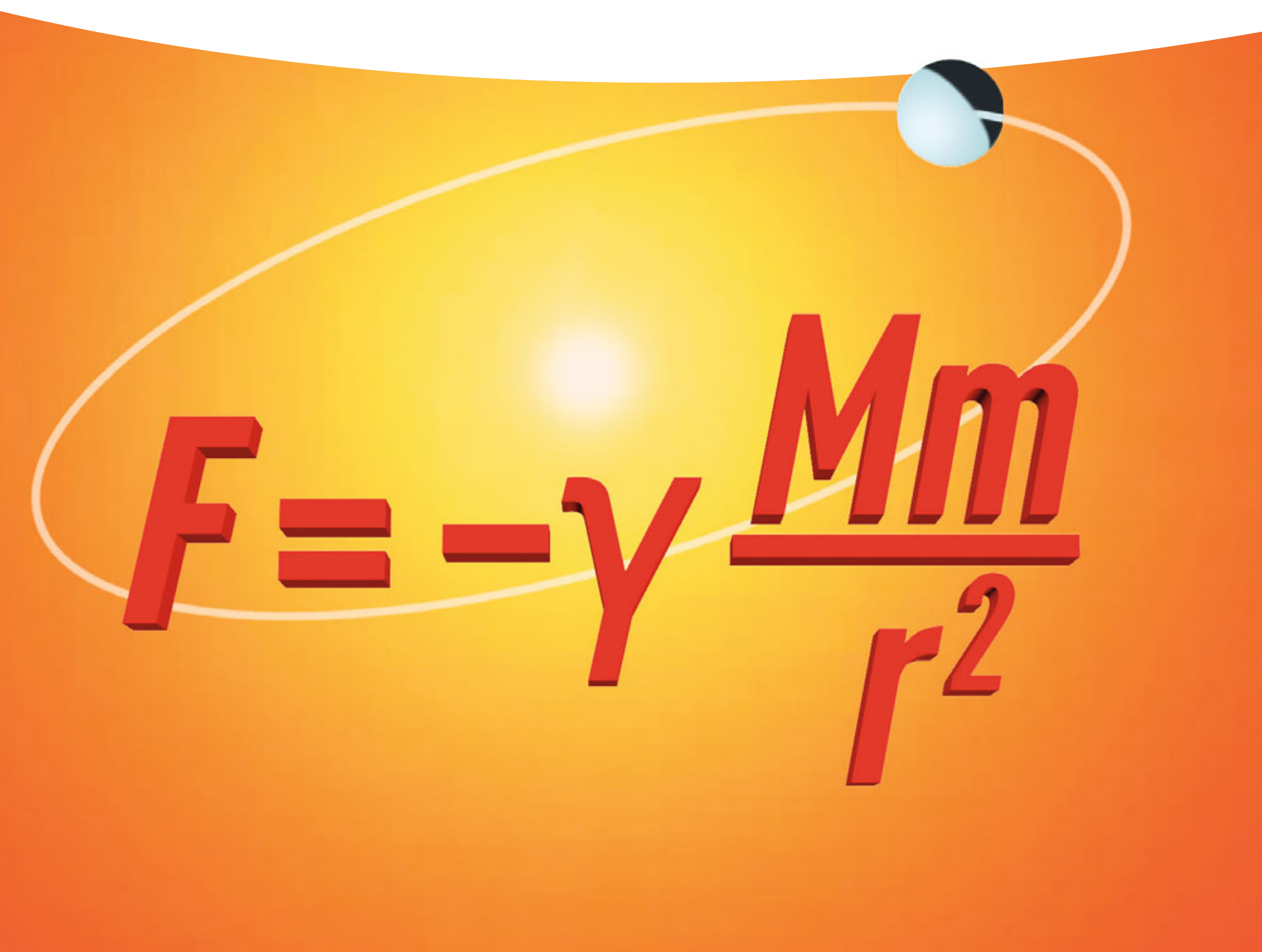
WILEY-VCH

Peter Reineker, Michael Schulz, Beatrix M. Schulz
und Reinhold Walser

Mechanik

Theoretische Physik I

Zweite Auflage



Peter Reineker
Michael Schulz
Beatrix M. Schulz
Reinhold Walser

Mechanik

Peter Reineker
Michael Schulz
Beatrix M. Schulz
Reinhold Walser

Mechanik

Theoretische Physik I

2. Auflage

WILEY-VCH

Autoren

Prof. Peter Reineker
Universität Ulm
Institut für Quantenoptik
Albert-Einstein-Allee 11
89081 Ulm
Germany

Prof. Michael Schulz
Universität Ulm
Institut für Theoretische Physik
Albert-Einstein-Allee 11
89081 Ulm
Germany

Dr. Beatrix M. Schulz
Bachmann Monitoring
Blücherstraße 26
06120 Halle (Saale)
Germany

Prof. Reinhold Walser
Technische Universität Darmstadt
Institut für Angewandte Physik
Hochschulstr. 4a
64289 Darmstadt
Germany

2. Auflage 2021

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Print ISBN 978-3-527-41390-4
ePDF ISBN 978-3-527-82860-9
ePub ISBN 978-3-527-82861-6

Umschlaggestaltung Schulz Grafik-Design, Fußgönheim
Satz le-tex publishing services GmbH, Leipzig

