

Steffen Timmann

# Repetitorium gewöhnliche Differentialgleichungen

3. Auflage

HANSER





<b>Existenzsatz von Peano</b>	(1.2)
Für die lokale Lösbarkeit des Systems $\vec{y}' = f(x, \vec{y})$ bzw der Gleichung $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ reicht die Stetigkeit der rechten Seite.	
<b>Satz von Picard-Lindelöf</b>	(1.3.1)
Ist die rechte Seite des Systems $\vec{y}' = f(x, \vec{y})$ (lokal) Lipschitz-stetig bzgl $\vec{y}$ , so sind entsprechende AWP's eindeutig lösbar. Analog für Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung.	
<b>Picard'sches Iterationsverfahren</b> (für $\vec{y}' = f(x, \vec{y})$ )	(1.3.2)
$\vec{\phi}_0(x) := \vec{y}_0 \quad ; \quad \vec{\phi}_{k+1}(x) := \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x f(t, \vec{\phi}_k(t)) dt$	
<b>Trennung der Variablen (TdV)</b>	(2.3)
$y' = f(x)g(y)$ Variablen trennen und integrieren: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C$ Evt nach $y$ oder $x$ auflösen und Anfangsbedingung einarbeiten. Die stationären Lösungen $\varphi(x) \equiv y_0$ mit $g(y_0) = 0$ nicht vergessen.	
<b>Ähnlichkeitsdgl</b>	(2.5.2)
$y' = f(y/x)$ Subst. $y = zx$ , $y' = z + xz'$ liefert $xz' + z = f(z)$ . Weiter mit TdV.	
<b>Bernoulli-Dgl</b>	(2.5.4)
$y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ Subst. $z := y^{1-\alpha}$ liefert die lineare Dgl $z' = (1-\alpha)a(x)z + (1-\alpha)b(x)$ .	
<b>Riccati-Dgl</b>	(2.5.5)
$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$ Subst. $z = \frac{1}{y-y_1}$ mit spezieller Lösung $y_1$ liefert die lineare Dgl $z' = -[b(x) + 2c(x)y_1(x)]z - c(x)$ .	
<b>Exakte Gleichungen</b>	(3.3.1)
Lösungskurven der exakten Dgl $F_x dx + F_y dy = 0$ , sind die <i>Niveaulinien</i> von $F$ , also die Kurven $F(x, y) = C$ . $\mu = \mu(x, y)$ heißt <i>integrierender Faktor</i> der Dgl $P dx + Q dy = 0$ , wenn $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ exakt ist.	
<b>Lineare Gleichung 1. Ordnung</b>	(2.4)
$y' = a(x)y + b(x)$ Stammfunktion $A(x) := \int a(x) dx$ bestimmen. $y_1 := e^{A(x)}$ ist Basislösung der homogenen Gleichung. Spezielle Lösung $y_s$ der inhomogenen Gleichung durch Rateansatz oder VdK: $y_s = C(x)y_1(x) \implies C'(x)y_1(x) = b(x)$ $y = y_s + Cy_1$ ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl.	

**Lineare Systeme  $n$ -ter Ordnung**

$$\vec{y}' = \mathbf{A}(x)\vec{y} + \vec{b}(x)$$

Die  $\mathbb{K}^n$ -wertigen Lösungen bilden einen  $n$ -dimensionalen affinen Funktionenraum über  $\mathbb{K}$ , einen Vektorraum, wenn das System homogen ist.

Die Differenz zweier Lösungen des inhomogenen Systems ist Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

Die allgemeine Lösung  $\vec{y}$  des inhomogenen Systems ist eine spezielle  $\vec{y}_s$  des inhomogenen plus der allgemeinen des homogenen:  $\vec{y} = \vec{y}_s + \vec{y}_h$ .

Kennt man eine Lösungsbasis des homogenen Systems, kann man eine spezielle Lösung des inhomogenen durch *Variation der Konstanten (VdK)* bestimmen.

Bei konstanten Koeffizienten und speziellen Störgliedern erhält man spezielle Lösungen des inhomogenen Systems durch *spezielle Rateansätze*. (5.2.6)

Analog für lineare Dgln  $y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ .

**Superpositionsprinzip**

(5.3.1)

Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ,  $\vec{y}_1' = \mathbf{A}\vec{y}_1 + \vec{b}$  und  $\vec{y}_2' = \mathbf{A}\vec{y}_2 + \vec{c}$ .

Dann löst  $\vec{y} = \alpha\vec{y}_1 + \beta\vec{y}_2$  die Gleichung  $\vec{y}' = \mathbf{A}\vec{y} + (\alpha\vec{b} + \beta\vec{c})$ .

Analog für lineare Dgln.

**d'Alembert Reduktion**

Ansatz für homogene **Systeme**:  $\vec{y}(x) = \vec{u}(x)p(x) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{z}(x) \end{pmatrix}$

( $\vec{u}(x)$  Lösung des homogenen Systems mit 1. Koordinate  $u_1 \neq 0$ ) (5.2.4)

Ansatz für homogene **Gleichungen**:  $y = uz$ ,  $y' = u'z + uz'$  usw.

( $u \neq 0$  eine Lösung der homogenen Dgl) (5.3.4)

**Homogene Systeme  $\dot{\vec{x}} = \mathbf{A}\vec{x}$  mit konstanter Matrix  $\mathbf{A}$**  (5.2.5)

$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$  ist eine Fundamentalmatrix, d.h. die Spalten bilden eine Basis des Lösungsraums.

Zu jedem Eigenwert  $\lambda$  der Vielfachheit  $m$  gibt es  $m$  linear unabhängige Lösungen der Form  $\vec{p}_j(t) e^{\lambda t}$  mit Polynomen  $\vec{p}_j$  vom Grad  $\leq j$  ( $j = 0, \dots, m-1$ ).

Ist  $\mathbf{A}$  reell, so erhält man reelle Lösungen aus Real- und Imaginärteil von komplexen.

**Homogene Gleichungen mit konstanten Koeffizienten**

(5.3.5)



Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$  die verschiedenen Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\chi(\lambda)$  mit den Vielfachheiten  $m_\nu$ . Dann bilden die Funktionen

$$y_{\nu,j} := x^j e^{\lambda_\nu x} ; \quad j = 0, \dots, m_\nu - 1 ; \quad \nu = 1, \dots, k$$

ein komplexes Fundamentalsystem.

Sind die Koeffizienten  $a_i$  reell, so erhält man reelle Lösungen aus Real- und Imaginärteil von komplexen.

### Laplace-Transformation

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
$\delta(t)$	1	$\delta(t - a)$	$e^{-as}$
1	$1/s$	$t$	$1/s^2$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n} \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{t^{a-1}}{\Gamma(a)}$	$\frac{1}{s^a} \ (a > 0)$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{t^{n-1} e^{-at}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{(s+a)^n} \ (n \in \mathbb{N})$
$\frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a}$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$	$\frac{1}{a-b} (a e^{-at} - b e^{-bt})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
$\frac{1}{a} \sin at$	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\frac{1}{a} \sinh at$	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\frac{1-\cos at}{a^2}$	$\frac{1}{s(s^2+a^2)}$	$\frac{at - \sin at}{a^3}$	$\frac{1}{s^2(s^2+a^2)}$
$\frac{\sin at - at \cos at}{2a^3}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t \sin at}{2a}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{\sin at + at \cos at}{2a}$	$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2} (2 \cos at - at \sin at)$	$\frac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$
$\frac{b \sin at - a \sin bt}{ab(b^2-a^2)}$	$\frac{1}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$	$\frac{\cos at - \cos bt}{(b^2-a^2)}$	$\frac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}$
$\frac{1}{b} e^{-at} \sin bt$	$\frac{1}{(s+a)^2+b^2}$	$e^{-at} \cos bt$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2}$
$\frac{\sinh at - \sin at}{2a^3}$	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{\sin at \sinh at}{2a^2}$	$\frac{s}{s^4+4a^4}$
$\frac{\sin at}{t}$	$\arctan \frac{a}{s}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
$ \sin at $	$\frac{a \coth(\pi s/2a)}{s^2+a^2}$	$\frac{1}{2} (\sin t +  \sin t )$	$\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-\pi s})}$
$H(t) - H(t-a)$	$\frac{1-e^{-as}}{s}$	$\frac{(t-a)^{b-1}}{\Gamma(b)} H(t-a)$	$\frac{1}{s^b} e^{-as} \ (b > 0)$
$f(t)$ 	$F(s)$	$f(t)$ 	$F(s)$

