - das muß also im Folgenden bedacht werden. Wir notieren daher diese Vertauschung in dem Permutationsvektor (siehe bei Permutationsmatrizen) $\vec{\sigma} = (2 \ 1 \ 3 \ 4)$, der die Reihenfolge der *Spalten* im Vergleich zur Matrix A beschreibt. Nun lautet das System

$$\begin{array}{cccc|cc} 32 & 6 & 2 & 20 & 16 & \\ 8 & 2 & 3 & 0 & 14 & \\ 4 & 1 & 2 & -1 & 9 & \\ 12 & -2 & -3 & 16 & -10 & \end{array} \quad \vec{\sigma} = (2 \ 1 \ 3 \ 4)$$

Nun werden mit der 32 als Pivot-Element die Zahlen darunter zu 0 gemacht (aus den entsprechenden Gleichungen x_2 , das ja nun zur ersten Spalte gehört, eliminiert). Man bekommt in der üblichen Notierung (wobei wir die Faktoren, die die Frobenius-Matrix L_1 bestimmen, der Übersichtlichkeit wegen wieder dahinter schreiben):

$$\begin{array}{cccc|cc} 32 & 6 & 2 & 20 & 16 & \\ & 0.50000 & 2.50000 & -5.00000 & 10 & \\ & 0.25000 & 1.75000 & -3.50000 & 7 & \\ & -4.25000 & -3.75000 & 8.50000 & -16 & \end{array} \quad \vec{\sigma} = (2 \ 1 \ 3 \ 4)$$

Man erkennt, daß "krumme" Zahlen entstehen, weswegen dieses Verfahren mit totaler Pivotwahl im Falle einer Handrechnung ungeeignet erscheint; bei Benutzung eines Computers allerdings hat es viele Vorteile (der Rechner speichert die reelle Zahl 6 z.B. als +0.600000000E+001 o.ä. und rechnet *damit*). Pivot-Element ist nun 8.5 (kursiv gedruckt) als betragsgrößte Zahl im nun zu behandelnden Restsystem, sie steht als a_{44} in der 4. Zeile, 4. Spalte. Um sie nach links oben, genauer: als a_{22} an die Stelle der 0.5 (2. Zeile, 2. Spalte) zu bekommen, muß von links mit P_{24} multipliziert werden (bewirkt Vertauschung der 2. mit der 4. Zeile, aber keine Änderung des Lösungsvektors) und von rechts mit P_{24} (bewirkt Vertauschung der *Spalten* 2 und 4), womit nun die Ausgangsmatrix insgesamt von *rechts* mit der Permutationsmatrix $P_{12}P_{24}$ multipliziert wurde, zuerst die 1. und 2. Spalte, dann die (neue) 2. mit der (neuen) 4. Spalte vertauscht wurden. Hiermit wird aus der bisherigen Permutation $\vec{\sigma} = (2 \ 1 \ 3 \ 4)$ die neue Permutation $\vec{\sigma} = (2 \ 4 \ 3 \ 1)$ (Element an 2. und 4. Stelle vertauschen) der *Spalten*. Dann also entsteht

$$\begin{array}{cccc|cc} 32 & 20 & 2 & 6 & 16 & \\ & 8.50000 & -3.75000 & -4.25000 & -16 & \\ & -3.50000 & 1.75000 & 0.25000 & 7 & \\ & -5.00000 & 2.50000 & 0.50000 & 10 & \end{array} \quad \vec{\sigma} = (2 \ 4 \ 3 \ 1)$$

Nun werden mit der 8.5 als Pivot-Element dieses zweiten Gauß-Schrittes die darunter stehenden

Zahlen zu Null gemacht (wir notieren die Faktoren Übersicht wegen rechts daneben und notieren nur 5 Stellen nach dem Komma):

$$\begin{array}{cccc|cc} 32 & 20 & 2 & 6 & 16 & \vec{\sigma} = (2 \ 4 \ 3 \ 1) \\ & 8.50000 & -3.75000 & -4.25000 & -16 & \\ & & 0.20588 & -1.50000 & 0.41177 & -0.41176 \\ & & 0.29412 & -2.00000 & 0.58816 & -0.58824 \end{array}$$

Das Pivot-Element ist -2 (kursiv gedruckt, 4. Zeile, 4. Spalte). Um sie auf die Diagonalstelle links oben im Restsystem zu bekommen, müssen die 3. und 4. Zeile miteinander vertauscht werden (keinen Einfluß auf die Lösung) und die 3. und 4. Spalte. Damit entsteht aus der letzten Permutation $\vec{\sigma} = (2 \ 4 \ 3 \ 1)$ die Permutation $\vec{\sigma} = (2 \ 4 \ 1 \ 3)$. Man bekommt dann nach der Vertauschung und dem nächsten Eliminationsschritt das Endschema

$$\begin{array}{cccc|cc} 32 & 20 & 6 & 2 & 16 & \vec{\sigma} = (2 \ 4 \ 1 \ 3) \\ & 8.50000 & -4.25000 & -3.75000 & -16 & \\ & & -2.00000 & 0.29412 & 0.58824 & \\ & & & -0.01471 & -0.02941 & \end{array}$$

Wir haben die Faktoren für die Elimination rechts nun fortgelassen.

