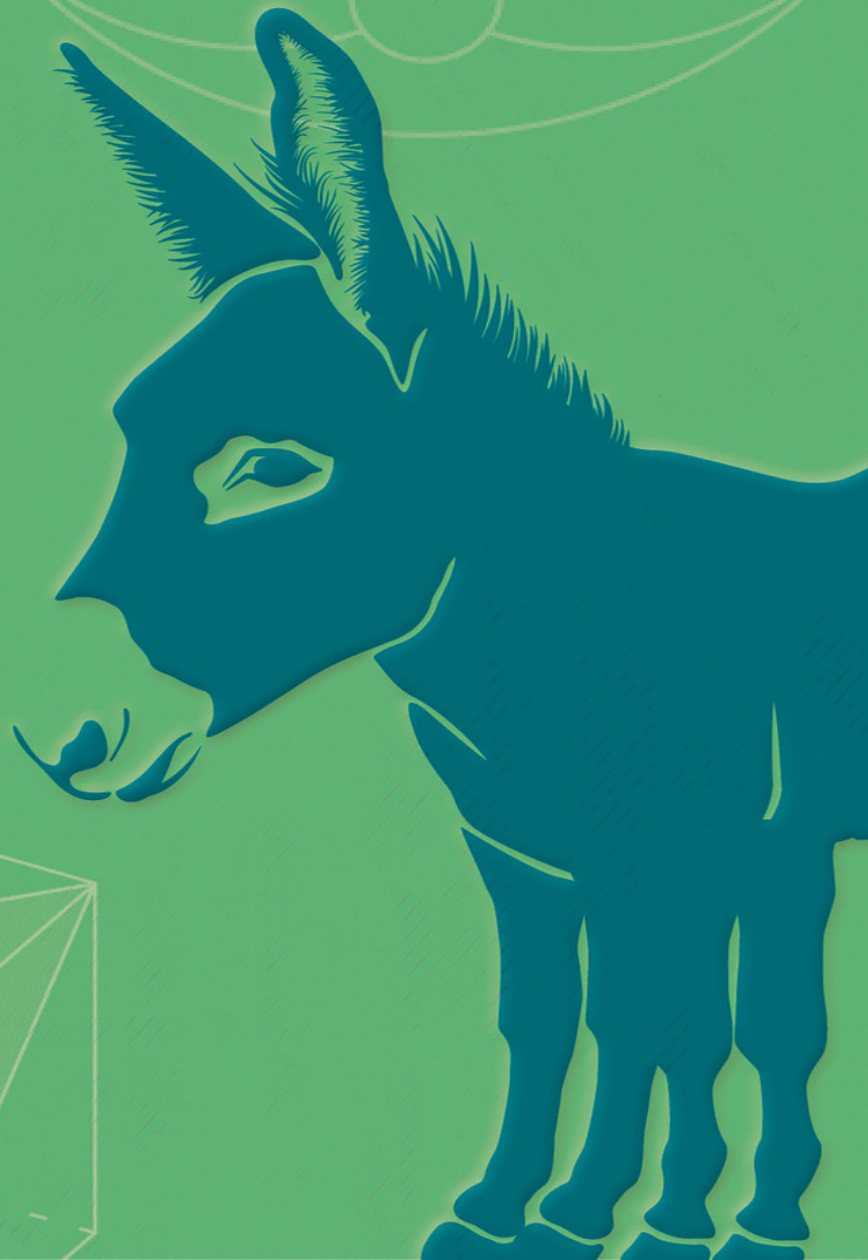
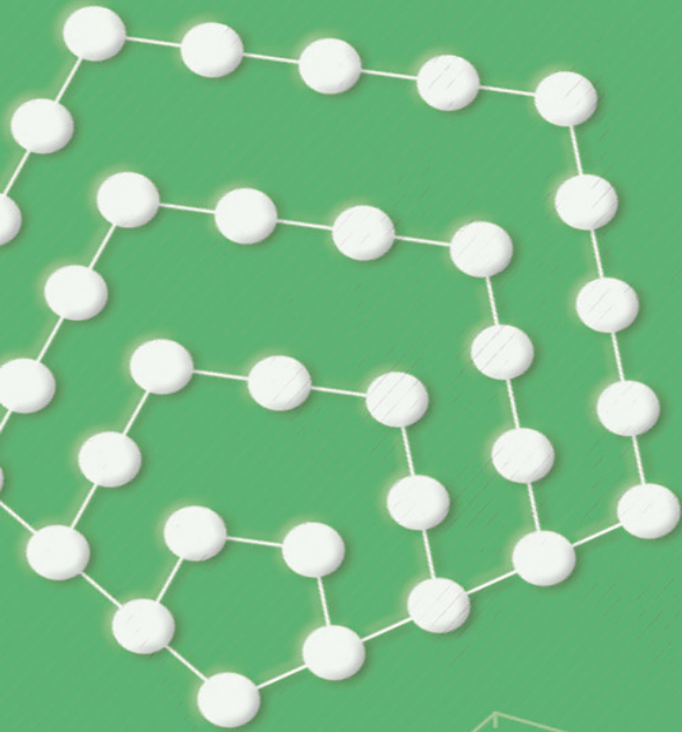