<b>Differentiations- und Integrationsregeln</b>		
Produktregel:	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$	<b>Vektorfunktionen</b> $(\lambda \vec{u})' = \lambda' \vec{u} + \lambda \vec{u}'$ $(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}'$ $(\vec{u} \times \vec{v})' = \vec{u}' \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v}'$ $(\vec{u}(\lambda(t)))' = \vec{u}'(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)$
partielle Integration:	$\int u'v dx = uv - \int uv' dx$	
Quotientenregel:	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	
Kettenregel:	$(y(x(t)))' = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = y'(x(t)) \cdot x'(t)$	
Substitutionsregel:	$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt$ , dabei ist $\begin{cases} x = g(t) \\ dx = g'(t) dt \end{cases}$	

$f$	$f'$	$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{f'}{f} dx = \ln  f $
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln  x $	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\int \frac{dx}{x+a} = \ln  x+a $	$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\int \frac{dx}{(x+a)^2} = -\frac{1}{x+a}$	$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\int \tan x dx = -\ln  \cos x $	$\int x e^{ax} dx = \frac{ax-1}{a^2} e^{ax}$
$e^x$	$e^x$	$\int \sin^2 ax dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4a} \sin 2ax$	$\int \ln x dx = x \ln x - x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\int \cos^2 ax dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4a} \sin 2ax$	$\int x \ln x dx = x^2 \left(\frac{\ln x}{2} - \frac{1}{4}\right)$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$	
$x^x$	$x^x (1 + \ln x)$	$\int \sin ax \cos ax dx = \frac{1}{2a} \sin^2 ax$	
$\sin x$	$\cos x$	$\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln  \tan ax $	
$\cos x$	$-\sin x$	$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \sin bx - b \cos bx)$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2} (a \cos bx + b \sin bx)$	
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\int x \sin ax dx = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int x \cos ax dx = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax$	
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	<b>Bezeichnungen:</b> $X = ax^2 + bx + c, \quad \Delta = 4ac - b^2, \quad a \neq 0$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{X} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \arctan \frac{2ax+b}{\sqrt{\Delta}} & (\Delta > 0) \\ \frac{-2}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{artanh} \frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}} & (\Delta < 0) \\ \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \ln \frac{2ax+b-\sqrt{-\Delta}}{2ax+b+\sqrt{-\Delta}} & (\Delta < 0) \\ \frac{-2}{2ax+b} & (\Delta = 0) \end{cases}$	
$\operatorname{arccot} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2ax+b}{\Delta X} + \frac{2a}{\Delta} \int \frac{dx}{X}$	
$\sinh x$	$\cosh x$	$\int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{2a} \ln  X  - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X}$	
$\cosh x$	$\sinh x$		
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$		
$\operatorname{coth} x$	$\frac{-1}{\sinh^2 x}$		
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$		
$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad  x  < 1$		
$\operatorname{arcoth} x$	$\frac{1}{1-x^2}, \quad  x  > 1$		
$\int g dx$	$g$		

$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \operatorname{arsinh} \frac{x}{a}) = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}))$
$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \operatorname{arcosh} \frac{x}{a}) = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}))$
$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a})$

**REPETITORIUM**

**GEWÖHNLICHE**  
**DIFFERENTIALGLEICHUNGEN**

**Steffen Timmann**

### **3. Auflage, Ebook**

Alle Rechte vorbehalten.

Beachten Sie bitte **AGB §6 Nutzungsbedingungen von Ebooks**

**Binomi Verlag , Schützenstr. 9, 30890 Barsinghausen**

Telefon 05105 6624000

E-Mail verlag@binomi.de

Internet www.binomi.de

**Zu beziehen beim Verlag, [www.binomi.de](http://www.binomi.de)**

ISBN 978-3-923 923-78-6

Hannover 04/21

## Vorwort

Das vorliegende *Repetitorium der Gewöhnlichen Differentialgleichungen* ist für Physik-, Mathematik- und Ingenieur-Studenten gedacht zum Gebrauch während der ersten Semester und zur Prüfungsvorbereitung. Es deckt mindestens den Stoff einer Einführungsvorlesung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen ab, also sicherlich das, was im Mathematik- oder Physik-Vordiplom über DGLn geprüft wird. Allerdings fehlt der numerische Teil fast völlig. Er hätte den Rahmen dieses Bandes gesprengt.

Auf den ersten 120 Seiten findet man eine Wiederholung der wichtigsten Grundlagen, Sätze und Methoden, dazu etliche Kochrezepte und über 50 Beispiele. 280 Aufgaben mit Lösungen füllen die restlichen 180 Seiten, darunter viele aus verschiedenen Anwendungsgebieten. Differentialgleichungen ohne Anwendungen kann man sich nicht vorstellen.

Das Dgl-Rep schließt sich eng an das zweibändige Repetitorium der Analysis an, das seit 1991 vom gleichen Verfasser und im gleichen Verlag erscheint. Die dort im Vorwort gemachten Bemerkungen gelten auch für dies Repetitorium, insbesondere der Hinweis, dass ein Repetitorium keine systematische Einführung in das betreffende Teilgebiet der Mathematik ist, sondern eine komprimierte Zusammenfassung von Ergebnissen und Definitionen. Für Beweise verweise ich auf die Lehrbücher des Literaturverzeichnisses im Anhang.

Vielen Dank an meinen Kollegen H. VIERGUTZ für seine Hilfe beim Erstellen der über 160 Abbildungen.

Die dritte Auflage unterscheidet sich von den ersten beiden nur durch hoffentlich weniger Druckfehler.

Hannover, den 1.4.2010

## Griechisches Alphabet

<i>A</i>	$\alpha$	alpha	<i>I</i>	$\iota$	iota	<i>R</i>	$\rho$	rho
<i>B</i>	$\beta$	beta	<i>K</i>	$\kappa$	kappa	$\Sigma$	$\sigma$	sigma
$\Gamma$	$\gamma$	gamma	$\Lambda$	$\lambda$	lambda	<i>T</i>	$\tau$	tau
$\Delta$	$\delta$	delta	<i>M</i>	$\mu$	mü	$\Upsilon$	$\upsilon$	üpsilon
<i>E</i>	$\epsilon$	epsilon	<i>N</i>	$\nu$	nü	$\Phi$	$\varphi$	phi
<i>Z</i>	$\zeta$	zeta	$\Xi$	$\xi$	xi	<i>X</i>	$\chi$	chi
<i>H</i>	$\eta$	eta	<i>O</i>	$o$	omicron	$\Psi$	$\psi$	psi
$\Theta$	$\theta$	theta	$\Pi$	$\pi$	pi	$\Omega$	$\omega$	omega

## Deutsches Alphabet

<i>A</i>	<i>a</i>	a	<i>J</i>	<i>j</i>	j	<i>S</i>	<i>s</i>	s
<i>B</i>	<i>b</i>	b	<i>K</i>	<i>k</i>	k	<i>T</i>	<i>t</i>	t
<i>C</i>	<i>c</i>	c	<i>L</i>	<i>l</i>	l	<i>U</i>	<i>u</i>	u
<i>D</i>	<i>d</i>	d	<i>M</i>	<i>m</i>	m	<i>V</i>	<i>v</i>	v
<i>E</i>	<i>e</i>	e	<i>N</i>	<i>n</i>	n	<i>W</i>	<i>w</i>	w
<i>F</i>	<i>f</i>	f	<i>O</i>	<i>o</i>	o	<i>X</i>	<i>x</i>	x
<i>G</i>	<i>g</i>	g	<i>P</i>	<i>p</i>	p	<i>Y</i>	<i>y</i>	y
<i>H</i>	<i>h</i>	h	<i>Q</i>	<i>q</i>	q	<i>Z</i>	<i>z</i>	z
<i>I</i>	<i>i</i>	i	<i>R</i>	<i>r</i>	r			