Gedruckt auf säurefreiem Papier.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

Gewidmet dem Andenken an

Heribert Baumert
Hildegard und Paul Reineker
Manfred Schulz
Dr. Klaus Walser

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Seit der Erstauflage der Lehrbuchreihe *Theoretische Physik I–V* [39–43] in den Jahren 2006 und folgenden hat sich das Physikstudium in Form der Bachelor-Master-Ausbildung an allen deutschen Universitäten etabliert. Im Bachelorkurs wird die Theoretische Physik in der Regel in einer viersemestrigen Vorlesung angeboten. Das haben wir berücksichtigt und uns in der Neuauflage auf vier Bände konzentriert. Der bisherige Band IV (*Quantenmechanik II*) ist entfallen. Sein Inhalt kann in speziellen Vorlesungen in der Masterphase angeboten werden.

Die Neuauflage richtet sich nicht nur an die Studierenden der Physik, sondern auch an interdisziplinäre Studiengänge mit einem Schwerpunkt auf dem Gebiet der Physik (Medizinphysik, Wirtschaftsphysik, Biophysik) oder mit physikalischem Bezug (Sensorik, angewandte Mathematik) und überhaupt an alle an physikalisch-theoretischen Methoden Interessierten.

In der Neuauflage des Mechanikbandes haben wir das Kap. 9 mit der Einführung in die spezielle relativistische Mechanik hinzugefügt. Jedes Kapitel wird eingeleitet mit einem Überblick über den in ihm behandelten Stoff. Am Ende der Kapitel sind jetzt Kontrollfragen eingebaut. Außerdem werden hier Aufgaben gestellt, zu denen mehr oder weniger ausführliche Lösungsvorschläge in entsprechenden Abschnitten des Anhangs gegeben sind.

Numerische Experimente und interaktive Demonstrationen sind wichtige Werkzeuge in der Theoretischen Physik um präzise Aussagen zu machen und abstrakte Konzepte zu illustrieren. Wir erweitern nun das Angebot von Onlinematerial (Details am Ende des Vorwortes), das in der ersten Ausgabe mit MAPLE entwickelt wurde mit der populären Open-Source-Software Python. Nachdem man eine frei verfügbare Python-Distribution installiert hat, kann man die interaktiven jupyter-notebooks ausführen, die thematisch den Buchkapiteln zugeordnet sind.

Die Erweiterung der Zahl der Autoren hat sich auf die Bearbeitung des Projekts sowohl inhaltlich als auch formal sehr positiv ausgewirkt.

Wir möchten an dieser Stelle Herrn Dipl.-Phys. Christoph Warns für seinen Einsatz bei der Anfertigung dieses Bandes herzlich danken. Herr Warns hat technisch und inhaltlich die Fertigstellung des Bandes sehr unterstützt und auch selbstständig zur Formulierung von Kap. 9 beigetragen. Auch durch Diskussionen früherer Versionen mit Herrn Dr. Thomas Hartmann und Frau Dipl.-Phys. Dipl.-Math. Annetraud Scheuing hat das Manuskript an Qualität gewonnen. Einer Reihe von Studierenden sei für die Mitteilung von Fehlern in früheren Versionen des Manuskriptes gedankt. Herrn Dr. Martin Preuß und Frau Daniela Bez danken wir für die gute Zusammenarbeit und das Verständnis für die Corona-bedingte zeitliche Verzögerung bei der Fertigstellung des Manuskriptes. Last but not least dankt Peter Reineker Herrn Prof. Dr. Fedor Jelezko für die Möglichkeit, als Seniorprofessor im Institut für Quantenoptik der Universität Ulm zu arbeiten.

Ulm, Halle, Darmstadt
Juli 2020

Peter Reineker, Michael Schulz,
Beatrix M. Schulz, Reinhold Walser

Zusatzmaterial: der Zugang erfordert 1) ein Benutzerkonto bei github.com, 2) folgen Sie dem Link https://archive.org/services/purl/theoretische_physik_dhu, 3) nach Anmeldung bei gitlab suchen Sie das öffentliche Projekt „Zusatzmaterial der Lehrbuchreihe Theoretische Physik" wo die Materialien hinterlegt sind.

Vorwort der Vorauflage

Die Theoretische Physik hat sich im letzten Jahrhundert zu einem unverzichtbaren Bestandteil der Ausbildung junger Studierender in der Physik entwickelt. An dieser Situation wird sich auch nichts mit den an den meisten deutschen Universitäten inzwischen eingeführten oder kurz vor der Eröffnung stehenden Bachelor- und Masterstudiengängen ändern. Es ist für die Studierenden nicht immer einfach, sich systematisch Kenntnisse über das theoretische Grundwissen so anzueignen, dass ein zusammenhängender Komplex an Ideen, Konzepten und Methoden entsteht, der im späteren Berufsleben in den verschiedensten Ausprägungen angewendet werden kann.

An der Universität Ulm besteht schon seit Langem ein fünfsemestriger Theoriekurs, bestehend aus den Kursen Theoretische Mechanik, Elektrodynamik, Quantenmechanik (1 und 2) und Statistische Physik und Thermodynamik. Auf der Grundlage dieses Vorlesungsangebotes ist eine fünfbändige Lehrbuchreihe *Theoretische Physik* entstanden, die mit dem hier vorliegenden Band *Theoretische Mechanik* beginnt und das theoretische Basiswissen vermitteln will.