Heinrich Hemme

Der 12-beinige Esel

93 mathematische Rätsel
mit ausführlichen Lösungen



Heinrich Hemme

Der zwölfbeinige Esel

93 mathematische Rätsel
mit ausführlichen Lösungen

Anaconda

Der Inhalt dieses E-Books ist urheberrechtlich geschützt und enthält technische Sicherungsmaßnahmen gegen unbefugte Nutzung. Die Entfernung dieser Sicherung sowie die Nutzung durch unbefugte Verarbeitung, Vervielfältigung, Verbreitung oder öffentliche Zugänglichmachung, insbesondere in elektronischer Form, ist untersagt und kann straf- und zivilrechtliche Sanktionen nach sich ziehen.

Sollte diese Publikation Links auf Webseiten Dritter enthalten, so übernehmen wir für deren Inhalte keine Haftung, da wir uns diese nicht zu eigen machen, sondern lediglich auf deren Stand zum Zeitpunkt der Erstveröffentlichung verweisen.

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet unter <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© 2022 by Anaconda Verlag, einem Unternehmen
der Penguin Random House Verlagsgruppe GmbH,
Neumarkter Straße 28, 81673 München
Alle Rechte vorbehalten.
Umschlagmotiv: [shutterstock.com](https://www.shutterstock.com) / Polela
Umschlaggestaltung: www.katjaholst.de
Satz und Layout: InterMedia – Lemke e. K., Heiligenhaus
ISBN 978-3-641-29674-2
V001
www.anacondaverlag.de

Inhalt

Vorwort

Aufgaben

1. Die Rechtecke des Rechtecks
2. Rot, grün, schwarz
3. Der hellsehende Matrose
4. Zehn Behauptungen
5. Die Wegfläche
6. Das höchstmagische Quadrat
7. Polygonalzahlen
8. Pyramidenzahlen
9. Tetraeder und Oktaeder
10. Seilspiralen
11. Geburtstage
12. Das Dekomino
13. Autorennen auf dem Frensdorfring
14. Der gespiegelte Lichtstrahl
15. Der Weg des Läufers
16. Die Winkel des Würfeldreiecks
17. Die Winkel eines weiteren Würfeldreiecks
18. Vierfachbuchstaben
19. Quadrieren durch Zerschneiden
20. 71 und 1
21. Das Quadrat aus Rechtecken

22. Vier, fünf, sechs
23. Achtecke
24. Dritte Wurzel aus 3
25. Ordnen der Spielsteine
26. Die Halbierung der 12
27. Eine seltsame Quadratzahl
28. Das Bierdeckelquadrat
29. Trigonale und tetragonale Pyramiden
30. Die Gläserreihe
31. Dreiecke am Quadrat
32. Das Streichholzviereck
33. Der Zufallsweg auf dem Würfel
34. Reihen- und Spaltenprodukt
35. Drei Streichholzgleichungen
36. Geburtstag im Zug
37. Korrigieren durch Umordnen
38. Kreuzzahlrätsel
39. Schachbrettbedeckung
40. Drei Spielkarten
41. Die Reihe der Quadrate
42. Die zweite Reihe der Quadrate
43. Die englische Gleichung
44. Das T-Puzzle
45. Das Trapezpuzzle
46. Münzen
47. Eine fehlerhafte Streichholzgleichung
48. Eine zweite fehlerhafte Streichholzgleichung
49. Eine dritte fehlerhafte Streichholzgleichung
50. Die einsame Acht

