



Simon Syga · Dieter Wolf-Gladrow  
Andreas Deutsch

# Mathematik der Pandemie

SACHBUCH

 Springer

# Mathematik der Pandemie

Simon Syga · Dieter Wolf-Gladrow  
Andreas Deutsch

# Mathematik der Pandemie

 Springer

Simon Syga  
Zentrum für Informationsdienste  
und Hochleistungsrechnen (ZIH)  
Technische Universität Dresden  
Dresden, Deutschland

Dieter Wolf-Gladrow  
Alfred-Wegener-Institut  
Helmholtz-Zentrum für Polar-  
und Meeresforschung (AWI)  
Bremerhaven, Deutschland

Andreas Deutsch  
Zentrum für Informationsdienste  
und Hochleistungsrechnen (ZIH)  
Technische Universität Dresden  
Dresden, Deutschland

ISBN 978-3-662-64812-4      ISBN 978-3-662-64813-1 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-64813-1>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Der/die Herausgeber bzw. der/die Autor(en), exklusiv lizenziert durch Springer-Verlag GmbH, DE, ein Teil von Springer Nature 2022

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Covermotiv: © istockphoto.com/Maren Winter/ID 595339872; Die Schach-Reis-Legende als Beispiel für exponentielles Wachstum (Erläuterungen im Kap. 3).

Covergestaltung: deblik, Berlin

Planung/Lektorat: Andreas Rüdinger

Springer ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

*Ich wünsche mir nur, dass in einer Angelegenheit, die das Wohlergehen der Menschheit so sehr berührt, keine Entscheidung ohne die Erkenntnisse getroffen wird, die eine kleine Analyse und Berechnung liefern kann.*

— *Daniel Bernoulli, 1766, über die Pockenepidemie*

# Vorwort

*Die Mathematik ist eine wunderbare Lehrerin für die Kunst, die Gedanken zu ordnen, Unsinn zu beseitigen und Klarheit zu schaffen.*

— J. H. Fabre

Am Ende des Jahres 2019 fand vermutlich auf einem Markt im chinesischen Wuhan ein neuartiges Virus zum ersten Mal den Weg vom Tier zum Mensch. Seitdem verbreitet sich dieses Coronavirus mit rasanter Geschwindigkeit über die ganze Welt – man spricht daher von einer Pandemie. Viele Länder beklagen verheerende Opferzahlen. Einer ersten Infektionswelle folgten weitere Wellen trotz Anwendung unterschiedlichster Gegenmaßnahmen. Von Anfang an spielten bei politischen Entscheidungen über geeignete Anticoronamaßnahmen, wie Kontaktbeschränkungen und Impfung, mathematische Modelle eine wichtige Rolle. Mathematische Modelle können die Ausbreitung des Virus beschreiben. Eigenschaften der Modelle erlauben Rückschlüsse auf Muster im Pandemieverlauf. Neben einer medizinischen, virologischen, sozialwissenschaftlichen, gesellschaftlichen und ökonomischen Perspektive gibt es also auch eine mathematische Sicht auf die COVID-19-Pandemie.

Modellierungsexperten gehören in vielen Ländern zum engsten Beraterkreis der politisch Verantwortlichen. Mathematische Modellierer, von denen viele Menschen vor der Pandemie wahrscheinlich noch nie etwas gehört haben, sind plötzlich gern und häufig gesehene Gäste von Talkshows. Der Anspruch an die Modelle ist hoch: Sie sollen einen Blick in die Zukunft ermöglichen und die Auswirkungen oft weitreichender Maßnahmen auf das

Pandemiegesehen abschätzen. Damit unterstützen die Modellierer Entscheidungen, die oft mit großen Einschränkungen individueller Freiheiten einhergehen. Das Wissen über die Mathematik der Pandemiemodelle aber auch ihre Grenzen sollte daher nicht nur Experten überlassen werden.

Mathematische Modelle erlauben Antworten auf wichtige Fragen: Welche Einflüsse sind entscheidend für den Epidemieverlauf, und wie viele Menschen werden voraussichtlich infiziert? Welche Stellschrauben gibt es zum Stoppen der Ausbreitungswellen, und wie lassen sich neue Wellen verhindern? Wie genau helfen die unterschiedlichen Kennzahlen zur Einschätzung der Pandemie? Wie unterscheidet sich der Pandemieverlauf in verschiedenen Ländern? Welchen Einfluss haben Superspreader auf die Epidemieentwicklung? Welche Auswirkungen haben Gegenmaßnahmen wie Impfung und Kontaktbeschränkungen auf die Entwicklung der Fallzahlen? Und: Was genau ist eigentlich Herdenimmunität, und welche Impfquote ist erforderlich, um Herdenimmunität zu erreichen?