# Inhaltsverzeichnis

<b>Teil I: Theorie</b>	<b>9</b>
<b>1 Existenz- und Eindeutigkeitsätze</b>	<b>9</b>
1.1 Grundlagen . . . . .	9
1.1.1 Explizite Differentialgleichungen . . . . .	9
1.1.2 Systeme . . . . .	10
1.1.3 Zusammenhang von Gleichungen und Systemen . . . . .	11
1.2 Existenz von Lösungen . . . . .	13
1.2.1 Existenzsatz von Peano . . . . .	13
1.2.2 Fortsetzung von Lösungen . . . . .	14
1.3 Eindeutigkeit von Lösungen . . . . .	16
1.3.1 Picard-Lindelöf . . . . .	16
1.3.2 Picard'sches Iterationsverfahren . . . . .	18
1.3.3 Lipschitz-Stetigkeit bzgl $\vec{y}$ . . . . .	19
1.3.4 Weitere Eindeutigkeitsätze . . . . .	20
1.4 Abhängigkeit der Lösungen . . . . .	22
1.4.1 Stetige Abhängigkeit der Lösungen . . . . .	22
1.4.2 Differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen . . . . .	23
<b>2 Explizite Gleichungen 1. Ordnung</b>	<b>25</b>
2.1 Richtungsfelder, Geometrische Interpretation . . . . .	25
2.1.1 Orthogonale Trajektorien . . . . .	26
2.2 Differentialungleichungen . . . . .	27
2.2.1 Maximal- und Minimallösung . . . . .	28
2.3 Gleichungen mit getrennten Variablen (TdV) . . . . .	29
2.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	32
2.5 Spezielle integrierbare Gleichungen . . . . .	35
2.5.1 $y' = f(ax + by + c)$ . . . . .	35
2.5.2 $y' = f(y/x)$ Homogene Gleichungen . . . . .	36
2.5.3 $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$ . . . . .	37
2.5.4 $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$ Bernoulli-Gleichung . . . . .	39
2.5.5 $y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$ Riccati-Gleichung . . . . .	40
2.5.6 $y' = ax^\alpha + cy^2$ Spezielle Riccati Dgl . . . . .	42
<b>3 Implizite Gleichungen 1. Ordnung</b>	<b>44</b>
3.1 Reguläre und singuläre Linienelemente . . . . .	44
3.2 Verwendung von $p = y'$ als Parameter . . . . .	46

3.2.1	$y = f(x, y')$ . . . . .	47
3.2.2	$x = g(y, y')$ . . . . .	47
3.2.3	Legendre-Transformation . . . . .	48
3.2.4	$y = xy' + g(y')$ Clairault-Gleichung . . . . .	49
3.2.5	$y = xf(y') + g(y')$ d'Alembert-Gleichung . . . . .	50
3.3	Gleichungen der Form $P dx + Q dy = 0$ . . . . .	51
3.3.1	Exakte Differentialgleichungen . . . . .	52
3.3.2	Euler Multiplikatoren . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Differentialgleichungen und Systeme höherer Ordnung</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1	Spezielle Gleichungen höherer Ordnung . . . . .	55
4.1.1	$y$ kommt nicht vor . . . . .	55
4.1.2	$x$ kommt nicht vor . . . . .	55
4.1.3	$y'' = g(y)$ . . . . .	57
4.1.4	$F(x, \frac{y'}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}) = 0$ . . . . .	58
4.1.5	Exakte Gleichungen höherer Ordnung . . . . .	59
4.2	Autonome Gleichungen und Systeme . . . . .	61
4.2.1	Autonome Systeme 2. Ordnung . . . . .	63
4.3	Potenzreihenansatz . . . . .	66
4.3.1	Koeffizientenvergleich . . . . .	67
4.3.2	Fortgesetzte Differentiation . . . . .	68
4.3.3	Lineare Gleichungen 2. Ordnung mit singulären Stellen . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Lineare Gleichungen und Systeme</b> . . . . .	<b>71</b>
5.1	Komplex- und matrixwertige Funktionen . . . . .	71
5.1.1	Matrix-Exponentialfunktion . . . . .	72
5.2	Lineare Systeme . . . . .	74
5.2.1	Struktur der Lösungen . . . . .	75
5.2.2	Zusammenhang von reellen und komplexen Systemen . . . . .	75
5.2.3	Homogene Systeme . . . . .	76
5.2.4	Reduktionsverfahren von d'Alembert . . . . .	78
5.2.5	Homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	79
5.2.6	Inhomogene Systeme . . . . .	82
5.3	Lineare Differentialgleichungen . . . . .	84
5.3.1	Struktur der Lösungen . . . . .	85
5.3.2	Homogene Gleichungen . . . . .	85
5.3.3	Wronski-Determinante . . . . .	86
5.3.4	Reduktionsverfahren von d'Alembert . . . . .	87
5.3.5	Homogene Gleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	89

5.3.6	Inhomogene Gleichungen . . . . .	90
5.3.7	Eulersche Gleichungen . . . . .	93
5.4	Lineare Gleichungen und Systeme mit periodischen Koeffizienten	95
5.4.1	Gleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten	97
<b>6</b>	<b>Laplace Transformation</b>	<b>98</b>
6.1	Definition und Beispiele . . . . .	98
6.2	Rechenregeln . . . . .	100
6.3	Faltungprodukt . . . . .	103
6.4	Anwendungen auf lineare Gleichungen und Systeme . . . . .	103
6.5	Dirac-Deltafunktion . . . . .	105
<b>7</b>	<b>Stabilität</b>	<b>108</b>
7.1	Definitionen . . . . .	108
7.2	Stabilitätssätze für lineare Systeme . . . . .	109
7.3	Fast-lineare Systeme . . . . .	112
7.4	Ljapunoff Theorie . . . . .	114
<b>8</b>	<b>Rand- und Eigenwertprobleme</b>	<b>116</b>
8.1	Lineare Randwertaufgaben . . . . .	116
8.2	Lineare Randwertaufgaben 2. Ordnung . . . . .	118
8.3	Grundlösungen und Greensche Funktion . . . . .	120
8.4	Sturm - Liouville'sche Eigenwertaufgaben . . . . .	122
<b>9</b>	<b>Näherungsverfahren</b>	<b>124</b>
<b>Teil II: Aufgaben</b>		<b>126</b>
<b>10</b>	<b>Aufgaben zu Gleichungen 1. Ordnung</b>	<b>126</b>
10.1	Theoretisches . . . . .	126
10.2	Qualitative Aussagen . . . . .	134
10.3	Richtungsfelder, orthogonale Trajektorien . . . . .	140
10.4	Trennung der Variablen . . . . .	146
10.5	Lineare Gleichungen 1. Ordnung . . . . .	157
10.6	Einfache Substitutionen . . . . .	164
10.7	Riccati-Gleichungen . . . . .	176
10.8	Implizite Gleichungen 1. Ordnung . . . . .	183
10.9	Exakte Gleichungen und Euler Multiplikatoren . . . . .	194

<b>11 Aufgaben zu Systemen und Gleichungen höherer Ordnung</b>	<b>203</b>
11.1 Theoretisches . . . . .	203
11.2 Elementare Typen . . . . .	210
11.3 Picardsches Iterationsverfahren . . . . .	219
11.4 Potenzreihenansatz . . . . .	226
11.5 Aufgaben zu autonomen Systemen . . . . .	237
11.6 Aufgaben zur Stabilitätstheorie . . . . .	245
<b>12 Aufgaben zu linearen Problemen</b>	<b>256</b>
12.1 Theoretisches . . . . .	256
12.2 Lineare Systeme . . . . .	263
12.3 Lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten . . . . .	270
12.4 Lineare Differentialgleichungen . . . . .	278
12.5 Lineare Gleichungen mit konstanten Koeffizienten . . . . .	288
12.6 Aufgaben zur Laplace-Transformation . . . . .	297
12.7 Randwertprobleme . . . . .	305
12.8 Eigenwertprobleme . . . . .	309
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>313</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>314</b>
<b>Abkürzungen</b>	<b>314</b>
<b>Index</b>	<b>315</b>