51. Ein unwahrscheinlicher Fund
52. Der einsame Turm
53. Neun Ziffern
54. Das Quadrat im Quadrat
55. Das Achteck im Quadrat
56. Ein zweites Achteck im Quadrat
57. Eine ungewöhnliche Zahlenfolge
58. Der gefälschte Würfel
59. Eine kuriose Addition
60. Das Viertel der Damen
61. Halbmagische Kalenderquadrate
62. Das Frensdorfer Telefonnetz
63. Dreieck, Sechseck und Kreis
64. Der Schwarz-Weiß-Würfel
65. Eine sich selbst beschreibende Zahlenreihe
66. Meister Horas Zeitwürfel
67. Fünf Kreise im Quadrat
68. Eine seltsame Summe
69. Krösus' arme Töchter
70. Eine Buchstabenreihe
71. Sternenhimmel
72. Das Tangramhaus
73. Magische Kreise
74. Bunte Würfel
75. Streichholzflächen
76. Die Flussüberquerung
77. Eine zweite Fluss-überquerung
78. Wem gehört der Fisch?
79. Spuren im Schnee

80. Linealgeometrie
81. Spiegeln durch Zerschneiden
82. Eine seltsame Schwalbenschwanzverbindung
83. Regelmäßig schneidbare Polyeder
84. Eine Zahlenreihe
85. Der Kokosnusshandel
86. Das Toasterproblem
87. Vom Pik zum Herz
88. Elfmal die Sechs
89. Pandigitale Zeiten
90. Falten eines Würfels
91. Polyamanten
92. Die defekte Waage
93. Die beiden Quadrate

Lösungen

1. Die Rechtecke des Rechtecks
2. Rot, grün, schwarz
3. Der hellsehende Matrose
4. Zehn Behauptungen
5. Die Wegfläche
6. Das höchstmagische Quadrat
7. Polygonalzahlen
8. Pyramidenzahlen
9. Tetraeder und Oktaeder
10. Seilspiralen
11. Geburtstage
12. Das Dekomino
13. Autorennen auf dem Frensdorfring

14. Der gespiegelte Lichtstrahl
15. Der Weg des Läufers
16. Die Winkel des Würfeldreiecks
17. Die Winkel eines weiteren Würfeldreiecks
18. Vierfachbuchstaben
19. Quadrieren durch Zerschneiden
20. 71 und 1
21. Das Quadrat aus Rechtecken
22. Vier, fünf, sechs
23. Achtecke
24. Dritte Wurzel aus 3
25. Ordnen der Spielsteine
26. Die Halbierung der 12
27. Eine seltsame Quadratzahl
28. Das Bierdeckelquadrat
29. Trigonale und tetragonale Pyramiden
30. Die Gläserreihe
31. Dreiecke am Quadrat
32. Das Streichholzviereck
33. Der Zufallsweg auf dem Würfel
34. Reihen- und Spaltenprodukt
35. Drei Streichholzgleichungen
36. Geburtstag im Zug
37. Korrigieren durch Umordnen
38. Kreuzzahlrätsel
39. Schachbrettbedeckung
40. Drei Spielkarten
41. Die Reihe der Quadrate
42. Die zweite Reihe der Quadrate

43. Die englische Gleichung
44. Das T-Puzzle
45. Das Trapezpuzzle
46. Münzen
47. Eine fehlerhafte Streichholzgleichung
48. Eine zweite fehlerhafte Streichholzgleichung
49. Eine dritte fehlerhafte Streichholzgleichung
50. Die einsame Acht
51. Ein unwahrscheinlicher Fund
52. Der einsame Turm
53. Neun Ziffern
54. Das Quadrat im Quadrat
55. Das Achteck im Quadrat
56. Ein zweites Achteck im Quadrat
57. Eine ungewöhnliche Zahlenfolge
58. Der gefälschte Würfel
59. Eine kuriose Addition
60. Das Viertel der Damen
61. Halbmagische Kalenderquadrate
62. Das Frensdorfer Telefonnetz
63. Dreieck, Sechseck und Kreis
64. Der Schwarz-Weiß-Würfel
65. Eine sich selbst beschreibende Zahlenreihe
66. Meister Horas Zeitwürfel
67. Fünf Kreise im Quadrat
68. Eine seltsame Summe
69. Krösus' arme Töchter
70. Eine Buchstabenreihe
71. Sternenhimmel

