

JÜRGEN BRATER



MATHE MAGIC

Spannendes und Kurioses
aus der Welt der Zahlen

Mit zahlreichen Aufgaben zum
Denken, Rechnen und Knobeln

YES

$\pi = 3.1415926$

JÜRGEN BRATER

MATHE
MAGIC

Originalausgabe

2. Auflage 2023

© 2022 by Yes Publishing – Pascale Breitenstein & Oliver Kuhn GbR

Türkenstraße 89, 80799 München

info@yes-publishing.de

Alle Rechte vorbehalten.

Redaktion: Rainer Weber

Illustrationen: S. 72: Peter Hermes Furian/Shutterstock.com,

S. 115: VTT Studio/Shutterstock.com

Umschlaggestaltung: Ivan Kurylenko (hortasar covers)

Layout und Satz: Daniel Förster

Druck: CPI

Printed in the EU

ISBN Print 978-3-96905-178-8

ISBN E-Book (EPUB, Mobi) 978-3-96905-180-1

ISBN E-Book (PDF) 978-3-96905-179-5

JÜRGEN BRATER

MATHE MAGIC

Spannendes und Kurioses
aus der Welt der Zahlen

YES

INHALT

| | |
|---|----|
| Zahlen, Zahlen, Zahlen ... | 9 |
| Unheimliche Verdoppelung | 10 |
| Unvorstellbar große und kleine Zahlen | 11 |
| Immer wieder 37 | 14 |
| Mathematiker und Physiker | 15 |
| Die geheimnisvolle 1089 | 16 |
| Primzahlen | 17 |
| 36: die kleinste Summe dreier Kubikzahlen | 20 |
| Mersenne-Primzahlen | 20 |
| Eine ganz besondere Primzahl | 21 |
| Die vertrackte 196 | 21 |
| Ein ganz spezielles Palindrom | 23 |
| Mirpzahlen | 24 |
| Quadrat- und Kubikzahlen | 25 |
| Verblüffende Quadratzahlenrechnung | 27 |
| Einfach auszurechnen: das Quadrat einer Zahl mit der Endziffer 5 | 27 |
| Vollkommene Zahlen | 28 |
| Abundante und defiziente Zahlen | 29 |
| Befreundete Zahlen | 30 |
| Fermats großer Satz | 31 |
| Das 5000-Spiel | 33 |
| Logik besiegt Angst | 34 |
| Das Zahlengenie | 34 |

| | |
|---|----|
| Mal selbst ein Rechengenie sein | 36 |
| Teilbarkeitsregeln | 37 |
| 0, 1 und 81 haben eine exklusive Gemeinsamkeit | 40 |
| Fröhliche Zahlen | 41 |
| Die einzigartige 69 | 42 |
| Dreieckige Zahlen | 42 |
| Die besondere 36 | 45 |
| Immer wieder eine Dreieckszahl | 45 |
| Die geniale Null | 46 |
| Darum darf man nicht durch 0 teilen | 48 |
| Ganz klar: ein Mathematiker! | 49 |
| Die glückliche 7 | 50 |
| Gedachte Zahl ermitteln | 51 |
| So zählten die alten Römer | 52 |
| Erst denken, dann rechnen! | 54 |
| Die erstaunliche 9 | 56 |
| Das fehlende Jahr | 57 |
| Die 1 kommt als Anfangsziffer fast sieben Mal so oft vor wie die 9 | 58 |
| Die einzigartige 1 | 60 |
| Milchmädchenrechnung | 60 |
| Verblüffender Trick | 62 |
| Noch ein verblüffender Trick | 63 |
| Die mythisch-göttliche 3 | 64 |
| Die Kaprekar-Konstante | 65 |
| Endliche und unendliche Reihen | 67 |
| Dritte Potenz und Quersumme | 69 |