Diese Reihe wendet sich zuerst an alle Studierenden der Physik, gleich ob sie sich auf Experimentalphysik, Theoretische Physik, Computerphysik oder für das Lehramt spezialisieren wollen. In zweiter Linie richtet sich die Lehrbuchserie an Wissenschaftler, Lehrer und Studenten anderer Naturwissenschaften und der Mathematik. Mit dem Ziel, das theoretische Basiswissen zu vermitteln, enthält die Lehrbuchreihe natürlich nicht alle Teilgebiete der Theoretischen Physik. So werden Bestandteile von Spezialisierungskursen für Theoretische Physiker, z. B. Hydrodynamik, Allgemeine Relativitätstheorie, Quantenchromodynamik, Theorie der schwachen Wechselwirkung oder Stringtheorie, nicht behandelt. Hier verweisen wir auf entsprechende Monographien, die praktisch zu jedem dieser Teilgebiete der Theoretischen Physik erhältlich sind.

Um der Entwicklung in Bachelor- und Masterstudiengängen gerecht zu werden, sind Themen und Kapitel, die eher zusätzlich für die Masterausbildung vorgesehen sind, mit einem Stern gekennzeichnet. Natürlich wird die Auswahl von Universität zu Universität schwanken und diese Einteilung soll als Empfehlung angesehen werden, die sich mit der Realisierung der Studiengänge weiterentwickeln wird. Auf den Aufbau der einzelnen Bände des Lehrbuchs wird in der Einleitung des jeweiligen Bandes eingegangen.

Jedes Lehrbuch enthält Aufgaben zur Überprüfung des erworbenen Wissens. Mit arabischen Ziffern sind solche Aufgaben gekennzeichnet, deren Lösung auf klassische Weise, also mit Papier und Bleistift gefunden werden soll. Demgegenüber sind Aufgaben mit römischen Ziffern für die Behandlung unter Verwendung eines computeralgebraischen Programmpaketes vorgesehen. Die Begleit-CD, die jedem Buch dieser Serie beiliegt, enthält Lösungsempfehlungen in MAPLE. Zum Verständnis der Lösungen benötigt man nur geringe Vorkenntnisse in dieser Programmiersprache. Es ist geplant ein Forum einzurichten, unter dem besonders schöne oder technisch interessante Lösungswege von den Lesern zur elektronischen Publikation eingereicht werden können.

Wir möchten an dieser Stelle Herrn Thomas Pletl für viele Kommentare zur ersten Version des Manuskriptes und Herrn Reiner Steib für die Beratung und Hilfe bei der Lösung von LaTeX-Problemen herzlich danken. Auch Rückmeldung unserer Studierenden halfen bei der Überarbeitung der verschiedenen Versionen des Manuskriptes. Dem WILEY-VCH Verlag danken wir für vielfältige Beratung und Unterstützung.

Ulm, Halle, Januar 2006 *Peter Reineker, Michael Schulz, Beatrix M. Schulz*

1
Einleitung

1.1 Experimentelle und Theoretische Physik

Der Kurs Theoretische Physik beginnt an den meisten deutschen Universitäten im dritten Studiensemester. Zu diesem Zeitpunkt ist für die Studierenden die Theoretische Physik jedoch kein Neuland mehr. In den vorausgehenden, vorwiegend experimentell orientierten Kursen wurden häufig experimentelle Resultate quantitativ ausgewertet und mathematisch beschrieben. Auch im Grundpraktikum müssen sich die Studierenden um eine theoretische Beschreibung ihrer Versuche bemühen. Diese beiden Beispiele zeigen, dass die Theoretische Physik kein abstraktes, von der reinen Mathematik dominiertes Teilgebiet der Physik ist, welches isoliert von den anderen physikalischen und naturwissenschaftlichen Disziplinen existiert. Vielmehr wird man vielfältige Verbindungen zwischen der Theoretischen und der Experimentellen Physik finden.

Man kann sich daher die berechtigte Frage stellen, weshalb eine mehrsemestrige Vorlesung Theoretische Physik überhaupt angeboten wird, wenn Experimentelle und Theoretische Physik offensichtlich so eng verflochten sind. Tatsächlich gibt es Bemühungen – weitverbreitet in den USA, aber auch an einzelnen Universitäten in Deutschland – Experimentelle und Theoretische Physik einheitlich in integrierten Kursen darzustellen. An den meisten Universitäten in Deutschland wird aber ein gesonderter Kurs Theoretische Physik angeboten. Neben verschiedenen historischen Gründen spielt hierbei ein didaktisches Prinzip die entscheidende Rolle: Es gelingt im Rahmen eines geschlossenen Kurses Theoretische Physik viel einfacher grundlegende und übergreifende Konzepte zu vermitteln. Dadurch entsteht gewissermaßen ein roter Faden, der sich durch das gesamte Gebäude der Theoriekurse zieht.