# Teil I

## Theorie

### 1 Existenz- und Eindeutigkeitssätze

#### 1.1 Grundlagen

##### 1.1.1 Explizite Differentialgleichungen

Sei  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen,  $G \neq \emptyset$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann heißt

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1)$$

*explizite gewöhnliche Differentialgleichung (Dgl) n-ter Ordnung.*

Bei dieser Definition werden nur Gleichungen für reellwertige Funktionen einer reellen Variablen erfasst. Häufig betrachtet man auch Gleichungen komplexwertiger Funktionen. Die Definition ist dann entsprechend abzuändern. Siehe dazu Abschnitt 5.2.2.

‘ $G \neq \emptyset$  offen,  $f$  stetig’ sind technische Voraussetzungen und werden manchmal abgeschwächt.

Bei *partiellen Differentialgleichungen* werden Funktionen mehrerer Variabler gesucht, deren partielle Ableitungen gewisse Bedingungen erfüllen. Partielle Differentialgleichungen werden in diesem Rep nicht behandelt.

Allgemeinere Differentialgleichungen der Form  $F(x, y, \dots, y^{(n)}) = 0$  heißen *implizit*. Siehe dazu Abschnitt 3.

Sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein *echtes* Intervall, d.h. ein Intervall, das mindestens zwei Punkte enthält. Eine  $n$ -mal differenzierbare Funktion  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *Lösung* von (1), wenn für alle  $x \in I$  gilt:

- (i)  $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in G$
- (ii)  $f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) = \varphi^{(n)}(x)$ .

*Beachte:* Lösungen sind stets auf echten Intervallen definiert.

Explizite Gleichungen mit stetiger rechter Seite sind stets lösbar (Existenzsatz von Peano, Abschnitt 1.2.1). Man kann sogar noch  $n$  Anfangsbedingungen erfüllen. Dies ist aber ein theoretisches Ergebnis. Die explizite Angabe der Lösungen durch Formeln mit elementaren Funktionen ist nur in einfachen Fällen möglich. Man muss oft damit zufrieden sein, die Lösungen implizit oder

mit Hilfe von Parameterdarstellungen angeben zu können. Die meisten Gleichungen kann man nur numerisch lösen.

Ist  $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n) \in G$ , so heißt

$$y(\xi) = \eta_1, \quad y'(\xi) = \eta_2, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n \quad (2)$$

eine *Anfangsbedingung* für die Gleichung (1) und beides zusammen ein *Anfangswertproblem (AWP) n-ter Ordnung*.

Ist  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der Gleichung (1) und gilt außerdem

$$\xi \in I, \quad \varphi(\xi) = \eta_1, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(\xi) = \eta_n, \quad (3)$$

so ist  $\varphi$  eine Lösung des AWP's (1),(2).

Das AWP (1),(2) heißt *lösbar*, wenn es ein echtes Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  mit  $\xi \in I$  und eine Lösung  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  des AWP's gibt.

Die Gleichung (1) heißt *lösbar*, wenn es zu jedem  $(\xi, \eta_1, \dots, \eta_n) \in G$  eine Lösung des entsprechenden AWP's gibt.

Zur Fortsetzung von Lösungen siehe Abschnitt 1.2.2.

Zur Eindeutigkeit von Lösungen siehe Abschnitt 1.3.

### 1.1.2 Systeme

Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung sind äquivalent zu speziellen Systemen von Gleichungen 1. Ordnung. Es ist daher in der Theorie der Differentialgleichungen oft zweckmäßig, Sätze und Methoden für Systeme zu formulieren und zu beweisen und die entsprechenden Aussagen für Gleichungen daraus abzuleiten.

Sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Dann heißt

$$(y_1', \dots, y_n') = \vec{y}' = f(x, \vec{y}) = f(x, y_1, \dots, y_n) \quad (4)$$

ein *explizites System von n Differentialgleichungen 1. Ordnung* oder auch ein *System n-ter Ordnung*.

Es gibt natürlich auch Systeme von Gleichungen höherer Ordnung, die man aber alle auf Systeme von Gleichungen 1. Ordnung zurückführen kann. Siehe dazu Abschnitt 1.1.3.

Ist  $(\xi, \vec{\eta}) := (\xi, \eta_1, \dots, \eta_n) \in G$ , so heißt

$$\vec{y}(\xi) = \vec{\eta} \quad \text{bzw} \quad y_1(\xi) = \eta_1, \quad \dots, \quad y_n(\xi) = \eta_n \quad (5)$$

eine *Anfangsbedingung* für das System (4) und beides zusammen ein *Anfangswertproblem (AWP)*.

Sei  $I$  ein echtes Intervall und  $\vec{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Funktion. Dann heißt  $\vec{\varphi}$  *Lösung* des Systems (4), falls für alle  $x \in I$  gilt:

- (i)  $(x, \vec{\varphi}(x)) \in G$  also  $\text{graph } \vec{\varphi} \subset G$  und
- (ii)  $\vec{\varphi}'(x) = f(x, \vec{\varphi}(x))$ .

Es ist manchmal nützlich, von einer Differential- zu einer Integralgleichung überzugehen, da Integraloperatoren häufig angenehmere Eigenschaften haben als Differentialoperatoren.

Das AWP (4),(5) ist z.B. äquivalent zu der *Integralgleichung*

$$\vec{y} = \vec{\eta} + \int_{\xi}^x f(t, \vec{y}) dt. \quad (6)$$

### 1.1.3 Zusammenhang von Gleichungen und Systemen

Differentialgleichungen und Systeme  $n$ -ter Ordnung sind in gewisser Hinsicht äquivalent. Genauer:

Gegeben sei die explizite Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (7)$$

Dabei sei  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Setzt man

$$y_1 := y, \quad y_2 := y', \quad \dots, \quad y_n := y^{(n-1)},$$

so geht die Gleichung (7) über in das System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ f(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix} \quad \text{bzw} \quad (8)$$

$$\vec{y}' = (y_2, \dots, y_n, f(x, \vec{y})) .$$

(8) heißt das zur Gleichung (7) gehörende System.

Ist  $(\xi, \vec{\eta}) = (\xi, \eta_1, \dots, \eta_n) \in G$ , so sind  $y(\xi) = \eta_1, \dots, y^{(n-1)}(\xi) = \eta_n$  und  $\vec{y}(\xi) = \vec{\eta}$  entsprechende Anfangsbedingungen.

Die Gleichung (7) und das System (8) sind äquivalent in folgendem Sinne:

Ist  $y = \varphi(x)$  Lösung der Gleichung (7), so ist  $\vec{\varphi} = (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$  Lösung des Systems (8).

Ist umgekehrt  $\vec{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  Lösung des Systems (8), so ist  $\varphi = \varphi_1$  Lösung der Gleichung (7).



Analoges gilt für die entsprechenden Anfangswertprobleme. Auf Grund dieser Äquivalenz lassen sich Ergebnisse über Systeme oft leicht auf Differentialgleichungen übertragen.

*Beispiel:*

Die Differentialgleichung 2. Ordnung  $y'' + y = 0$  ist äquivalent zu dem System  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}$ .

$y = \sin x$  ist eine Lösung der Gleichung.  $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$  ist eine Lösung des Systems.