72. Das Tangramhaus
73. Magische Kreise
74. Bunte Würfel
75. Streichholzflächen
76. Die Flussüberquerung
77. Eine zweite Fluss-überquerung
78. Wem gehört der Fisch?
79. Spuren im Schnee
80. Linealgeometrie
81. Spiegeln durch Zerschneiden
82. Eine seltsame Schwalbenschwanzverbindung
83. Regelmäßig schneidbare Polyeder
84. Eine Zahlenreihe
85. Der Kokosnusshandel
86. Das Toasterproblem
87. Vom Pik zum Herz
88. Elfmal die Sechs
89. Pandigitale Zeiten
90. Falten eines Würfels
91. Polyamanten
92. Die defekte Waage
93. Die beiden Quadrate

Vorwort der ersten Auflage

Wie viele Beine hat ein Esel? Vier? Nein! Ein Esel hat vorne zwei Beine, hinten zwei Beine, rechts zwei Beine, links zwei Beine und an jeder Ecke ein Bein, insgesamt also zwölf Beine.

Jede Teilantwort auf diese Scherzfrage ist offensichtlich richtig, nur die Schlussfolgerung, dass die Summe der einzelnen Beinzahlen die Gesamtzahl der Beine eines Esels ergibt, ist genauso offensichtlich falsch.

Natürlich ist das Zählen der Beine eines Esels denkbar einfach und der Fehler in der Scherzaufgabe leicht zu erkennen und zu korrigieren. Ganz anders ist dies jedoch bei manchen Aufgaben dieses Buches, in denen Rechtecke, Punkte, Kugeln, Tetraeder oder Oktaeder gezählt werden sollen. Hier wird das Zählen zur Kunst. Tatsächlich ist es bei den Problemen häufig am einfachsten, die Figuren so zu zählen wie die Eselbeine: Man berechnet bestimmte Teilsummen und addiert sie. Dann jedoch überlegt man sich, welche Figuren man mehrfach gezählt hat und zieht diese wieder ab.

In diesem Buch sind 93 Aufgaben aus der Unterhaltungsmathematik versammelt. Sie stammen aus verschiedensten Bereichen der Mathematik: Aus der Algebra, der Zahlentheorie, der Geometrie, der Topologie, der Graphentheorie und der Logik. Doch für alle Probleme reicht die Schulmathematik aus. Manche Aufgaben sind sogar nur mathematische Scherze. Die Aufgaben sind weder thematisch noch nach dem Schwierigkeitsgrad geordnet, sondern stehen kunterbunt durcheinander. Man weiß deshalb nie, was einen bei der nächsten Aufgabe erwartet.

Aufgaben aus der Unterhaltungsmathematik haben etwas mit Witzen gemeinsam: Natürlich hat sich jeden Witz und jede Denksportaufgabe einmal jemand ausgedacht, aber dieser Schöpfer gerät sofort in Vergessenheit. Witze und Denksportaufgaben gehen ohne ihre Eltern in die Welt hinaus, und kaum jemand weiß, wie alt sie sind und woher sie stammen.

Ich habe mich in diesem Buch bemüht, die Geschichte der Unterhaltungsmathematik ein wenig zurückzuverfolgen, und bei allen Aufgaben die älteste mir bekannte Quelle angegeben. Natürlich bin ich mir im Klaren darüber, dass ich dennoch wahrscheinlich nur in den wenigsten Fällen die Originalquelle entdeckt haben werde. Im Grunde sagen meine Quellenangaben nur etwas über das Mindestalter der Probleme aus.

Ein zweites Problem bei der Altersbestimmung ist, dass die Probleme immer wieder verändert werden. Manchmal werden sogar zwei Probleme zu einem einzigen zusammengesetzt. Wer ist dann der Erfinder des Problems? Derjenige, der das ursprüngliche Problem, oder derjenige, der die aktuelle Version entworfen hat? Ich habe mich dafür entschieden, bei kleineren Veränderungen den Autor der ursprünglichen und bei großen Änderungen den Autor der aktuellen Version zu nennen. Dabei bleibt die Entscheidung, ob eine Veränderung groß oder klein ist, natürlich etwas willkürlich.

