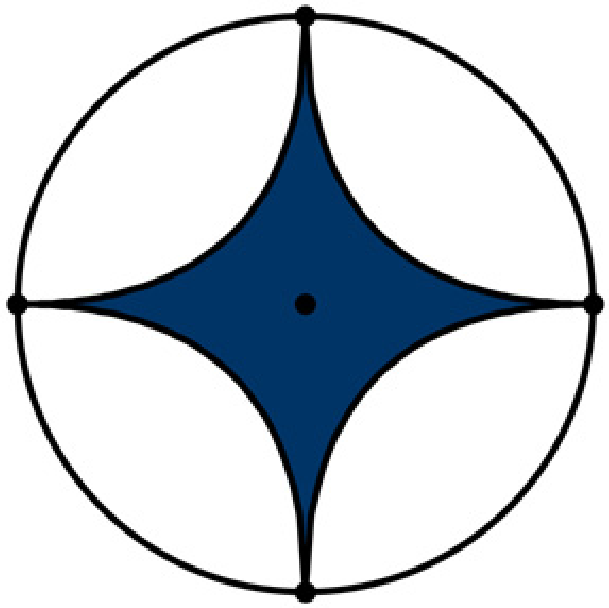
1

Annales de Mathématiques

Christian V. Nguembou Tagne



Baccalauréat C et E
Cameroun
2008 – 2018

Sujets et Corrigés

À la mémoire de

Pauline Chuem

(1906 – 2011)

Avant-propos

Conformément à son titre, cet ouvrage est une chronique de l'épreuve de mathématiques au baccalauréat C et E du Cameroun, pour les onze sessions de 2008 à 2018. Il est composé de onze chapitres correspondants à ces sessions. Chaque chapitre se décline en trois sections. La première section reprend l'énoncé original du sujet. La deuxième section propose dans la foulée un corrigé du sujet. La troisième section, conclusion du chapitre, est dédiée à des notes et commentaires succincts sur l'énoncé ou le corrigé proposé.

Traditionnellement, les annales sont des outils mis à la disposition des apprenants pour la préparation aux épreuves des examens officiels des divers ordres d'enseignement. Le présent texte s'inscrit dans cette tradition didactique. En effet, il présente des corrigés détaillés, des notes informatives, des commentaires explicatifs, et un index thématique pour une lecture ciblée et un apprentissage méthodique.

En plus d'être des textes didactiques, les annales sont manifestement des documents d'archives. Cette dimension historique a été un moteur de la rédaction de ce livre, qui est le premier opus d'une collection visant la constitution d'archives pour le présent et la postérité.

Francfort-sur-le-Main, le 15 avril 2019
Christian V. Nguembou Tagne

Table des matières

Avant-propos

1. **Session 2008**

    1.1. Sujet 2008

        Exercice 1 (C) : Équation diophantienne – Suites de complexes.

        Exercice 2 (E) : Suites réelles.

        Exercice 3 : Projection orthogonale – Sphère – Tétraèdre.

        Problème : Probabilités et coniques – Fonctions – Similitudes.

    1.2. Corrigé 2008

    1.3. Notes et commentaires sur le sujet 2008

        Équations diophantiennes.

        Distance d'un point à un plan.

        Intersection d'un plan et d'une sphère.

        Théorème de l'angle au centre.

2. **Session 2009**

    2.1. Sujet 2009

        Exercice 1 (E) : Alignement – Points coplanaires – Calcul d'aire.

Exercice 2 (C) : Somme des diviseurs et carré parfait.

Exercice 3 : Lancer d'un dé pipé.

Problème : Fonctions – Applications affines - Plan complexe.

2.2. Corrigé 2009

2.3. Notes et commentaires sur le sujet 2009

Théorème de la bijection.

Points d'inflexion.

3. **Session 2010**

3.1. Sujet 2010

Exercice 1 : Racines d'un polynôme complexe et similitude plane.

Exercice 2 : Conique et application affine.

Exercice 3 : Tétraèdre régulier – Endomorphisme de l'espace vectoriel.

Problème : Équations différentielles – Fonctions – Suites réelles.