Das System (8) ist von einer speziellen Bauart. Man kann nicht nur diese speziellen Systeme in Differentialgleichungen umwandeln. Ist z.B. ein explizites System

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

von zwei Gleichungen 1. Ordnung gegeben, so kann man etwa die 1. Gleichung  $y_1' = f_1(y_1, y_2)$  nach  $x$  differenzieren und erhält

$$y_1'' = D_1 f_1(y_1, y_2) y_1' + D_2 f_1(y_1, y_2) y_2'.$$

Dabei ist  $D_j f$  die Ableitung von  $f$  nach der  $j$ -ten Variablen. Man ersetzt  $y_2' = f_2(y_1, y_2)$  und kann dann i.a.  $y_2$  mit Hilfe der ersten Gleichung eliminieren. Man erhält so eine Gleichung 2. Ordnung für  $y_1$ . Bei Systemen 2. Ordnung ist dies ein nützliches Verfahren (sog. *Eliminationsmethode*). Für Beispiele siehe Aufgabe 12.2.A und 12.3.C.

## 1.2 Existenz von Lösungen

Für die Lösbarkeit eines expliziten Anfangswertproblems reicht die Stetigkeit der rechten Seite. Für die eindeutige Lösbarkeit muss man Zusatzbedingungen stellen, wie z.B. die Lipschitz-Stetigkeit bzgl  $\vec{y}$ . Das ist der Inhalt der zentralen Sätze von *Peano* und *Picard-Lindelöf*.

Die Situation bei Randwertproblemen ist komplizierter. Siehe Abschnitt 8.

### 1.2.1 Existenzsatz von Peano

#### Existenzsatz von Peano

Für die lokale Lösbarkeit des Systems  $\vec{y}' = f(x, \vec{y})$  bzw der Gleichung  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$  reicht die Stetigkeit der rechten Seite.

Auch wenn die rechte Seite  $f(x, \vec{y})$  in einem Streifen  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  stetig ist, kann man nicht erwarten, dass die Lösungen des AWP's (1) im größtmöglichen Intervall  $[a, b]$  definiert sind.

*Beispiel:*  $y = \tan(x + C)$  ist die allgemeine Lösung der Gleichung  $y' = 1 + y^2$ , deren rechte Seite  $f(x, y) = 1 + y^2$  im ganzen  $\mathbb{R}^2$  stetig ist. Die Lösungen sind nur in Intervallen der Länge  $\pi$  definiert.

Es gilt aber

#### Existenzsatz (Streifenversion)

Seien  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  ein echtes Intervall,  $x_0 \in [a, b]$ ,  $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $f: [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  im ganzen Streifen  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  stetig und beschränkt. Dann besitzt das AWP  $\vec{y}' = f(x, \vec{y})$ ,  $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$  eine Lösung  $\vec{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Die folgende lokale Version des Existenzsatzes macht ebenfalls eine Aussage über die Größe des Existenzintervalls:

#### Existenzsatz (Lokale Version)

Seien  $c, d > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $Q$  der Quader

$$Q := \{ (x, \vec{y}) \in \mathbb{R}^{n+1}; |x - x_0| \leq c, \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq d \} .$$

Seien ferner  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig,  $M := \max \{ \|f(x, \vec{y})\|; (x, \vec{y}) \in Q \}$  und  $\varepsilon := \min(c, d/M)$ . Dann hat das AWP  $\vec{y}' = f(x, \vec{y})$ ;  $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$  mindestens eine Lösung  $\vec{y}: [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Der Satz wird oft mit Hilfe des *Eulerschen Polygonzugverfahrens* und des Satzes von *Arzela-Ascoli* (siehe [RA II, 6.3.8]) bewiesen. Bei der Definition des

Quaders  $Q$  und der Schranke  $M$  ist dieselbe Norm im  $\mathbb{R}^n$  zu verwenden.

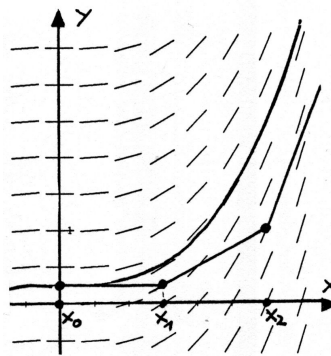
*Beweisskizze:*

Sei  $Z := (x_0 < x_1 < \dots < x_m = x_0 + \varepsilon)$  eine Zerlegung des Intervalls  $[x_0, x_0 + \varepsilon]$  mit den Teilintervallen  $I_k := [x_{k-1}, x_k]$ .

Ausgehend vom gegebenen Anfangswert  $\vec{y}_0$  definiert man induktiv

$$\vec{y}_{k+1} := \vec{y}_k + (x_{k+1} - x_k) f(x_k, \vec{y}_k) .$$

Hier muss man sich natürlich überlegen, dass alle Stützstellen  $(x_k, \vec{y}_k)$  und damit der sie verbindende Polygonzug noch ganz im Quader  $Q$  liegen. Der Streckenzug mit den Stützstellen  $(x_k, \vec{y}_k)$  heißt der *Euler-Polygonzug* zur Zerlegung  $Z$ .



Euler-Polygonzug

Ist  $(Z_j)$  eine Folge von Zerlegungen, deren Feinheit gegen Null geht, so wird die zugehörige Folge der Euler-Polygonzüge i.a. nicht konvergieren. Sie ist aber *gleichmäßig stetig* und nach dem Satz von Arzela-Ascoli gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Die Grenzfunktion löst das AWP im Teilintervall  $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ . Entsprechend findet man eine Lösung in  $[x_0 - \varepsilon, x_0[$ .

In Aufgabe 10.1.E finden Sie ein Beispiel eines AWP's, für das die volle Folge der Euler-Polygonzüge nicht konvergiert.

Im Eulerschen Polygonzugverfahren steckt eine numerische Methode zum Lösen von Differentialgleichungen und Dgl-Systemen. Für die Praxis gibt es wesentlich effektivere numerische Verfahren. Siehe dazu Abschnitt 9 .

### 1.2.2 Fortsetzung von Lösungen

Seien  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen,  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $(x_0, \vec{y}_0) \in G$  . Seien ferner  $I_0, I \subset \mathbb{R}$  echte Intervalle und  $\vec{\varphi}_0: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\vec{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lösungen des Anfangswertproblems

$$\vec{y}' = f(x, \vec{y}) \quad ; \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 . \quad (1)$$

Man sagt,  $\vec{\varphi}$  ist *Fortsetzung* von  $\vec{\varphi}_0$ , oder auch  $\vec{\varphi}_0$  ist in  $\vec{\varphi}$  *enthalten*, wenn  $I_0 \subset I$  und  $\vec{\varphi}(x) = \vec{\varphi}_0(x)$  für alle  $x \in I_0$  .

Eine Lösung  $\vec{y}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  des AWP's (1) heißt *nicht fortsetzbare bzw. maximal fortgesetzte Lösung* und  $I$  heißt *maximales Existenzintervall*, wenn es keine Lösung von (1) gibt, die  $\vec{y}$  echt enthält.

Mit Hilfe des *Zorn'schen Lemmas* kann man zeigen:

Satz über die Existenz nicht-fortsetzbarer Lösungen

Jede Lösung des AWP's (1) ist in einer nicht fortsetzbaren enthalten.

Wenn die rechte Seite  $f(x, \vec{y})$  in einem Streifen  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  stetig und beschränkt ist, so ist jede maximal fortgesetzte Lösung eines AWP's (1) im gesamten Intervall  $[a, b]$  definiert. Das besagt gerade die Streifenversion des Existenzsatzes von Peano.

Allgemein kann man zeigen, dass die maximal fortgesetzten Lösungen nach links und rechts bis zum Rand des Definitionsbereiches  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  der rechten Seite laufen. Was heißt das genauer?

Seien  $I$  ein Intervall,  $x_0$  ein innerer Punkt von  $I$ ,  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein Gebiet und  $\vec{y}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Funktion mit  $\text{graph } \vec{y} \subset G$ .

Man sagt,  $\vec{y}$  kommt nach rechts dem Rand  $\partial G$  von  $G$  beliebig nahe, falls der sog. rechte Teilgraph

$$G_+ := \{ (x, \vec{y}(x)); x \in I, x \geq x_0 \}$$

in keiner kompakten Teilmenge von  $G$  enthalten ist.