1.2 Ziel der Theoretischen Physik

Ziel der Theoretischen Physik ist es, durch Verallgemeinerung experimenteller Erfahrungen oder durch grundsätzliche theoretische Überlegungen fundamentale Grundsätze, sogenannte Axiome, aufzustellen und deren Allgemeingültigkeit dadurch zu bestätigen, dass alle aus ihnen auf mathematischem Wege abgeleiteten

Mechanik, Zweite Auflage. Peter Reineker, Michael Schulz, Beatrix M. Schulz und Reinhold Walser.

speziellen Gesetzmäßigkeiten in keinem Widerspruch zu experimentell bekannten Resultaten stehen. Zum anderen ist es aber auch Aufgabe der Theoretischen Physik, aus den wenigen Axiomen auf deduktivem Wege neue Gesetze abzuleiten, die ihrerseits Anregungen für die experimentelle Forschung geben können.

1.3 Aufbau der Lehrbuchreihe Theoretische Physik

Man könnte nun daran denken, den Kurs in Theoretischer Physik mit möglichst fundamentalen Grundgleichungen, z. B. der Dirac-Gleichung der relativistischen Quantenmechanik, zu beginnen und dann die verschiedenen Grenzfälle der nichtrelativistischen Quantenmechanik, der relativistischen Mechanik und der klassischen Mechanik daraus abzuleiten. Ein solches Vorgehen scheint sicher logisch, aber ob es didaktisch geschickt wäre, ist eher unwahrscheinlich. Außerdem ist die Suche nach den Fundamentalprinzipien der Physik nicht abgeschlossen, sodass der Startpunkt eines solchen generischen Konzeptes momentan gar nicht klar definiert werden kann.

Band I dieser Lehrbuchreihe zur Theoretischen Physik enthält die klassische Mechanik, die sich im Wesentlichen mit der Bewegung von Systemen aus punktförmigen Objekten befasst. In diesem Lehrbuch wird auch die relativistische Mechanik als Erweiterung der Newton'schen Mechanik, behandelt.

Daran anschließen wird sich das zweite große Gebiet der klassischen Physik, die Elektrodynamik. In diesem Band wird die mathematische Beschreibung von Feldern systematisch eingeführt und auch eine kurze Darstellung der Grundzüge der relativistischen Feldtheorie gegeben. Band III enthält die Grundlagen der Quantenmechanik, in der feldtheoretische und mechanische Ideen zu einem gemeinsamen Konzept zusammengefasst werden. Mit den Kenntnissen der Theoretischen Quantenmechanik ist eine sehr erfolgreiche Beschreibung von Phänomenen auf atomaren und subatomaren Skalen verbunden, die im Rahmen der beiden großen klassischen Theorien nicht möglich war. Der vierte und letzte Band des Kurses Theoretische Physik enthält die Thermodynamik und Statistik. Hier werden Konzepte vermittelt, um Systeme mit einer großen Zahl mikroskopischer Partikel systematisch auf makroskopischen Skalen beschreiben zu können. Wir werden sehen, dass in diesem Band viele Begriffe und Ideen zusammenfließen, die in den vorhergehenden Bänden erarbeitet wurden.

1.4 Stellung der klassischen Mechanik in der Theoretischen Physik

Der Einstieg in die Theoretische Physik beginnt in der Regel mit dem Teilgebiet Theoretische Mechanik. Das hat vor allem historische und didaktische Gründe. Insbesondere glaubte man im 19. Jahrhundert, alle physikalischen Erscheinungen im Rahmen der Mechanik erklären zu können. Diese damals sehr populäre Auffassung wurde vor allem von der philosophischen Richtung des Mechanismus vertreten. Als typisches Beispiel soll hier die Äthertheorie erwähnt werden, die eine wesentliche Rolle bei der Interpretation des Elektromagnetismus spielte. Der Äther wurde als Trägermedium eingeführt, um die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen auf mechanische Weise erklären zu können. Der Mangel dieses mechanisch-theoretischen Konzeptes bestand von Anfang an darin, dass der Äther durch objektive Beobachtungen nicht verifizierbar war; schließlich konnte seine Existenz sogar experimentell widerlegt werden. Inzwischen hat man es längst aufgegeben, die physikalische Umwelt in ein mechanisches Bild zu pressen. Aber die ursprünglich primäre Stellung der Mechanik im Gebäude der Theoretischen Physik blieb bis heute erhalten. Das ist einer der Gründe, weshalb auch die vorliegende Lehrbuchreihe zur Theoretischen Physik mit der klassischen Mechanik beginnt.

Es gibt aber auch andere, didaktische und konzeptionelle Gründe, die klassische Mechanik als Startpunkt eines allgemeinen Theoriekurses zu wählen. Dazu zählt die Tatsache, dass innerhalb der Theoretischen Mechanik wesentliche physikalische Grundgrößen geprägt werden. In der Tat stammen so generelle Begriffe wie Masse, Kraft, Impuls, Arbeit oder Energie ursprünglich aus der Mechanik.

Des Weiteren werden im Rahmen der klassischen Mechanik viele grundlegende Prinzipien zur Konstruktion von physikalischen Bewegungsgleichungen und Methoden zu deren Lösung systematisch dargestellt. Viele dieser Techniken lassen sich später zwanglos auch auf die anderen Gebiete der Physik übertragen.