Auf die Methoden zur Beantwortung dieser Fragen zielen wir mit diesem Buch. Es analysiert die Dynamik der COVID-19-Pandemie aus einer mathematischen Perspektive. Wir beschreiben grundlegende Begriffe, Modelle, Herausforderungen und auch Missverständnisse auf verständliche Weise. Auf mathematische Formeln verzichten wir im Text fast völlig – wenn möglich sind sie in separate Infoboxen ausgelagert. Leserinnen und Leser können diese überspringen, ohne dass das Gesamtverständnis darunter leiden sollte<sup>1</sup>. Andererseits bieten die Infoboxen und ausführlichere Darstellungen im Anhang interessierten Leserinnen und Lesern die Möglichkeit, an der einen oder anderen Stelle auch etwas tiefer in die Thematik einzutauchen.<sup>2</sup> Wir untersuchen sowohl die Dynamik von „Spielzeugmodellen“ und anderen einfachen qualitativen Modelle als auch die zeitliche Entwicklung quantitativer Daten, z. B. der Inzidenz.

Am Beispiel der Pandemie vermitteln wir Einblicke in zentrale Konzepte mathematischer Modellierung wie Statistik (*Abschätzen*), Stochastik, Differentialgleichungen, Netzwerke und komplexe dynamische Systeme. Alle in diesem Buch vorgestellten Daten zum Pandemiegesehen sind öffentlich zugänglich. Im Prinzip können interessierte Leserinnen und Leser selbst Modelle auf Grundlage dieser Daten entwickeln. Die Modellierung

---

<sup>1</sup> Wir benutzen wenn möglich geschlechtsneutrale Bezeichnungen, wie zum Beispiel „ansteckende Person“ oder „Infizierte“.

<sup>2</sup> Wir freuen uns über Feedback unter [mathematikderpandemie@gmail.com](mailto:mathematikderpandemie@gmail.com).

der Pandemieausbreitung wird so zu einem Paradigma für mathematische Modellbildung<sup>3</sup>.

Im ersten Kapitel charakterisieren wir den COVID-19-Erreger und diskutieren wichtige Kennzahlen zur Bewertung der Pandemie. Des Weiteren beleuchten wir Schwierigkeiten bei der Erhebung der Kennzahlen, die oft auf Abschätzungen beruhen. Eine wichtige Frage ist die Auswahl der geeigneten Kennzahl.

Aus mathematischer Sicht ist COVID-19 keine Besonderheit. Zur Modellierung kann man auf bekannte Modelle zurückgreifen. Was aber genau ist eigentlich ein mathematisches Modell? Im zweiten Kapitel beschreiben wir am Beispiel exponentiellen Wachstums die Kunst der Modellierung und das Wesen mathematischer Modelle. Exponentielles Wachstum ist intuitiv nur schwer zu fassen. Es kennzeichnete die Entwicklung der Fallzahlen zu Beginn der Pandemie. Unterlässt man eine Reaktion in einer frühen Phase, so können einem die Dinge buchstäblich über den Kopf wachsen. Dies hat man in vielen Ländern im Verlauf der ersten Welle gesehen.

Jedes exponentielle Wachstum findet irgendwann ein Ende. Das dritte Kapitel zielt auf die mathematische Modellierung der weiteren Infektionsausbreitung. Wir definieren als Basismodell das sogenannte *SIR*-Modell. Dieses Modell erlaubt eine präzise Definition des Konzepts *Herdenimmunität*, das bei der Bekämpfung der Pandemie eine zentrale Rolle spielt. Die Ergebnisse der mathematischen Modellierung identifizieren drei zentrale Stellschrauben zur nachhaltigen Eindämmung des Infektionsgeschehens auf der Grundlage des Erreichens von Herdenimmunität. Dies sind die Verringerung der Infektionsrate, die Erhöhung der Genesungsrate sowie die Verkleinerung des nichtimmunen Populationsanteils insbesondere durch Impfung.

Mit verschiedenen Maßnahmen versucht man fortwährend, das Fortschreiten der Pandemie einzudämmen. Was aber sind geeignete Maßnahmen? Wir zeigen im vierten Kapitel an konkreten Beispielen, wie mathematische Modelle zur Bewertung von Gegenmaßnahmen eingesetzt werden können. Mit Hilfe geeigneter Modellszenarien analysieren wir die Auswirkung von Kontaktnachverfolgung, Quarantäne, Lockdown und Impfungen.

---

<sup>3</sup> Die Bedeutung mathematischer Modellierung zum Verständnis komplexer Systeme zeigt auch die Vergabe des Physik-Nobelpreises 2021 an drei Modellierungsexperten!

Treiber des Pandemiegeschehens sind immer wieder sogenannte Superspreader. Das sind ansteckende Menschen mit besonders vielen Kontakten. Superspreader können daher auch sehr viele andere Menschen infizieren. Den Effekt von Superspreadern auf die Pandemieverbreitung untersuchen wir im fünften Kapitel mit Agenten-basierten Modellen auf Kontaktnetzwerken.

Viele Menschen erhoffen sich von mathematischen Modellen vor allem Vorhersagen für die Zukunft. Im sechsten Kapitel diskutieren wir Gründe, warum Prognosen des Pandemiegeschehens so schwierig, wenn nicht gar unmöglich sind. Hilfreich sind hier Analogien zu Wetter und Klima. So beschreiben wir Gemeinsamkeiten, aber auch Unterschiede der Unsicherheiten für die Prognose von Wetter, Klima und Pandemie.