Diese Bedingung ist äquivalent zu

- 1)  $\sup I = \infty$  oder
- 2)  $\sup I =: b < \infty$  und  $\limsup_{x \rightarrow b^-} \|\vec{y}(x)\| = \infty$  oder
- 3)  $\sup I =: b < \infty$  und  $\liminf_{x \rightarrow b^-} d((x, \vec{y}(x)), \partial G) = 0$ .

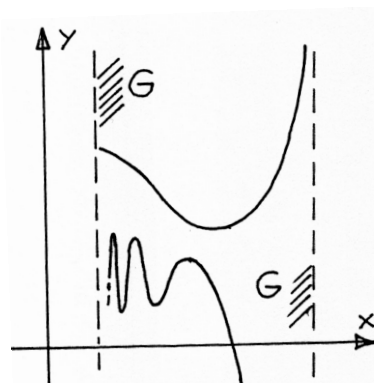
Analog definiert man die Annäherung an den Rand nach links.

Es gilt

Globaler Existenzsatz

Sei  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  ein Gebiet,  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und  $(x_0, \vec{y}_0) \in G$ . Dann hat das AWP (1) eine nicht fortsetzbare Lösung. Jede nicht fortsetzbare Lösung kommt nach links und rechts dem Rand von  $G$  beliebig nahe.

Zur Eindeutigkeit maximal fortgesetzter Lösungen siehe Abschnitt 1.3.1.



Lösungen zum Rand

### 1.3 Eindeutigkeit von Lösungen

Gegeben sei das AWP

$$\vec{y}' = f(x, \vec{y}) \quad ; \quad \vec{y}'(x_0) = \vec{y}_0 . \quad (1)$$

Dabei sei wie üblich  $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig.

Man sagt, das AWP ist *eindeutig lösbar*, wenn es ein Intervall  $I$  gibt, das  $x_0$  im Inneren enthält, sowie eine Lösung  $\vec{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  derart, dass jede Lösung  $\vec{\psi}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\vec{\varphi}$  übereinstimmt. Manchmal redet man auch von eindeutiger Lösbarkeit nach links oder rechts und lässt zu, dass  $x_0$  Randpunkt von  $I$  ist.

Man sagt, die Gleichung  $\vec{y}' = f(x, \vec{y})$  ist in  $G$  *eindeutig lösbar*, wenn jedes AWP (1) mit  $(x_0, \vec{y}_0) \in G$  eindeutig lösbar ist.

Es gibt Anfangswertprobleme, die lösbar, aber nicht eindeutig lösbar sind. Z.B. hat das AWP

$$y' = \sqrt{|y|} \quad ; \quad y(0) = 0$$

u.a. die Lösungen  $y_1 := 0$  und  $y_2 := \text{sgn } x(x^2/4)$ . Die rechte Seite  $\sqrt{|y|}$  der Dgl ist zwar stetig, aber nicht Lipschitz-stetig bzgl  $y$ ! (Siehe Aufgabe 10.4.A.2)

#### 1.3.1 Picard-Lindelöf

Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz von Picard-Lindelöf besagt in Kurzform:

Satz von Picard-Lindelöf

Ist die rechte Seite des expliziten Systems  $\vec{y}' = f(x, \vec{y})$  stetig und (lokal) Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$ , so ist es eindeutig lösbar.

Zur Lipschitz-Stetigkeit bzgl  $\vec{y}$  siehe Abschnitt 1.3.3.

Eine analoge Aussage gilt für explizite Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung. Die Existenzaussage des Satzes von Picard-Lindelöf folgt direkt aus dem Existenzsatz von Peano (1.2.1).

Den Satz von Picard-Lindelöf beweist man oft mit dem *Banachschen Fixpunktsatz* (siehe z.B. [RA 2, 6.3.4.9]) oder dem *Picard'schen Iterationsverfahrens* (siehe Abschnitt 1.3.2).

Die Eindeutigkeit kann man auch mit Hilfe des Gronwall-Lemmas beweisen. Siehe dazu Aufgaben 10.1.G und 11.1.A.

Lemma von Gronwall

Seien  $I \subset \mathbb{R}$  ein echtes Intervall,  $x_0 \in I$  und  $\alpha, \beta, \varphi: I \rightarrow [0, \infty[$  stetige, nicht-negative Funktionen. Es gelte die Integralungleichung

$$\varphi(x) \leq \alpha(x) + \left| \int_{x_0}^x \beta(t) \varphi(t) dt \right| \quad (x \in I) .$$

Dann gilt

$$\varphi(x) \leq \alpha(x) + \left| \int_{x_0}^x \alpha(t) \beta(t) \exp \left( \left| \int_t^x \beta(u) du \right| \right) dt \right| \quad (x \in I) .$$

Für den zentralen Satz von Picard-Lindelöf gibt es verschiedene Formulierungen. Interessant sind dabei auch Aussagen über die Größe des Existenzintervalls.

Picard-Lindelöf (Streifenversion)

Sei  $x_0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $f$  im Streifen  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  stetig und global Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$ .

Dann besitzt das System (1) genau eine Lösung  $\vec{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Die Forderung der globalen Lipschitz-Stetigkeit kann man abschwächen zu lokal Lipschitz-stetig und linear beschränkt. Siehe Knobloch & Kappel [KK]. Eine lokale Version ist die folgende:

Picard-Lindelöf (Lokale Version)

Seien  $\alpha, \beta > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  und  $Q$  der Quader

$$Q := \{ (x, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n ; |x - x_0| \leq \alpha, \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq \beta \} .$$

Sei  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und in  $Q$  Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$  mit der Lipschitz-Konstanten  $L$ . Sei  $M > 0$  derart, dass  $\|f(x, \vec{y})\| \leq M$  für alle  $(x, \vec{y}) \in Q$ .

Schließlich sei  $\varepsilon := \min(\alpha, \beta/M)$  und  $I := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ .

Dann hat das AWP (1) eine eindeutig bestimmte Lösung  $\vec{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Dabei muss man zur Definition des Quaders  $Q$  und der Lipschitz-Konstanten  $L$  dieselbe Norm im  $\mathbb{R}^n$  benutzen. Eine relativ leichte Folgerung davon ist:

Picard-Lindelöf (Globale Version für Systeme)

Seien  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen,  $(x_0, \vec{y}_0) \in G$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$ .

Dann hat das AWP (1) genau eine nicht fortsetzbare Lösung  $\vec{y}$ .

Diese maximal fortgesetzte Lösung kommt nach links und rechts dem Rand von  $G$  beliebig nahe. Sie enthält jede andere Lösung und ihr maximales Existenzintervall ist offen.

Zur Definition des Randverhaltens siehe Abschnitt 1.2.2.

Ein entsprechender Satz gilt auch für Gleichungen  $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$   $n$ -ter Ordnung. Für das Randverhalten maximal fortgesetzter Lösungen  $\varphi$  etwa im rechten Endpunkt  $\beta := \sup I$  des maximalen Existenzintervalls gilt dabei

- 1)  $\beta = \infty$  oder
- 2)  $\beta < \infty$  und  $(\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$  ist auf  $[x_0, \beta[$  unbeschränkt oder
- 3)  $\beta < \infty$  und  $\liminf_{x \rightarrow \beta^-} d(\partial G, (x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x))) = 0$ .

### 1.3.2 Picard'sches Iterationsverfahren

Gegeben sei das AWP (1), dessen rechte Seite  $f(x, \vec{y})$  stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$  ist. Dann konvergiert die durch

Picard'sches Iterationsverfahren

$$\vec{\phi}_0(x) := \vec{y}_0 \quad ; \quad \vec{\phi}_{k+1}(x) := \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x f(t, \vec{\phi}_k(t)) dt \quad (2)$$

definierte Funktionenfolge  $(\vec{\phi}_k)_k$  in einem Intervall  $I$  um  $x_0$  gleichmäßig gegen die eindeutig bestimmte Lösung  $\vec{\varphi}$  des AWP's (1).