3.2. Corrigé 2010

3.3. Notes et commentaires sur le sujet 2010

Corollaire du théorème de l'angle au centre.

Bijectivité, noyau et image d'un endomorphisme.

4. **Session 2011**

4.1. Sujet 2011

Exercice 1 : Suites réelles définies par des intégrales.

Exercice 2 : Plan, sphère et projection plane dans l’espace.

Exercice 3 : Rotations dans le plan complexe.

Problème : Étude d’une famille de fonctions – Suite réelle.

4.2. Corrigé 2011

4.3. Notes et commentaires sur le sujet 2011

5. **Session 2012**

5.1. Sujet 2012

Exercice 1 (E) : Bijection, réciproque et calcul intégral.

Exercice 2 (C) : Congruences et coordonnées entières d’une parabole.

Exercice 3 : Racines d’un polynôme complexe et triangle.

Problème : Fonctions – Suites réelles – Rotation et conique.

5.2. Corrigé 2012

5.3. Notes et commentaires sur le sujet 2012

Caractérisation des triangles isocèles.

Image d’un repère cartésien par une application affine.

6. **Session 2013**

6.1. Sujet 2013

Exercice 1 (C) : Numération et division euclidienne.

Exercice 2 (E) : Minoration d'une fonction définie par une intégrale.

Exercice 3 : Barycentre et lieux géométriques dans l'espace.

Exercice 4 : Racines complexes et mesures d'angles vectorielles.

Problème : Fonctions, calcul d'aire et suites réelles.

6.2. Corrigé 2013

6.3. Notes et commentaires sur le sujet 2013

Construction d'un parallélogramme.

Construction de la médiatrice et du milieu d'un segment.

7. **Session 2014**

7.1. Sujet 2014

Exercice 1 : Volume d'un tétraèdre – Sphère et réflexion.

Exercice 2 : Équations différentielles – Étude d'une fonction.

Exercice 3 : Encadrement et convergence d'une suite réelle.

Problème : Inversion dans un cercle – Application non-linéaire.

7.2. Corrigé 2014

7.3. Notes et commentaires sur le sujet 2014

Inversion dans un cercle.

8. **Session 2015**

8.1. Sujet 2015

Exercice 1 : Résolution d'un système d'équations non-linéaire.

Exercice 2 : Suites adjacentes – Dérivée d'une fonction.

Exercice 3 : Endomorphismes du plan vectoriel et probabilités.

Problème : Racines cubiques d'un complexe – Aire d'une section.

8.2. Corrigé 2015

8.3. Notes et commentaires sur le sujet 2015

9. **Session 2016**

9.1. Sujet 2016

Exercice 1 : Tirage aléatoire de jetons et nombres complexes.

Exercice 2 : Surfaces dans l'espace – Volume d'un tétraèdre.

Problème : Isométries laissant invariante une partie du plan.

9.2. Corrigé 2016

9.3. Notes et commentaires sur le sujet 2016

Sur la formulation de la Section III de l'Exercice 2

Invariance locale et invariance globale

10. **Session 2017**

10.1. Sujet 2017

Exercice 1 : Arithmétique – Tirage aléatoire de boules numérotées.

Exercice 2 : Endomorphisme de l’espace vectoriel.

Exercice 3 : Isométries affines et lieux géométriques du plan.

Problème : Géométrie de l’espace – Étude de fonctions.

10.2. Corrigé 2017

10.3. Notes et commentaires sur le sujet 2017

Changement de bases et matrices de passage.

11. **Session 2018**

11.1. Sujet 2018

Exercice 1 (C) : Équation diophantienne et droite dans le plan.

Exercice 2 (E) : Test de recrutement et calcul de probabilités.

Exercice 3 : Calcul du volume d’un tétraèdre.

Problème : Lignes de niveau – Fonctions et calcul d’aire.

11.2. Corrigé 2018

11.3. Notes et commentaires sur le sujet 2018

Volume d’un tétraèdre et distance d’un point à un plan.

Index thématique.

Liste des tableaux

Liste des schémas.