Schließlich kommt die klassische Mechanik der intuitiven Anschauung und der alltäglichen Erfahrung oft entgegen. Insbesondere wird man für viele abstrakt erscheinende Resultate leicht eine adäquate und meist sehr einfache Erklärung auf einer rein qualitativen Stufe finden können. Der Umgang mit solchen Gedankenexperimenten und Bildern ist oft sehr hilfreich bei der Wahl geeigneter Lösungsmethoden und Darstellungen. Die Methode der vorbereitenden anschaulichen Diskussion eines Problems wird natürlich auch in den anderen Teilgebieten der Theoretischen Physik verwendet, aber die Struktur der klassischen Mechanik ist am besten geeignet, dies zu trainieren.

1.5 Gültigkeitsgrenzen der klassischen Mechanik

Im Laufe der Zeit hat es sich herausgestellt, dass die Gesetze der klassischen Mechanik ihre Gültigkeit verlieren, wenn Objekte beschrieben werden sollen, die sich mit nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegen. Dann müssen die Gesetze der relativistischen Mechanik herangezogen werden.

Auf eine andere Gültigkeitsgrenze der Mechanik stößt man, wenn versucht wird, sehr kleine Teilchen, z. B. Elektronen oder Atome zu beschreiben. Für solche Probleme wird erst durch die Quantenmechanik eine adäquate Beschreibung geliefert.

Es ist aber keineswegs so, dass durch diese allgemeineren Theorien die Mechanik vollständig außer Kraft gesetzt wird. Vielmehr wird man feststellen, dass der Gültigkeitsbereich der Mechanik beschränkt ist. Wenn man zu Geschwindigkeiten übergeht, die klein verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit sind, gehen die Gesetze der relativistischen Mechanik wieder in die der klassischen Mechanik über. Analog verhält es sich, wenn makroskopische Körper im Rahmen der Quantenmechanik beschrieben werden sollen. Auch hier erhält man – ausgehend von einer quantenmechanischen Formulierung – die Gesetze der klassischen Mechanik.

1.6 Struktur des Bandes Mechanik

Lässt man einen Körper, z. B. einen Stein frei fallen, so ist bekannt, dass er nach der Zeit t einen gewissen Weg

$$x = \frac{g}{2}t^2 \tag{1.1}$$

zurückgelegt hat, wobei g die Erdbeschleunigung ist. Der Körper hat eine endliche Ausdehnung. Daher ist es eine durchaus berechtigte Fragestellung, welcher Punkt des Körpers denn nun die Strecke x zurückgelegt hat. Kandidaten gibt es hierfür beliebig viele. So könnten bei einer wenig sorgfältigen Betrachtung sowohl der Punkt P_1 als auch der Punkt P_2 in Abb. 1.1 infrage kommen.

Tatsächlich erweist sich aber der Schwerpunkt S des Körpers als die richtige Wahl. Wenn wir uns auf die Bewegung des Schwerpunkts konzentrieren, dann können wir von der räumlichen Ausdehnung des Körpers völlig absehen und so tun, als hätten wir einen punktförmigen Körper vorliegen, dessen Masse im Schwerpunkt vereinigt ist. Der Konjunktiv in diesem Satz bringt zum Ausdruck, dass wir den realen Körper durch ein Modell beschreiben. Dieses Modell nennt man in der Mechanik einen Massenpunkt.

Das klassische Beispiel für die Benutzung des Massenpunktmodells ist die Beschreibung der Planetenbewegung. Wir wissen natürlich, dass die Erde zu unserem Glück kein Massenpunkt ist, sondern einen Radius von rund 6000 km hat. Aber verglichen mit dem Radius der Umlaufbahn der Erde um die Sonne von rund 150 Millionen km ist dies ungefähr 0,004 %. Somit erscheint es durchaus gerechtfertigt, die Erde bei dieser Bewegung wenigstens näherungsweise als Massenpunkt zu betrachten.

Das Massenpunktmodell spielt nicht nur in der Mechanik eine grundlegende Rolle, sondern ist mit fundamentalen Problemen der Physik verbunden. Das Prinzip des Welle-Teilchen-Dualismus, dem wir in der Quantenmechanik begegnen wer-

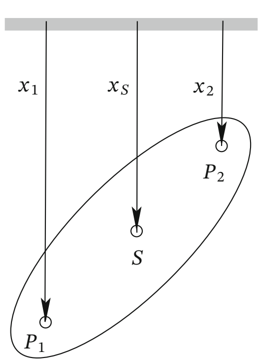


Abb. 1.1 Welcher Punkt des frei fallenden Körpers ist der richtige Bezugspunkt für (1.1)?

den, besagt, dass Materie entweder als Superposition von Wellen oder als System punktförmiger Teilchen beobachtet werden kann. Ausgedehnte starre Objekte stehen dagegen im Widerspruch zur heutigen Erkenntnis. Partikel, die bei der Interpretation aller Messungen als punktförmig beschrieben werden können, z. B. Elektronen und Quarks, werden als Elementarteilchen betrachtet. Alle anderen Partikel, z. B. Protonen, Atome oder Moleküle sind letztendlich aus solchen miteinander wechselwirkenden Elementarteilchen aufgebaut. Wir werden bei der Behandlung der Quantenmechanik in Band III dieser Lehrbuchreihe sehen, dass ein Elementarteilchen Träger von nur wenigen Eigenschaften ist, zu denen auch elektrische Ladungen und seine Ruhemasse gehören.