Bei diesem Verfahren wird, ausgehend von der Startfunktion  $\vec{\phi}_0(x) \equiv \vec{y}_0$ , der durch

$$(T\vec{\phi})(x) := \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x f(t, \vec{\phi}(t)) dt$$

definierte Operator  $T: C(I) \rightarrow C(I)$  iteriert. Dieser Operator ist (bei geeigneter Wahl des Intervalls  $I$ ) eine Kontraktion auf dem Banachraum  $C(I)$  der auf  $I$  stetigen Funktionen. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz besitzt der Operator  $T$  genau einen Fixpunkt. Außerdem konvergiert die Iterationsfolge im Sinne der Banachraum-Norm gegen diesen Fixpunkt. Die Banachraum-Norm ist die Supremumsnorm, also konvergiert die Iterationsfolge  $(\vec{\phi}_k)_k$  gleichmäßig gegen die eindeutig bestimmte Lösung der Integralgleichung

$$\vec{y} = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^x f(t, \vec{y}) dt$$

und damit gegen die Lösung des AWP's  $\vec{y}' = f(x, \vec{y})$ ,  $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ .

Interessant sind natürlich Fehlerabschätzungen für den Unterschied zwischen den Iterierten und der Lösung. Z.B. gilt

Fehlerabschätzung in der Streifenversion

Sei  $x_0 \in [a, b] \subset \mathbb{R}$  und  $f$  im Streifen  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$  stetig und global Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$ . Seien  $\vec{\phi}_k$  die Iterierten des Picard-Verfahrens und  $\vec{\varphi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Lösung des AWP's (1).

Dann gilt die Fehlerabschätzung:

$$\|\vec{\phi}_k(x) - \vec{\varphi}(x)\| \leq K \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{j!} L^j |x - x_0|^j .$$

Dabei ist  $K := \max_{a \leq x \leq b} \|\vec{\phi}_1(x) - \vec{\phi}_0(x)\|$  und  $L$  die Lipschitzkonstante von  $f$  im Streifen  $[a, b] \times \mathbb{R}^n$ . Als Norm im  $\mathbb{R}^n$  muss man dieselbe Norm nehmen, die bei der Definition der Lipschitz-Konstanten  $L$  benutzt wurde.

Fehlerabschätzung für die lokale Version

Seien  $\alpha, \beta > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  und  $Q$  der Quader

$$Q := \{ (x, \vec{y}) \in \mathbb{R}^n ; |x - x_0| \leq \alpha, \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq \beta \} .$$

Sei  $f: Q \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und in  $Q$  Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$  mit der Lipschitz-Konstanten  $L$ . Sei  $M > 0$  derart, dass  $\|f(x, \vec{y})\| \leq M$  für alle  $(x, \vec{y}) \in Q$ . Schließlich seien  $\varepsilon := \min(\alpha, \beta/M)$  und  $\phi_{k,\nu}$  bzw  $\varphi_\nu$  die Koordinaten der Iterierten  $\vec{\phi}_k$  des Picard-Verfahrens bzw der Lösung  $\vec{\varphi}: [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann gilt die Fehlerabschätzung:

$$|\phi_{k,\nu}(x) - \varphi_\nu(x)| \leq \frac{M}{L} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{j!} L^j |x - x_0|^j .$$

Als Norm im  $\mathbb{R}^n$  ist dabei durchgehend dieselbe Norm zu nehmen.

Beispiele zum Picardschen Iterationsverfahren siehe Aufgabe 11.3.

### 1.3.3 Lipschitz-Stetigkeit bzgl $\vec{y}$

Sei  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen und  $f$  eine Funktion von  $G$  in den  $\mathbb{R}^n$ . Wir fassen die letzten  $n$  Argumente von  $f$  zu einem Vektor  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$  zusammen und schreiben  $(x, \vec{y}) = (x, y_1, \dots, y_n)$  für die Elemente von  $G$ . Man sagt,  $f$  ist



in  $G$  Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$ , wenn es eine sog. Lipschitz-Konstante  $L > 0$  gibt derart, dass

$$\forall (x, \vec{y}_1), (x, \vec{y}_2) \in G : \|f(x, \vec{y}_1) - f(x, \vec{y}_2)\| < L \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|. \quad (3)$$

$f$  ist lokal Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$ , wenn es zu jedem Punkt  $(x_0, \vec{y}_0) \in G$  eine Umgebung  $U \subset G$  gibt, in der  $f$  Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$  ist.

Ist  $f$  auf einer offenen Menge  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  lokal Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$ , so ist  $f$  auf jeder kompakten Teilmenge  $K \subset G$  global Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$ .

Die Größe der Lipschitz-Konstanten  $L$  kann von der im  $\mathbb{R}^n$  gewählten Norm abhängen, nicht aber die Lipschitz-Stetigkeit selbst.

Aus der Lipschitz-Bedingung (3) allein folgt übrigens nur die Stetigkeit von  $f$  auf den Hyperebenen  $x \equiv \text{const}$  und nicht die Stetigkeit von  $f$  in  $G$ . Diese muss daher - falls benötigt - extra gefordert werden.

Eine hinreichende und oft leicht zu überprüfende Bedingung für die Lipschitz-Stetigkeit bzgl  $\vec{y}$  ist die folgende:

Hinreichendes Kriterium für lokale Lipschitz-Stetigkeit

Ist  $f$  in  $G$  stetig partiell differenzierbar nach den Variablen  $y_1, \dots, y_n$ , so ist  $f$  in  $G$  lokal Lipschitz-stetig bzgl.  $\vec{y}$ .

### 1.3.4 Weitere Eindeutigkeitsätze

Existenz- und Eindeutigkeitsätze für spezielle Gleichungen wie z.B. lineare oder mit getrennten Variablen finden Sie in dem betreffenden Abschnitt. Hier folgt ein allgemeines Resultat aus [WA]:

Allgemeiner Eindeutigkeitsatz

Sei  $I = [x_0, x_0 + a] \subset \mathbb{R}$  ein reelles Intervall ( $a > 0$ ). Die reellwertige Funktion  $\omega: I \times [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  habe die folgende Eigenschaft:

Für jedes  $\varepsilon > 0$  existiert ein  $\delta > 0$  und eine differenzierbare Funktion  $\rho: I \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\rho'(x) > \delta + \omega(x, \rho(x)) \quad \text{und} \quad 0 < \delta < \rho(x) < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in I.$$

Sei  $G \subset I \times \mathbb{R}^n$  offen,  $(x_0, \vec{y}_0) \in G$  und für  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  gelte

$$\|f(x, \vec{y}_1) - f(x, \vec{y}_2)\| \leq \omega(x, \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|) \quad \text{für alle } (x, \vec{y}_1), (x, \vec{y}_2) \in G.$$

Dann hat das AWP (1):  $\vec{y}' = f(x, \vec{y})$ ,  $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$  höchstens eine Lösung und diese hängt stetig vom Anfangswert und von der rechten Seite der Dgl ab.

Zur Definition der stetigen Abhängigkeit siehe Abschnitt 1.4.1.

Jede Funktion  $\omega$ , die die obigen Bedingungen erfüllt liefert eine Eindeutigkeitsaussage. Spezialfälle sind:

1)  $\omega(x, z) := Lz$  mit  $L > 0$ . Dies liefert den Eindeutigkeitsatz von *Picard Lindelöf*.

2) Jedes  $\omega$  von der Form  $\omega(x, z) := q(z)$  mit einer stetigen Funktion  $q: [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  derart, dass  $q(0) = 0$ ,  $q(z) > 0$  für  $z > 0$  und  $\int_0^1 \frac{dz}{q(z)} = \infty$ .

Dies ergibt den Eindeutigkeitsatz von *Osgood*.