Ich wäre jedem Leser sehr dankbar, der mir ältere Literaturstellen der Aufgaben nennen würde.

Ich danke Helmut Postl aus Wien, Franz-Josef Schulte aus Essen und Torsten Sillke aus Frankfurt für die Hilfe bei diesem Buch.

Heinrich Hemme
Roetgen, 2005

Vorwort zur zweiten Auflage

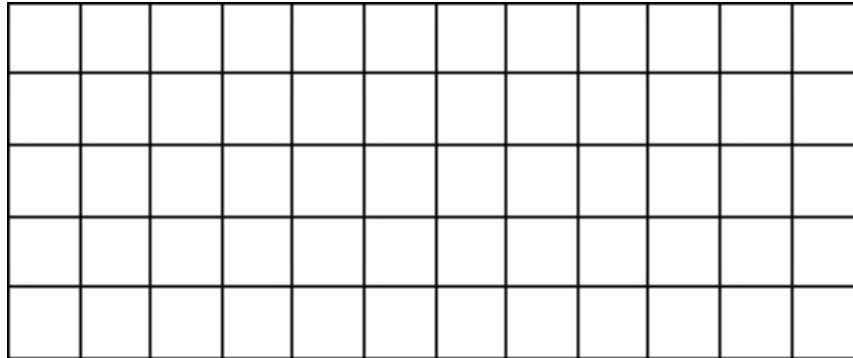
Siebzehn Jahre nach der ersten Auflage dieses Buches liegt nun eine zweite vor. Es konnten einige Lösungen verbessert werden und einige Quellen durch ältere ersetzt werden.

Heinrich Hemme
Roetgen, 2022

Aufgaben

1. Die Rechtecke des Rechtecks

Ein Rechteck ist schachbrettartig in $m \times n$ Quadrate unterteilt. Wie viele Rechtecke enthält es insgesamt?



Selbstverständlich sind Quadrate auch Rechtecke.

2. Rot, grün, schwarz

$$5 : \text{rot} = 0 : \text{grün} = 8 : \text{schwarz} = 7 : ?$$

Welche Farbe könnte für das Fragezeichen stehen?

3. Der hellsehende Matrose

Zwei Matrosen stehen an der Reling eines Schiffes, der eine an Steuerbord, der andere an Backbord. Beide schauen aufs Meer hinaus. Plötzlich sagt der eine Matrose zum anderen, ohne sich dabei umzudrehen oder den Kopf zu wenden: „Dir hat gerade eine Möwe einen Klecks auf die Jacke fallen lassen.“

Wie kann der Mann das wissen, ohne einen Spiegel oder andere Hilfsmittel benutzt zu haben?

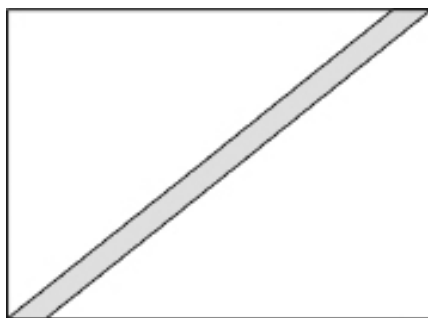
4. Zehn Behauptungen

1. Mindestens eine der Behauptungen 9 und 10 ist wahr.
2. Dies ist entweder die erste wahre oder die erste falsche Behauptung.
3. Diese Liste enthält drei aufeinanderfolgende falsche Behauptungen.
4. Die Differenz zwischen der Nummer der letzten wahren und der ersten wahren Behauptung ist ein Teiler der gesuchten Zahl.
5. Die Summe der Nummern der wahren Behauptungen ist die gesuchte Zahl.
6. Dies ist nicht die letzte wahre Behauptung.
7. Die Nummer jeder wahren Behauptung ist ein Teiler der gesuchten Zahl.
8. Die gesuchte Zahl gibt an, wie viel Prozent der Behauptungen dieser Liste wahr sind.
9. Die Anzahl der Teiler der gesuchten Zahl (ohne die 1 und die Zahl selbst) ist größer als die Summe der Nummern der wahren Behauptungen.
10. Diese Liste enthält keine drei aufeinanderfolgenden wahren Behauptungen.

Wie lautet die gesuchte Zahl?