Bei der Behandlung der Bewegung eines Massenpunktes gibt es zwei grundsätzliche Fragestellungen. Zum Ersten kann man die Bahnkurve des Massenpunktes, etwa durch eine hinreichend genaue Vermessung, vorgeben und daraus Eigenschaften ableiten, die uns Informationen über die Ursache der Bewegung des Massenpunktes geben. Das ist die Aufgabe der *Kinematik*, die wir im nachfolgenden Kapitel behandeln werden.

Zum Zweiten wird aber der viel häufiger auftretende, umgekehrte Fall zu besprechen sein. Wir kennen die Ursache der Bewegung und fragen, wie die Bahnkurve des betrachteten Massenpunktes aussehen wird. Eine solche Fragestellung gehört zur Klasse der *Dynamik* und kann im Prinzip als Standardproblem der Theoretischen Mechanik bezeichnet werden. Wir werden uns im dritten und vierten Kapitel dieses Bandes eingehend mit der Dynamik einzelner Massenpunkte befassen.

Wenn wir uns nicht nur für die Bewegung der Erde um die Sonne, sondern die Bewegung aller Planeten im Sonnensystem interessieren, dann haben wir ein System von miteinander wechselwirkenden Massenpunkten vorliegen. Mit der geeigneten Verallgemeinerung der Theorie einzelner Massenpunkte auf Massenpunktsysteme werden wir uns im fünften Kapitel befassen. Natürlich kann man diese Theorie auch benutzen, um die mechanische Bewegung makroskopischer Körper, etwa des anfänglich diskutierten fallenden Steines zu beschreiben. In diesem Falle würde man sich den Stein aus vielen in Wechselwirkung stehenden elementaren Partikeln, etwa Atomen oder Molekülen zusammengesetzt denken, die alle den gleichen mechanischen Gesetzen unterworfen sind. Wir werden dann insbesondere feststellen, dass sich der Schwerpunkt dieses Systems so bewegt, als wäre die gesamte Masse aller Bestandteile des Steines im Schwerpunkt vereinigt.

Im sechsten und siebenten Kapitel werden wir uns mit fundamentalen Darstellungen der klassischen Theoretischen Mechanik befassen. Dabei wollen wir uns vor allem auf die Lagrange'sche und Hamilton'sche Formulierung der Mechanik konzentrieren. In den späteren Bänden dieser Lehrbuchreihe wird man erkennen, dass die hiermit verbundenen Prinzipien eine weit über die klassische Mechanik hinausgehende allgemeine Bedeutung haben.

Die Newton'sche Mechanik kennt keine obere Grenze für die Geschwindigkeit eines Massenpunktes. Tatsächlich ist aber keine Übertragung von Masse, Energie oder Informationen zwischen zwei Punkten mit einer Geschwindigkeit möglich, die größer als die Lichtgeschwindigkeit ist. Allein dieses fundamentale Naturgesetz führt zu einer völlig anderen Mechanik, deren Theorie mit der im letzten Kapitel die-

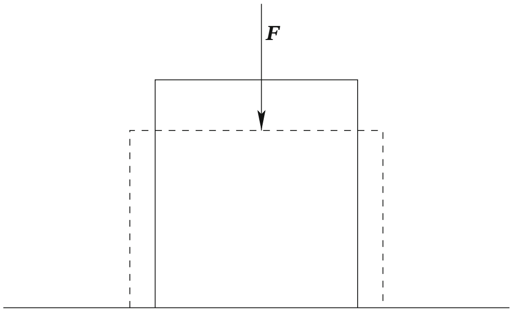


Abb. 1.2 Deformierbarer Körper: Unter dem Einfluss einer äußeren Kraft wird die Form des Körpers verändert.

ses Bandes dargestellten speziellen Relativitätstheorie beschrieben wird. Mit dieser Einstein'schen Mechanik werden die Erkenntnisse der in den vorangegangenen Kapiteln behandelten Newton'schen Mechanik nicht außer Kraft gesetzt, vielmehr erweist diese sich als ein Grenzfall, der seine volle Gültigkeit für Relativgeschwindigkeiten behält, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind.

In dynamischen Massenpunktsystemen können sich die einzelnen Massenpunkte nach wie vor relativ zueinander bewegen. Ein typisches Beispiel hierfür wären die Atome des fallenden Steines, die immer noch Schwingungsbewegungen relativ zueinander ausführen können. Tatsächlich sind aber diese Bewegungen im Vergleich zu den Abmessungen des Körpers oftmals von untergeordneter Bedeutung. In diesem Fall kann man das betreffende Objekt durch das Modell eines starren Körpers beschreiben. (Dieses Modell ist mit der endlichen Geschwindigkeit der Informationsausbreitung im Sinne der speziellen Relativitätstheorie nicht verträglich, aber diese Unverträglichkeit spielt für Geschwindigkeiten, die klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit sind, keine Rolle). In diesem Modell sind die Relativpositionen aller Massenpunkte zueinander unveränderlich. Damit kann das System nur noch globale Translations- und Rotationsbewegungen ausführen, während – sozusagen als äußeres Kennzeichen – die Form des betrachteten Objektes unverändert bleibt. Mit starren Körpern befassen wir uns im vorletzten Kapitel dieses Bandes.