Dieses letzte System liefert der Reihe nach, von rückwärts gelöst, die Zahlen

$$y_4 = 2, \quad y_3 = 0, \quad y_2 = -1, \quad y_1 = 1, \quad \text{also } \vec{y} = (1, -1, 0, 2).$$

Diese sind eine Permutation der Komponenten x_1, x_2, x_3, x_4 von $\vec{x}$.

Berechnung von $\vec{x}$

1. Möglichkeit (genau hinsehen)

Die Komponenten von $\vec{x}$ stehen in der Reihenfolge $\vec{\sigma} = (2 \ 4 \ 1 \ 3)$:

An 1., 2., 3. bzw. 4. Stelle von $\vec{y}$ stehen x_2, x_4, x_1 , bzw. x_3 .

Umgekehrt: x_1, x_2, x_3 bzw. x_4 stehen an 3., 1., 4. bzw. 2. Stelle in $\vec{y}$:

$$\vec{x} = (y_3, y_1, y_4, y_2)^T = (0, 1, 2, -1)^T.$$

2. Möglichkeit (mehr formal)

Bezeichnet P die zu $\vec{\sigma} = (2 \ 4 \ 1 \ 3)$ gehörige Permutationsmatrix (bezieht sich immer auf die Reihenfolge der *Spalten*), so ist $P^{-1} = P^T$ (siehe Permutationsmatrizen). In P^T stehen die *Spalten* in der Reihenfolge $\vec{\tau} = (3 \ 1 \ 4 \ 2) = \vec{\sigma}^{-1}$.

Daher multipliziere man den Spaltenvektor $\vec{y}$ von *links* mit P^T : Die *Zeilen* (Elemente) vertauschen sich gemäß $\vec{\tau}$.

Es soll ein Beispiel für ein nicht-quadratisches Gleichungssystem vorgeführt werden:

Beispiel 4

Man berechne alle Lösungen des Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 11 & 7 & 12 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -10 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Wir schreiben die entstehenden Schemata hin, notieren dort, wo die Nullen entstehen, die Faktoren, die zur Elimination benutzt wurden. Wenn nicht anders vermerkt, verwenden wir natürliche Pivotwahl, d.h. benutzen immer die jeweils auf der Diagonale stehende Zahl als Pivot-Element.

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 2 & 6 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & -2 & -2 & -3 \end{array}$$

Nächster Schritt:

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 2 & 6 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ 2 & 1 & & & & -3 \\ 1 & -1 & -2 & -4 & -2 & 4 \end{array}$$

Hier wird Pivotwahl nötig: Wir vertauschen die 3. mit der 4. Zeile (entspricht Multiplikation mit der Transpositionsmatrix P_{34} von links und hat auf die Lösung des Gleichungssystem keinen Einfluß):

$$\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 2 & 6 & 1 & -7 \\ 1 & 3 & 3 & -2 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & -2 & -4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & -3 \end{array}$$

Nun ist also ein System entstanden, das von rückwärts gelöst werden kann. Dabei kann eine der beiden Variablen ("Unbekannten") x_5 oder x_4 beliebig gewählt werden (hätte etwa x_4 den Faktor 0 statt 2, so könnte man *nur* x_4 beliebig vorgeben; würde man x_5 beliebig wählen, etwa 1, so ergäbe sich die Gleichung $0 \cdot x_4 = 1$, die keine Lösung hat). Setzt man etwa $x_5 = t$, so bekommt man der Reihe nach:

$$x_5 = t, \quad x_4 = (-3-t)/2, \quad x_3 = 1, \quad x_2 = (1-t)/3, \quad x_1 = (-2+5t)/3,$$

als Vektor geschrieben

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5/3 \\ -1/3 \\ 0 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Man kann auch lineare Matrix-Gleichungen $A \cdot X = B$ mit dem Gaußschen Algorithmus lösen. Der einzige Unterschied zum bisher behandelten Fall eines linearen Gleichungssystems ist, daß man mehrere rechte Seiten hat.

Ein Sonderfall ergibt sich für $B=E$ (Einheitsmatrix), dann ist X die Inverse (wenn sie existiert, A also regulär ist).