3) Jedes stetige  $\omega: I \times [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  mit  $\omega(x, 0) = 0$  und der Eigenschaft:

Ist  $\varphi(x) \geq 0$  Lösung des AWP's  $y' = \omega(x, y)$ ,  $y(x_0) = 0$  in  $[x_0, x_0 + \varepsilon[$ , so ist  $\varphi \equiv 0$  in  $[x_0, x_0 + \varepsilon[$ .

Dies liefert den Eindeutigkeitsatz von *Bompiani*.

Die Lipschitz-Stetigkeit ist ein Spezialfall der Osgood-Bedingung und diese wiederum ein Spezialfall der Bedingung von Bompiani.

Abschließend geben wir noch ein Resultat von *Nagumo* an:

Eindeutigkeitsatz von Nagumo

Seien  $a, b > 0$ ,  $(x_0, \vec{y}_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$  und  $R$  der Quader

$$R := \{ (x, \vec{y}) ; |x - x_0| < a, \|\vec{y} - \vec{y}_0\| < b \} \subset \mathbb{R}^{n+1} .$$

$f: R \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig und beschränkt und genüge in  $R$  der *Nagumo-Bedingung*:

$$|x - x_0| \cdot \|f(x, \vec{y}_2) - f(x, \vec{y}_1)\| \leq \|\vec{y}_2 - \vec{y}_1\| \quad \text{für alle } (x, \vec{y}_1), (x, \vec{y}_2) \in R .$$

Dann ist das Anfangswertproblem

$$y' = f(x, y) \quad ; \quad y(x_0) = y_0$$

eindeutig lösbar.

Die Lösbarkeit ist klar wegen der Stetigkeit von  $f$  (Peano). Einen Beweis des Satzes findet man bei E.Hille [HI, 2.6]. Siehe auch Aufgabe 10.1.F für den Fall 1. Ordnung.

## 1.4 Abhängigkeit der Lösungen

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\vec{y}' = f(x, \vec{y}) \quad ; \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0 \quad (1)$$

Dabei ist wie üblich  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen,  $(x_0, \vec{y}_0) \in G$  und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Zusätzlich fordern wir, dass  $f$  lokal Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$  ist. Das AWP (1) ist also eindeutig lösbar (Picard-Lindelöf).

In diesem Abschnitt interessiert die Frage, wie die eindeutig bestimmte Lösung von (1) vom Anfangswert  $\vec{y}_0$  und von der rechten Seite  $f$  abhängt.

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Lösungen global ein wesentlich verschiedenes Verhalten haben können, obwohl sich die Anfangswerte nur wenig unterscheiden.

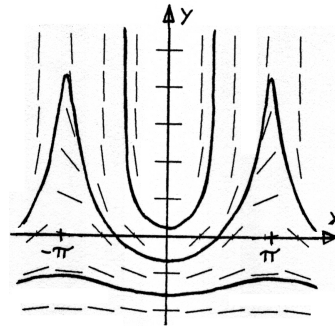
*Beispiel:*

Die Gleichung 1. Ordnung  $y' = e^y \sin x$  kann man durch Trennung der Variablen lösen. Sie hat die Lösungen

$$y = -\ln(\cos x + e^{-y(0)} - 1) .$$

Für Anfangswerte  $y(0) < -\ln 2$  sind die Lösungen in ganz  $\mathbb{R}$  definiert. Dagegen existieren sie für  $y(0) \geq -\ln 2$  nur in einem beschränkten Intervall.

Siehe dazu Aufgabe 10.1.B.



$$y' = e^y \sin x$$

### 1.4.1 Stetige Abhängigkeit der Lösungen

Es gilt der folgende

Satz über die stetige Abhängigkeit

Bei Lipschitz-stetigem  $f$  hängt die Lösung des AWP's (1) stetig vom Anfangswert und von der rechten Seite ab.

*Genauer:*

Sei  $\vec{\varphi}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lösung des AWP's (1) im kompakten Intervall  $I$ .

Sei  $S_\alpha := \{ (x, \vec{y}); \|\vec{y} - \vec{\varphi}(x)\| \leq \alpha, x \in I \}$  der  $\alpha$ -Streifen um graph  $\vec{\varphi}$ .  $f$  sei in  $S_\alpha$  stetig und Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$ .

Dann gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  derart, dass für alle stetigen Funktionen  $g: S_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $\|g(x, \vec{y}) - f(x, \vec{y})\| < \delta$  in  $S_\alpha$  und alle Anfangswerte  $\vec{z}_0$  mit  $\|\vec{y}_0 - \vec{z}_0\| < \delta$  jede Lösung  $\vec{\psi}(x)$  des 'gestörten' AWP's

$$\vec{z}' = g(x, \vec{z}) \quad ; \quad \vec{z}(x_0) = \vec{z}_0 \quad (2)$$

in ganz  $I$  existiert und der Ungleichung  $\|\vec{\varphi}(x) - \vec{\psi}(x)\| < \varepsilon$  in  $I$  genügt.

Insbesondere gilt dann für alle stetig differenzierbaren Funktionen  $\vec{\psi}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} \|\vec{y}_0 - \vec{\psi}(x_0)\| < \delta, \quad \|\psi'(x) - f(x, \psi(x))\| < \delta \text{ für alle } x \in I \\ \implies \|\vec{\varphi}(x) - \vec{\psi}(x)\| < \varepsilon \text{ für alle } x \in I. \end{aligned}$$

Man kann das  $\delta$  zu dem vorgegebenen  $\varepsilon > 0$  sogar recht konkret angeben. Dies ergibt sich aus der folgenden

Abschätzung bei Lipschitz-Bedingung

Seien  $G \in \mathbb{R}^{n+1}$  offen,  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und Lipschitz-stetig bzgl  $\vec{y}$  mit der Lipschitz-Konstanten  $L$ . Sei  $I := [x_0, x_0 + a]$ .

$\vec{\varphi}, \vec{\psi}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  seien differenzierbar mit  $\text{graph } \vec{\varphi}, \text{graph } \vec{\psi} \subset G$ .

In  $I$  gelte  $\vec{\varphi}'(x) = f(x, \vec{\varphi}(x))$  und  $\|\vec{\psi}'(x) - f(x, \vec{\psi}(x))\| \leq \delta$ .

Dann gilt für alle  $x \in I$ :

$$\|\vec{\varphi}(x) - \vec{\psi}(x)\| \leq \|\vec{\varphi}(x_0) - \vec{\psi}(x_0)\| e^{L|x-x_0|} + \frac{\delta}{L} \left( e^{L|x-x_0|} - 1 \right).$$

Aus dieser Abschätzung folgt für  $\delta = 0$  und  $\vec{\varphi}(x_0) = \vec{\psi}(x_0)$  wieder die Eindeutigkeitsaussage des Satzes von Picard-Lindelöf.

#### 1.4.2 Differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen

Die Lösungen eines Anfangswertproblems hängen nicht nur stetig, sondern unter gewissen Voraussetzungen auch differenzierbar von den Anfangswerten ab.

Gegeben sei weiterhin das Gleichungssystem

$$\vec{y}' = f(x, \vec{y}). \quad (3)$$

Dabei sei  $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$  offen und  $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Zusätzlich fordern wir, dass  $f$  nach den Variablen  $y_1, \dots, y_n$  stetig differenzierbar ist. Die lokale Lipschitz-Stetigkeit von  $f$  bzgl  $\vec{y}$  folgt dann.

Die sog. *charakteristische Funktion*  $\vec{\phi}(x, x_0, \vec{y}_0)$  des Systems ist definiert durch  $\vec{\phi}(x, x_0, \vec{y}_0) := \vec{\varphi}(x)$ , wobei  $\vec{\varphi}$  die eindeutig bestimmte Lösung des Systems (3) ist mit  $\vec{\varphi}(x_0) = \vec{y}_0$ .

Es gilt:

Satz über die differenzierbare Abhängigkeit

Unter den obigen Voraussetzungen ist die charakteristische Funktion  $\vec{\phi}$  in ihrem Definitionsbereich stetig differenzierbar, also nach allen ihren Variablen stetig partiell differenzierbar.