5. Die Wegfläche

Durch einen Park von 165 m Länge und 120 m Breite läuft schräg von einer Ecke zur gegenüberliegenden ein 3 m breiter Weg, so wie es die Abbildung zeigt.



Wie groß ist die Wegfläche?

6. Das höchstmagische Quadrat

Ein 3×3 -feldiges Quadrat hat drei Zeilen, drei Spalten und zwei lange Diagonalen mit je drei Feldern und vier kurze Diagonalen mit je zwei Feldern. Insgesamt gibt es also zwölf Reihen.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Bei einem gewöhnlichen magischen Quadrat sind die Zahlen von 1 bis 9 so auf die Felder verteilt, dass die Summen der Zahlen in den Zeilen, den Spalten und den langen Diagonalen jeweils 15 ergeben. Die Summen in den kurzen Diagonalen spielen dabei keine Rolle.

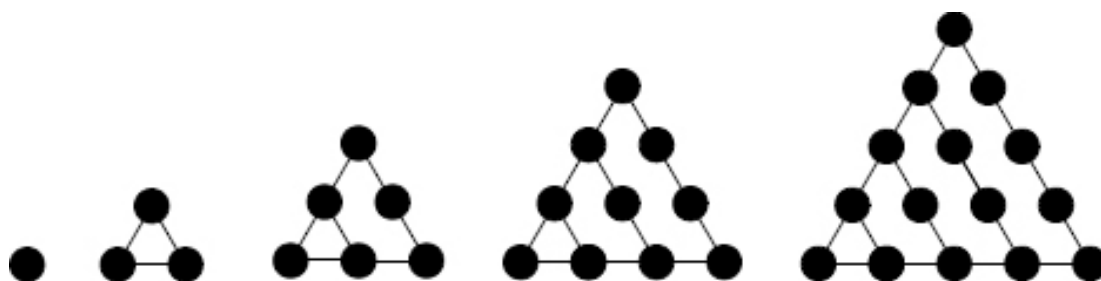
	5	

Füllen Sie nun die acht freien Felder dieses Quadrates so, dass die Summe der Werte in möglichst vielen der zwölf Reihen genau 15 beträgt. Dabei müssen die Ziffern in allen neun Feldern verschieden sein.

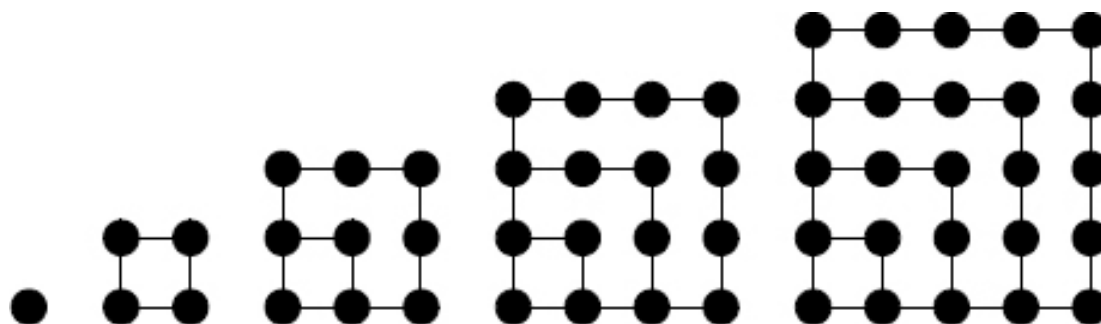
7. Polygonalzahlen

Polygonal- oder Flächenzahlen sind eine mathematische Spielerei, die man schon in der griechischen Antike kannte. Diese Zahlen entstehen dadurch, dass man auf die Ecken eines regelmäßigen Vielecks Punkte setzt. Dann verlängert man zwei an einer Ecke zusammenstoßende Seiten des Vielecks auf das Doppelte, Dreifache, Vierfache usw. und ergänzt diese zwei Seiten anschließend zu einem vollständigen Vieleck. Auf die Ecken setzt man Punkte und ebenso auf die Seiten, sodass sie dadurch in Abschnitte geteilt werden, die gerade so groß sind wie die ursprünglichen Seiten. Auf die Seiten von doppelter Länge kommt also jeweils ein Punkt, auf die von dreifacher Länge zwei Punkte usw. Die Gesamtzahl aller Punkte bei der allmählichen Erweiterung der Figur ergibt die Polygonalzahlen.