Nehmen wir statt des Steines aber ein Stück Kunststoff (vgl. Abb. 1.2) und drücken wir mit einer Kraft $\boldsymbol{F}$ auf seine Oberfläche, so wird der Körper deformiert, und der gegenseitige Abstand der elementaren Massenpunkte dieses Körpers ändert sich. Wir werden in diesem Fall mit dem Modell des starren Körper keine gute Beschreibung des geschilderten Problems erreichen. Solche deformierbaren Körper, bei denen die Verformung nach Entlastung wieder zurückgeht, also eine elastische Deformation vorliegt, werden ebenfalls im Rahmen der Mechanik untersucht. Hier führt man anstelle der vielen Atome oder Moleküle ein deformierbares Kontinuum ein, das im Rahmen der Elastizitätstheorie behandelt wird. Diese Theorie war früher ein wesentlicher Bestandteil der klassischen Mechanik, wird aber heute eher als ein Kontinuumsgrenzfall der Festkörperphysik betrachtet.

Eine ähnliche Situation betrifft die Diskussion der Eigenschaften von Flüssigkeiten und Gasen auf der Modellebene des kontinuierlichen Mediums. Diese als Hydround Aerodynamik bezeichneten Gebiete der klassischen Mechanik werden heute allgemein als kontinuierlicher Grenzfall der Physik der kondensierten Materie verstanden, zumal für eine konsistente Beschreibung von Flüssigkeiten und Gasen auch thermodynamische Relationen benötigt werden.

Die mechanische Theorie von deformierbaren Festkörpern sowie von Flüssigkeiten und Gasen wird in dem vorliegenden Band nicht mehr betrachtet. Wir verweisen hier auf die umfangreich vorhandene Spezialliteratur.

1.7 Modellebenen der Theoretischen Mechanik

Bei der obigen Vorstellung der einzelnen Kapitel dieses Bandes haben wir bereits verschiedene modellhafte Darstellungen des gleichen Körpers erwähnt. So ist es sinnvoll, die Erde bei der Betrachtung der Umlaufbewegung um die Sonne als Massenpunkt zu betrachten, bei der Beschreibung ihrer Rotationsbewegung um die eigene Achse aber als einen ausgedehnten starren Körper anzusehen. Beide Modelle versagen dagegen bei der Untersuchung von Gezeiteneffekten oder der Bewegung der Materie im Erdinneren, wo man auf kontinuumsmechanische Konzepte zurückgreifen muss.

Ein ähnliches Beispiel für eine solche unterschiedliche Betrachtungsweise desselben Gegenstandes ist der fallende Körper aus Kunststoff. Solange wir uns für den zurückgelegten Weg des Schwerpunktes beim freien Fall interessieren, können wir den Körper als Massenpunkt betrachten. Interessieren wir uns für die Drehbewegung des Körpers während des Falles, dann können wir den Kunststoffkörper sehr gut als ein starres Objekt interpretieren. Wenn wir schließlich das Szenario des Aufschlags auf den Boden am Ende des freien Falls beschreiben wollen, dann müssen wir unser Objekt als einen deformierbaren Körper behandeln.

Aus diesen zwei Beispielen können wir Folgendes lernen: Je nach physikalischer Fragestellung wird man ein anderes, dem Problem möglichst adäquates Modell wählen. Welches Modell für die Behandlung eines Problems geeignet ist, wird in vielen Fällen keine triviale Entscheidung sein. Obwohl im Rahmen der theoretischen Mechanik die Modellebenen ziemlich gut klassifiziert sind, dürfen wir nicht vergessen, dass die verwendeten Modelle oft über einen langen historischen Zeitraum etabliert wurden und sehr viel empirische Erfahrung in sich vereinen. Die Entscheidung darüber, welches Modell für ein Problem am besten geeignet ist, kann durch keinen Algorithmus abgenommen werden. Wir kennen zwar eine ganze Reihe von empirischen Regeln, welche die Auswahl eines sinnvollen Modells erleichtern, aber letztendlich entscheiden Intuition und Erfahrung über das verwendete Modell.

Hat man sich auf ein Modell festgelegt, dann kann dieses auf mathematische Gleichungen abgebildet werden, die systematisch gelöst werden müssen und zuletzt die entsprechenden Antworten auf das mit dem Modell verbundene Problem liefern. Der Vergleich dieser auf theoretisch-mathematischem Weg gewonnenen Resultate mit der physikalischen Realität liefert uns dann weitere Kriterien über den Nutzen des verwendeten Modells. Bei diesem Vergleich ist es wichtig, sich zu erinnern, dass das Modell eine Idealisierung und damit eine Approximation der physikalischen Realität darstellt.

1.8 Lösung von Gleichungen

Mit der quantitativen Beschreibung des Modells durch mathematische Gleichungen sind wir an einem weiteren wichtigen Punkt angekommen, der typisch für die theoretische Beschreibung physikalischer Vorgänge ist. Wir wollen die hier auftretenden Probleme an einem einfachen Beispiel erläutern. Der zurückgelegte Weg beim freien Fall kann durch die Gl. (1.1) beschrieben werden.