| | |
|------------------------------------|-----|
| Stimmt immer | 70 |
| Der Vier-Farben-Satz | 71 |
| Die fünf platonischen Körper | 72 |
| Immer wieder Quadratzahlen | 73 |
| Geburtstag | 74 |
| Der Sonnenkönig und der Dichter | 75 |
| Am selben Tag Geburtstag | 76 |
| Wie alt? | 78 |
| So rechneten die alten Babylonier | 79 |
| Und so rechneten die alten Ägypter | 80 |
| Apropos multiplizieren | 83 |
| Noch etwas zur 6 | 83 |
| Und so rechnen Computer | 84 |
| Falsche Richtung | 86 |
| Immer wieder 6 | 87 |
| So viel Reis und Bakterien | 88 |
| 37 – eine einzigartige Zahl | 89 |
| Seil um den Äquator | 90 |
| 7 Mal ist die Grenze | 91 |
| Hauchdünn | 92 |
| Bemerkenswerte Multiplikationen | 94 |
| Durchaus logisch | 95 |
| Der indische Zahlenvirtuose | 97 |
| Bemerkenswerte Potenz | 99 |
| Die besonderen Potenzen der 18 | 100 |
| Doppelt so warm? | 100 |
| Die spannende 27 | 101 |

| | |
|--|-----|
| Das Collatz-Problem | 102 |
| Cäsar und der Kalender | 104 |
| Das schwarze Schaf | 105 |
| Sudoku | 107 |
| Gedanken vor dem Aufzug | 110 |
| Müheles Zahlen merken | 110 |
| Was ist 2 mal 2? | 113 |
| Fibonacci und die Kaninchen | 114 |
| Zahlen, die Unglück bringen | 117 |
| Ganz einfach: Multiplikation mit 11 | 119 |
| Die Crux mit den Hexominos | 120 |
| Die Kreiszahl Pi | 121 |
| Mathematik-Unterricht an verschiedenen Schultypen .. | 123 |
| Schnapszahl mal 9 | 125 |
| Magische Quadrate | 126 |
| Goethes Hexeneinmaleins | 128 |
| Der Goldene Schnitt | 129 |
| Ingenieur und Mathematiker | 131 |
| Die erotische Zahl 218.593 | 132 |
| Die vertrackte Zahl 142.857 | 133 |
| Zitate über Mathematik und Mathematiker | 134 |
| | |
| Lösungen | 137 |

ZAHLEN, ZAHLEN, ZAHLEN ...

In diesem Buch geht es um Zahlen und das, was man damit anfangen kann. Unter diesen Zahlen gibt es aber vielfältige Unterschiede, oder anders gesagt: Sie lassen sich mehreren Bereichen oder Mengen zuordnen. In erster Linie sind das:

- die natürlichen Zahlen
- die ganzen Zahlen
- die rationalen Zahlen
- die reellen Zahlen

Dabei gilt, dass jede der genannten Zahlenmengen Teil der nächstgrößeren beziehungsweise vollkommen in dieser enthalten ist. Betrachten wir die einzelnen Gruppen einmal näher.

Die *natürlichen Zahlen* sind diejenigen, die wir üblicherweise zum Zählen verwenden, also 1, 2, 3, 4, 5 und so weiter. Wobei, je nach Definition, auch die 0 (Null) dazugezählt wird. Dagegen gehören negative oder Kommazahlen sowie Brüche nicht dazu.

Nimmt man zu den natürlichen noch die negativen Zahlen, also -1 (minus 1), -2 , -3 , -4 , -5 etc. dazu, hat man es mit *ganzen Zahlen* zu tun. Wie der Name schon sagt, beinhaltet diese Zahlenmenge keine Brüche oder Zahlen mit Nachkommastellen.

Die nächstgrößere Zahlenmenge ist diejenige der *rationalen Zahlen*. Sie umfasst auch noch die Brüche ganzer Zahlen. Diese lassen sich entweder in der Form Zähler/Nenner (z. B.: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{13}{58}$) oder als Nachkommazahlen (z. B.: 0,5; 1,33; 44,3885) darstellen, sofern diese in der Anzahl begrenzt sind (z. B.: 34, 575.789) oder sich periodisch wiederholen (z. B.: $\frac{1}{3} = 0,3333333333333333 \dots$ oder $\frac{6}{11} = 0,5454545454 \dots$)

Womit wir schließlich zu den *reellen Zahlen* kommen. Das sind sämtliche Zahlen, die man aus dem Mathematikunterricht in der Schule kennt. Neben den rationalen gehören dazu auch noch die *irrationalen Zahlen*, die dadurch gekennzeichnet sind, dass sie sich nicht als Bruch von ganzen Zahlen schreiben lassen. Sie enthalten unendlich viele Nachkommastellen, können also niemals vollkommen niedergeschrieben werden. Im Gegensatz zu den unendlichen rationalen Zahlen weisen die Nachkommastellen hier aber keine sich ständig wiederholenden Zahlenfolgen (Perioden) auf. Die berühmteste irrationale Zahl ist wohl die Kreiszahl Pi ($\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971\dots$, siehe Seite 121).