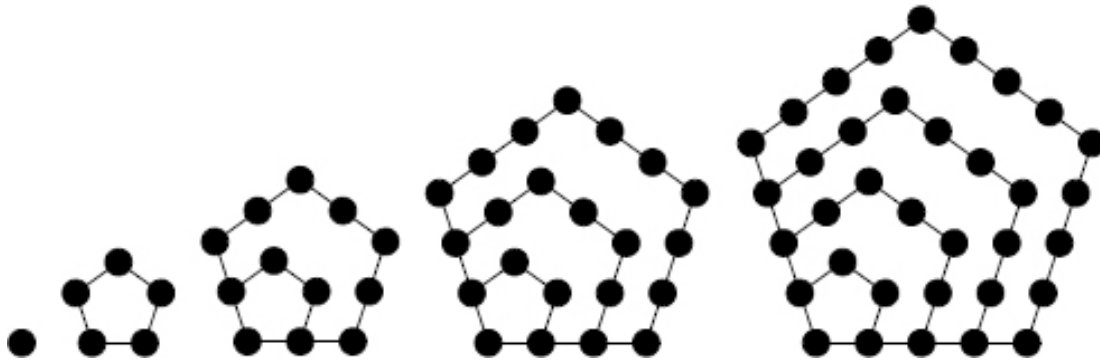
Die einfachsten Polygonalzahlen sind die Dreiecks- oder Trigonalzahlen. Sie haben die Werte 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ...



Die nächsten Flächenzahlen sind die Quadrat- oder Tetragonalzahlen 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ...



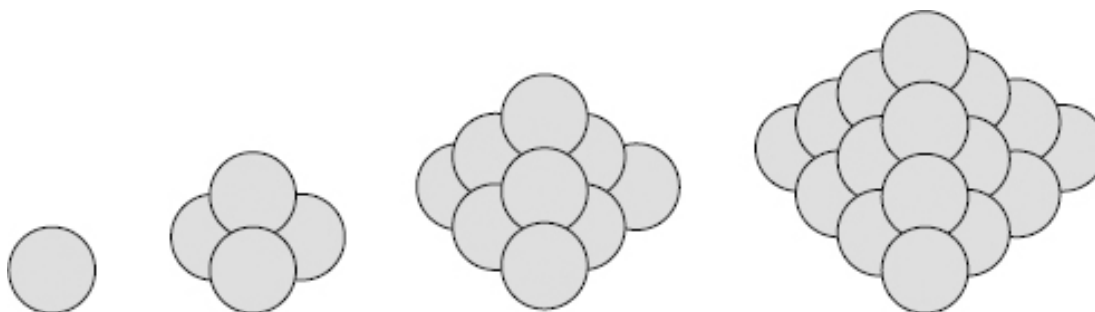
Die Fünfecks- oder Pentagonalzahlen lauten 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, ...



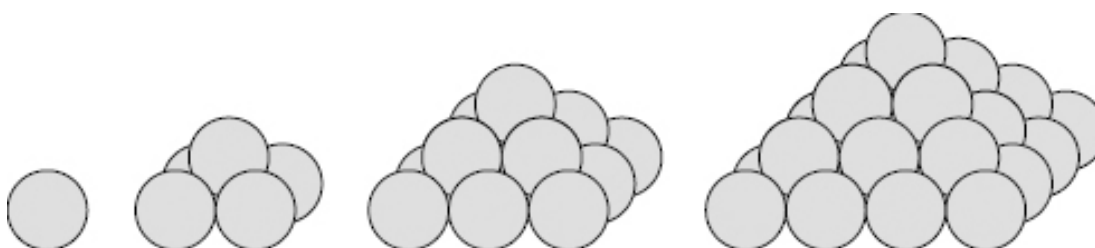
Entwickeln Sie Formeln, mit denen sich die m -ten Elemente der Dreieckszahlen, der Quadratzahlen, der Fünfeckszahlen und allgemein der n -gonalen Zahlen berechnen lassen.

8. Pyramidenzahlen

Ersetzt man in den Figuren der Dreieckszahlen aus der vorherigen Aufgabe die Punkte durch Kugeln und stapelt sie dann der Größe nach aufeinander, so erhält man Kugelpyramiden mit dreieckiger Grundfläche, auch Kugeltetraeder genannt. Die Anzahl der Kugeln dieser Pyramiden nennt man Tetraederzahlen oder trigonale Pyramidenzahlen. Sie haben die Werte 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ...