Wie kommt man nun auf diesen Ausdruck? Gewöhnlich verwendet man das zweite Newton'sche Grundgesetz

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} \tag{1.2}$$

um die Bewegung eines Massenpunktes unter dem Einfluss einer Kraft zu bestimmen. Dabei bezeichnet m die träge Masse des Körpers, $\boldsymbol{a}$ seine Beschleunigung und $\boldsymbol{F}$ die auf ihn wirkende Kraft. Die Kraft beim freien Fall ist die Schwerkraft

$$\boldsymbol{F} = m'\boldsymbol{g} \tag{1.3}$$

mit der Erdbeschleunigung $\boldsymbol{g}$, wobei die hier auftretende Masse m' die schwere Masse ist. Die bisherige experimentelle Erfahrung liefert uns die Gleichheit beider Massen, $m = m'$.

Bis zu diesem Punkt haben wir verschiedene, experimentell gesicherte Modellannahmen eingeführt: Wir haben die Masse des fallenden Körpers in einem Punkt vereinigt, das zweite Newton'sche Axiom als Grundlage der Bewegung herangezogen, die hierin auftretende Kraft durch den mathematischen Ausdruck für die Schwerkraft ersetzt und die Gleichheit von träger und schwerer Masse verwendet.

Die resultierende Gleichung kann jetzt einer geeigneten mathematischen Behandlung unterzogen werden. Dazu orientiert man zunächst die Ortskoordinate x in Fallrichtung. Die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems oder allgemeiner einer geeigneten Darstellung des Problems ist eine rein mathematische Fragestellung. Sie dient dazu, möglichst einfache Gleichungen zu erhalten, ändert aber nicht den physikalischen Inhalt. Auch in einem anderen Koordinatensystem kann unser Problem gelöst werden, aber wahrscheinlich mit einem höheren mathematischen Aufwand.

Als Ergebnis der Festlegung des Koordinatensystems erhalten wir eine eindimensionale Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x}(t) = mg \tag{1.4}$$

aus der wir zunächst wegen der sinnvollen Forderung $m > 0$ die Masse eliminieren können:

$$\ddot{x}(t) = g \tag{1.5}$$

Das Ergebnis ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung, die man auch in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dot{x}(t) = g \tag{1.6}$$

schreiben kann und die jetzt durch eine zweifache Integration gelöst wird. Wir erhalten nach der ersten Integration

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \mathrm{d}\dot{x}' = \int_{t_0}^{t} g\,\mathrm{d}t' \tag{1.7}$$

$$\dot{x}(t) - \dot{x}_0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) - \dot{x}_0 = g(t - t_0) \tag{1.8}$$

wobei $\dot{x}_0$ eine noch offene Konstante und t_0 die Anfangszeit sind. Die zweite Integration führt uns dann auf das Resultat

$$\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x' - \dot{x}_0 \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t' = g \int_{t_0}^{t} (t' - t_0)\,\mathrm{d}t' \tag{1.9}$$

$$x(t) - x_0 - \dot{x}_0(t - t_0) = \frac{g}{2}(t - t_0)^2 \tag{1.10}$$

$$x(t) = \frac{g}{2}(t - t_0)^2 + \dot{x}_0(t - t_0) + x_0 \tag{1.11}$$

Dieser Ausdruck sieht offensichtlich ganz anders aus als (1.1). Es handelt sich um ein Polynom zweiter Ordnung in der Zeit, das neben der Schwerebeschleunigung g noch eine Anzahl weiterer Parameter enthält, die wir allein aus dem mathematischen Lösungsverfahren erhielten, aber mit mathematischen Methoden nicht weiter spezifizieren können. Die Ursache für das Auftreten dieser neuen Terme liegt in der unvollständigen mathematischen Formulierung des Problems. Genau genommen besteht unser physikalisches Problem nicht nur aus der Bewegungsgleichung (1.5), sondern erfordert zu seiner vollständigen Formulierung noch die Angabe von Anfangsbedingungen. Setzen wir in unsere allgemeine Lösung (1.11) die Anfangszeit $t = t_0$ ein, dann erhalten wir die Anfangsposition

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.12}$$

und wenn wir (1.11) nach der Zeit differenzieren bzw. (1.8) verwenden und anschließend wieder die Anfangszeit einsetzen, erhalten wir die Anfangsgeschwindigkeit

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0 \tag{1.13}$$

Die zunächst freien Größen $\dot{x}_0$ und x_0 sind also Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsort des Massenpunktes beim freien Fall. Wir erhalten unser ursprüngliches Ergebnis (1.1), wenn wir die Anfangszeit $t_0 = 0$ wählen, den Ursprung unseres Koordinatensystems auf den Startpunkt legen und schließlich den Anfangszustand als ruhend annehmen.

Aus diesem sehr einfachen Beispiel ergeben sich zwei wichtige Schlussfolgerungen: Einerseits liefert die mathematische Behandlung physikalischer Probleme ganze Klassen von Lösungen, die im Prinzip alle realisierbar sind. Damit wird der allgemeine Charakter vieler physikalischer Bewegungsgleichungen deutlich.

Auf der anderen Seite enthält dieses Beispiel auch eine Warnung, die den Umgang mit theoretischen Ergebnissen betrifft. Man sollte sich immer verdeutlichen, unter welchen Bedingungen ein Resultat entstanden ist. Offenbar ist (1.1) eine spezielle Lösung des Fallgesetzes, die z. B. auf den freien Fall mit einer von null verschiedenen Anfangsbedingung nicht anwendbar ist.