Nach dieser kleinen Einführung folgt hier schon das erste von vielen kniffligen Rechenrätseln und Denksportaufgaben in diesem Buch. Man erkennt sie daran, dass sie jeweils in eine grau unterlegte Box eingebettet sind. Die Lösungen findest du ab Seite 137.

Kleiner als die Hälfte

Welche ganze Zahl ist um 2 kleiner als ihre Hälfte?

UNHEIMLICHE VERDOPPELUNG

Nimm eine beliebige dreistellige Zahl und multipliziere sie mit 7. Das Ergebnis multiplizierst du mit 11 und das Resultat noch einmal mit 13. Plötzlich steht die Zahl zweimal da.

Zwei Beispiele:

123

$$123 \times 7 = 861$$

$$861 \times 11 = 9471$$

$$9471 \times 13 = 123.123$$

238

$$238 \times 7 = 1666$$

$$1666 \times 11 = 18.326$$

$$18.326 \times 13 = 238.238$$

Zahlenwert gleich Buchstabenzahl

Im Deutschen gibt es nur eine einzige Zahl, deren Wert mit der Zahl der Buchstaben übereinstimmt. Welche ist das?

UNVORSTELLBAR GROSSE UND KLEINE ZAHLEN

Es gibt Zahlen, die sind so ungeheuer groß, dass man sie sich auch mit noch so viel Anstrengung und Fantasie beim besten Willen nicht vorstellen kann. Man denke etwa an die Anzahl der Sandkörner in der Sahara, der Ameisen in Europa oder der Moleküle im menschlichen Körper. Für derartige Riesenzahlen gibt es spezielle Bezeichnungen, doch die erleichtern die Vorstellung auch nicht wesentlich. Die wichtigsten sind in nachfolgender Tabelle aufgelistet,

dazu die üblichen Abkürzungen, von denen viele die ersten vier von Computerspeichern her kennen. Daneben enthält die Tabelle noch die in der Mathematik übliche Schreibweise in Potenzen.

| Zahl | Bezeichnung | Abkürzung | Potenz |
|-----------------|-------------|-----------|-----------|
| 1 mit 3 Nullen | Tausend | Kilo | 10^3 |
| 1 mit 6 Nullen | Million | Mega | 10^6 |
| 1 mit 9 Nullen | Milliarde | Giga | 10^9 |
| 1 mit 12 Nullen | Billion | Tera | 10^{12} |
| 1 mit 15 Nullen | Billiarde | Peta | 10^{15} |
| 1 mit 18 Nullen | Trillion | Exa | 10^{18} |
| 1 mit 21 Nullen | Trilliarde | Zetta | 10^{21} |
| 1 mit 24 Nullen | Quadrillion | Yotta | 10^{24} |

Selbstverständlich gibt es noch weitaus größere Zahlenbezeichnungen, etwa *Septillion* für eine 1 mit 42 Nullen oder *Undezilliarde* für eine 1 mit 69 Nullen. Doch die verwendet kein Mensch, weil es bei derart gigantischen Zahlen erheblich praktischer ist, sie in Potenzen zu schreiben. Dabei gibt die Hochzahl der 10 die Anzahl der Nullen hinter der 1 an. Anstelle von 9.000.000 (9 Millionen) schreibt man also einfach 9×10^6 . Der Vorteil dieser Darstellungsweise wird umso offensichtlicher, je größer die Zahl ist. 15 Quadrillionen etwa sind in Ziffern geschrieben eine 15 mit 24 Nullen, da schreibt sich

doch 15×10^{24} wesentlich schneller. Außerdem vermeidet man so die erhebliche Gefahr, sich bei der Anzahl der Nullen zu verzählen.