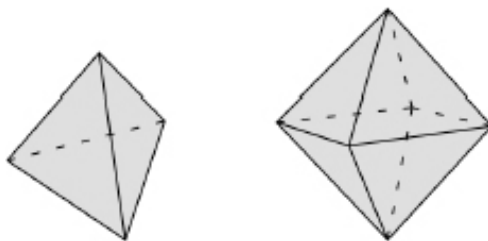
Das gleiche Verfahren lässt sich auch auf die Quadratzahlen, die Fünfeckszahlen oder allgemein die n -gonalen Zahlen anwenden. Man erhält dadurch die quadratischen Pyramidenzahlen 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, ..., die pentagonalen Pyramidenzahlen 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, ... oder n -gonalen Pyramidenzahlen. Allerdings lassen sich die Kugeln nur bei den trigonalen und quadratischen Pyramidenzahlen wie Orangen zu einer Obstpyramide stapeln. In allen anderen Fällen müsste man dünne Platten zwischen die einzelnen Schichten legen. Dies ändert jedoch nichts am Prinzip der Pyramidenzahlen.



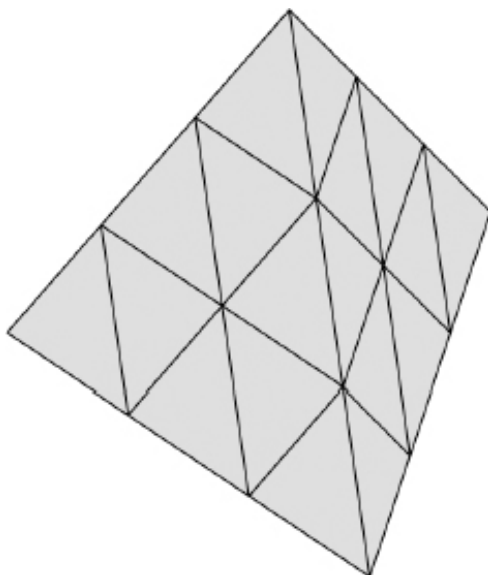
Entwickeln Sie Formeln, mit denen sich die m -ten Elemente der trigonalen, der quadratischen, der pentagonalen und allgemein der n -gonalen Pyramidenzahlen berechnen lassen.

9. Tetraeder und Oktaeder

Das reguläre Tetraeder und das reguläre Oktaeder sind zwei Körper, die von vier bzw. acht gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzt werden.



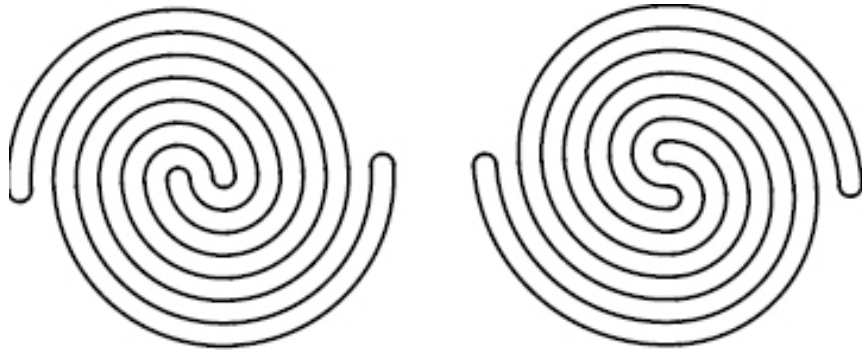
Ein reguläres Tetraeder der Kantenlänge n ist aus lauter kleinen regulären Tetraedern und kleinen regulären Oktaedern der Kantenlängen 1 zusammengesetzt.



Wie viele kleine Tetraeder und Oktaeder sind dafür notwendig?

10. Seilspiralen

Verbindet man die beiden Enden eines Seils miteinander, entsteht eine Seilschlinge.



Die zwei Spiralen sind mit Seilschlingen gelegt worden. Aus wie vielen Schlingen bestehen sie? Versuchen Sie, dieses Problem nur mit den Augen zu lösen, ohne die Finger oder einen Bleistift zu benutzen.