Das Buch ist ein gemeinsames Werk der Autoren basierend auf der Idee und einem Konzept von Andreas Deutsch. Eine Reihe von Freunden und Kollegen haben dieses Buch durch anregende Gespräche und eine Vielzahl konstruktiver Anmerkungen zu Manuskriptentwürfen unterstützt. Wir danken insbesondere Thomas Buder, Osvaldo Chara, Anke Deutsch, Elias Diesen, Lena Grüber, Bianca Güttner, Michael Kinder, Michael Kücken, Antje Laacks, Rolf Meyer, Josué Manik Nava Sedeño, Dimitria Nogueira de Freitas Gentile, Tom Paulat und Christoph Pöppe. Wir bedanken uns weiterhin bei Andreas Rüdinger, Roopashree Polepalli und Rahul Ravindran für konstruktive Unterstützung und beim Spektrum-Verlag für die Ermöglichung des Buchprojekts. Zu guter Letzt bedanken wir uns bei den Kollegen der Arbeitsgruppe „Innovative Methoden des Computings“ am Zentrum für Informationsdienste und Hochleistungsrechnen der Technischen Universität Dresden und bei seinem Leiter Wolfgang E. Nagel für ein produktives Forschungsumfeld.

Dresden, Bremen  
März 2022

Simon Syga  
Dieter Wolf-Gladrow  
Andreas Deutsch

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die Vermessung der Pandemie</b>	1
1.1	Erreger, Krankheit, Übertragung	2
1.2	Typischer Infektionsverlauf	4
1.3	Infektionsnachweis durch Tests	6
1.4	Kennzahlen zur Beschreibung des Infektionsgeschehens	7
1.5	Ländervergleiche	18
1.6	Vergleich mit der Grippe	19
1.7	Was ist die maßgebliche Kennzahl?	20
1.8	Resümee	22
<b>2</b>	<b>Modellierungswerkzeuge</b>	25
2.1	Die Kunst der Modellierung	26
2.2	Exponentielles Wachstum	27
2.3	Differentialgleichungen	34
2.4	Resümee	40
<b>3</b>	<b>Pandemiemodelle</b>	41
3.1	Kurze Geschichte epidemiologischer Modelle	41
3.2	Das Basismodell	42
3.3	Herdenimmunität und das Ende der Pandemie	47
3.4	Modellerweiterungen	52
3.5	Resümee	53

<b>4 Die Eindämmung der Pandemie</b>	55
4.1 Kontaktnachverfolgung	56
4.2 Kontaktbeschränkungen	59
4.3 Lockdown	62
4.4 Impfung	64
4.5 Resümee	70
<b>5 Kontaktnetzwerke und Superspreeder</b>	73
5.1 Superspreading	73
5.2 Kontaktnetzwerke	75
5.3 Der Effekt von Superspreadern	78
5.4 Resümee	80
<b>6 Die Unsicherheit von Modellvorhersagen</b>	83
6.1 Vom Wetter zum Klima zur Pandemie	83
6.2 Quellen der Unsicherheit	87
6.3 Vergleich von Modellprognosen	93
6.4 Projektionen und Szenarien	94
6.5 Resümee	95
<b>Nachwort</b>	97
<b>Anhang</b>	101
<b>Literatur</b>	111
<b>Stichwortverzeichnis</b>	115



# 1

## Die Vermessung der Pandemie

*Miss alles, was sich messen lässt, und mach alles messbar, was sich nicht messen lässt.*

— Archimedes

In diesem Kapitel beschreiben wir die Fakten, d. h. die Pandemie aus der Sicht der sie beschreibenden Daten. Unser Glück: Es gibt hervorragende, öffentlich zugängliche Daten zur Pandemie in Deutschland und weltweit. Hauptquellen für die Angaben in diesem Kapitel sind die Berichte des Robert-Koch-Instituts (RKI), Berlin<sup>1</sup>. Des Weiteren stützen wir uns auf Daten der Johns Hopkins Universität, Baltimore, USA<sup>2</sup> und von *Our World in Data*, einem Projekt des Global Change Data Lab<sup>3</sup>. Wir haben uns bemüht, uns auf unumstößliche Fakten zu konzentrieren. Allerdings ist die Situation „dynamisch“, d. h. einige Informationen in diesem Kapitel können sich wegen der Neuartigkeit des Phänomens noch durch neue Forschungsergebnisse verändern.

Um eine Pandemie verursachen zu können, muss ein Krankheitserreger

1. leicht übertragbar sein,
2. sich übertragen, bevor die infizierten Menschen so krank sind, dass sie im Bett liegen und keine weiteren Kontakte zu potentiellen Opfern aufnehmen können
3. Infizierte so lange am Leben lassen, dass diese den Erreger weitergeben können.

---

<sup>1</sup>zu finden unter [https://www.rki.de/DE/Home/homepage\\_node.html](https://www.rki.de/DE/Home/homepage_node.html).

<sup>2</sup><https://coronavirus.jhu.edu/data>

<sup>3</sup><https://ourworldindata.org/>, gemeinnützige Organisation mit Basis in Großbritannien.