Der entscheidende Vorteil der Potenzen ist jedoch, dass sich mit ihnen sehr einfach rechnen lässt: Beim Multiplizieren muss man nur die Grundzahlen malnehmen und die Hochzahlen addieren. So ist zum Beispiel 12 Milliarden mal 5 Septilliarden dasselbe wie $12 \times 10^9 \times 5 \times 10^{45}$, was – leicht auszurechnen – 60×10^{54} (60 Nonillionen) ergibt.

Übrigens gibt es derart große Zahlen noch gar nicht sehr lange. Bis Anfang des 13. Jahrhunderts war schon bei 100.000 Schluss. Mehr benötigte man schlichtweg nicht. 1270 tauchte dann in Italien zum ersten Mal die Million auf (da *mille* im Italienischen für 1000 steht und die Endung *-one* so viel bedeutet wie groß oder mächtig, ist eine Million, genau genommen, nichts weiter als eine große Tausend). Danach dauerte es mehr als 200 Jahre, bis der Mathematiker Nicolas Chuquet im Jahr 1484 vorschlug, für das Millionenfache einer bereits benannten Zahl jeweils einen neuen Begriff einzuführen. So entstanden die Billion für eine Million mal eine Million und die Trillion für eine Million mal eine Billion.

Aber natürlich gibt es neben den unvorstellbar großen auch unvorstellbar kleine Zahlen. Für diese existieren spezielle Wortvorsätze, von denen dir sicher *Nano* für *ein Milliardstel* geläufig ist. In der nachfolgenden Tabelle sind die bekanntesten derartigen Vorsätze sowie die zugehörigen Potenzen und Abkürzungen angegeben. Diese Abkürzungen setzt man vor die entsprechende Maßeinheit. Misst also etwa ein Virus ein Milliardstel Meter, so ist er 1 nm (1 Nanometer) groß.

| Bezeichnung | Vorsatz | Potenz | Abkürzung |
|----------------|---------|------------|-----------|
| Hundertstel | Zenti | 10^{-2} | c |
| Tausendstel | Milli | 10^{-3} | m |
| Millionstel | Mikro | 10^{-6} | μ |
| Milliardenstel | Nano | 10^{-9} | n |
| Billionstel | Piko | 10^{-12} | p |
| Billiardenstel | Femto | 10^{-15} | f |

Nur drei Ziffern

Welche ist die höchste Zahl, die man mit drei Ziffern ausdrücken kann?

IMMER WIEDER 37

Wähle eine dreistellige Zahl mit drei identischen Ziffern (z. B.: 444). Bilde daraus die Quersumme ($4 + 4 + 4 = 12$) und teile die Zahl dadurch ($444 : 12$). Du bekommst immer dasselbe Ergebnis: 37.

Im Schneckentempo

Eine Weinbergschnecke fällt in einen 10 Meter tiefen Brunnen. Sofort macht sie sich daran, wieder herauszukommen, und beginnt, die senkrechte Wand hinaufzuklettern. Dabei schafft sie tagsüber 3 Meter, rutscht aber in der Nacht, während sie schläft, jedes Mal 2 Meter zurück. Nach wie vielen Tagen ist sie oben?

MATHEMATIKER UND PHYSIKER

Eine Gruppe Mathematiker und eine Gruppe Physiker fahren mit dem Zug zu einer Tagung. Während jeder Physiker eine eigene Fahrkarte gekauft hat, besitzen die Mathematiker nur eine einzige Karte. Plötzlich ruft einer der Mathematiker: »Der Schaffner kommt!«, woraufhin sich alle Mathematiker in eine Zugtoilette zwängen. Der Schaffner kontrolliert zuerst die Physiker, sieht dann, dass das WC besetzt ist, und klopft an die Tür: »Die Fahrkarte bitte!« Einer der Mathematiker schiebt die Fahrkarte unter der Tür durch, und der Schaffner zieht zufrieden ab.

Auf der Rückfahrt beschließen die Physiker, denselben Trick anzuwenden, und kaufen für die ganze Gruppe nur eine einzige Karte. Verwundert registrieren sie, dass die Mathematiker diesmal überhaupt kein Ticket lösen. Während der Fahrt ruft wieder einer: »Der Schaffner kommt!« Sofort stürzen die Physiker in das eine WC, während sich die Mathematiker gemächlich auf den Weg zu einem anderen machen. Bevor sich der Letzte von ihnen