Beispiel 5

Man berechne alle Matrizen X mit $AX=B$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 3 & 8 \\ 6 & -8 & 2 & 6 \\ 8 & -5 & 3 & 17 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & -10 & 1 \\ -3 & -23 & 5 \\ -14 & -26 & -2 \\ -4 & -50 & 12 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

Man erhält der Reihe nach bei natürlicher Pivotwahl folgende Schemata, wobei wir die Quotienten l_{ij} links auf die Plätze der a_{ij} schreiben:

1. Schritt:

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & -10 & 1 \\ \hline 2 & & 1 & 1 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & & -2 & -1 & -3 & -5 & 4 & -5 \\ 4 & & 3 & -1 & 5 & 8 & -10 & 8 \end{array}$$

2. Schritt:

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & -10 & 1 \\ \hline 2 & & 1 & 1 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & & -2 & -1 & -3 & -5 & 4 & -5 \\ 4 & & 3 & -1 & 5 & 8 & -10 & 8 \end{array}$$

3. Schritt:

$$\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -2 & 1 & 3 & -3 & -10 & 1 \\ \hline 2 & & 1 & 1 & 2 & 3 & -3 & 3 \\ 3 & & -2 & -1 & -3 & -5 & 4 & -5 \\ 4 & & 3 & -1 & 5 & 8 & -10 & 8 \end{array}$$

Dieses ist die schematische Schreibweise für *drei* Gleichungssysteme, nämlich für die 1., die 2. und die 3. Spalte der rechten Seite, wobei die linke Seite stets dieselbe ist.

Wir bezeichnen die Elemente der 4×3 -Matrix X mit x_{ij} und bekommen dann für die erste Spalte der rechten Seite:

$$x_{41} = 1, \quad x_{31} = 0, \quad x_{21} = 1, \quad x_{11} = -2$$

und analog für die 2. und 3. Spalte die Werte

$$x_{42} = -3, \quad x_{32} = 1, \quad x_{22} = 2, \quad x_{12} = 1$$

$$x_{43} = 1, \quad x_{33} = 0, \quad x_{23} = 1, \quad x_{13} = 0$$

und also als Lösung der Matrixgleichung $A \cdot X = B$

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist übrigens $\det(A)=6$ (Produkt der Diagonalelemente von R , da natürliche Pivotwahl gemacht wurde).

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 158 & -32 & -25 & -4 \\ 82 & -16 & -14 & -2 \\ 10 & 2 & -2 & -2 \\ -52 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 6

Man berechne die Inverse der folgenden Matrix A, wenn sie existiert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Wir haben also die Gleichung $A \cdot X = E$ zu lösen (E ist 4-reihige Einheitsmatrix). Das Ausgangsschema lautet demnach

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Wir rechnen mit dem Gauß-Algorithmus und bekommen der Reihe nach:

1. Schritt:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2. Schritt:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3. Schritt:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Hieraus berechnet man die 4 Spalten von $X = A^{-1}$, indem man die 4 Gleichungssysteme mit diesen 4 rechten Seiten löst. Man bekommt dann

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 17 & -14 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & -7 & 2 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die LR-Zerlegung der Matrix A ist demnach übrigens $A = L \cdot R$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 4 \\ 2 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 2 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ & 1 & 1 & -2 \\ & & -1 & 2 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Ähnlich dem Gauß-Verfahren ist das *Gauß-Jordan-Verfahren*. Bei diesem erzeugt man auch *über* dem jeweiligen Pivot-Element Nullen. Dann erhält man bei quadratischen Systemen und natürlicher Pivotwahl am Schluß statt einer Dreiecksmatrix sogar eine Diagonalmatrix. Ist letztere gleich E, so kann man die Lösung ohne Rechnung ablesen.

Wir wenden das auf das vorige Beispiel an:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -5 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Daraus mit den entsprechenden Schreibweisen (natürliche Pivotwahl)

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 1 & 2 & -3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Und dann ergibt sich (natürliche Pivotwahl)

$$\begin{array}{cccc|cccc|cc} 1 & 0 & -5 & 7 & 5 & -2 & 0 & 0 & \cdot & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 2 & \cdot \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & -2 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 7 & 5 & -3 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}$$

Hier wurde, im Unterschied zum Gauß-Verfahren, auch von der ersten Zeile das 2-fache der zweiten Zeile subtrahiert um die 0 in der ersten Zeile zu erzeugen. So fährt man fort und erhält am Ende, wenn man noch durch die Diagonalelemente dividiert

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 & 17 & -14 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 8 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -3 & 1 \end{array}$$

Hier steht links dann die Einheitsmatrix, rechts die Lösung, in diesem Falle die Inverse von A.