Bibliographie

Index

Chapitre 1

Session 2008

1.1. Sujet 2008

Ce sujet comporte trois exercices et un problème. Le premier exercice s'adresse exclusivement aux candidats de la série C. Le deuxième est réservé aux postulants de la série E. L'exercice 3 et le problème sont communs à tous les aspirants des deux séries C et E.

Exercice 1 (C) : Équation diophantienne – Suites de complexes.

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $12x - 5y = 3$.

2. On considère la suite de nombres complexes $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$Z_0 = i \qquad \text{et} \qquad Z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) Z_n$$

pour tout $n \geq 0$. On désigne par M_n le point image de Z_n dans le plan complexe d'origine O.

a. Montrer par récurrence que $Z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$ pour chaque entier naturel n.

b. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n pour lesquels M_n appartient à la demi-droite $[Ox)$.

Exercice 2 (E) : Suites réelles.

Soient les deux suites numériques u et v définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}.$$

1. Démontrer que la suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$.

2. Soient les fonctions numériques f , g et h définies par

$$f(x) = x - \sin x,$$

puis

$$g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

et

$$h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x.$$

Montrer que $f(x) \geq 0$, puis $g(x) \geq 0$ et $h(x) \geq 0$ pour chaque réel positif x.

3. Démontrer par récurrence que $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 \leq n^4$ pour tout entier naturel non nul n.

4. En déduire que

$$v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n$$

pour tout entier naturel non nul n, et calculer la limite de la suite u.

Exercice 3 : Projection orthogonale – Sphère – Tétraèdre.

Soit l'espace E rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points $A(3,-2, 2)$; $B(6, 1, 5)$; $C(6,-2,-1)$ et $D(0, 4,-1)$.

1. Déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C sont non alignés.

2.(a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

(b) Écrire une équation cartésienne du plan (P_1) orthogonal à la droite (AC) passant par A.

(c) Vérifier que le plan (P_2) d'équation $x+y+z-3 = 0$ est orthogonal à la droite (AB) et passe par A.

3. Donner l'expression analytique de la projection orthogonale p sur le plan (P_2).

4.(a) Écrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre B et de rayon $R = 5\sqrt{3}$

(b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble

$$L = (S) \cap (P_2).$$

5.(a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$. En déduire que la droite (AD) est orthogonale au plan (ABC).

(b) On rappelle que le volume du tétraèdre $ABCD$ est

$$V=\frac{1}{3}\times\mathfrak{a}\times AD,$$

où a est l'aire du triangle ABC. Déterminer alors la valeur de V.

Problème : Probabilités et coniques – Fonctions – Similitudes.

Partie A.

On considère trois urnes U, V et W contenant chacune des boules portant le numéro 1 ou le numéro 2. Le probabilité de tirer une boule numérotée 1 de U est P_1 = 0,4; celle de tirer 1 de V est P_2 = 0,5; et enfin celle de tirer 1 de W est P_3 = 0,7.

On tire une boule de U, une boule de V et une autre de W. Soient a, b et c les numéros respectifs de ces boules.

Soit (Q) le plan d'équation $ax + by + cz + 6 = 0$, et soit (E) la conique d'équation

$$\frac{x^2}{a^2}-(-1)^c\cdot\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a. **(a)** « Le plan (Q) est parallèle au plan (P) d'équation $x+2y+z-4=0$. »
b. **(b)** « Le plan (Q) contient le point $M(0,-2,-1)$. »

c. **(c)** « La conique (E) est une ellipse. »

d. **(d)** « La conique (E) est une hyperbole équilatère. »

Partie B.

On considère la fonction f définie de $[-\pi,\pi] \setminus \{0\}$ vers R par

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt.$$

1. Soit la fonction

$$g : x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x.$$

Étudier la et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

2. Démontrer que $1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1$ pour tout $t \in [-\pi, \pi]$.

3. En déduire que, si x est un réel non nul de $[-\pi, \pi]$, alors

$$\ln 3 - 2x^2 \leq \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt \leq \ln 3,$$

où ln désigne le logarithme népérien. Vous distinguerez obligatoirement les cas « x positif » et « x négatif ».

4.(a) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(b) Peut-on prolonger par continuité f en 0? Justifier la réponse.

5. Montrer que f est dérivable sur $[-\pi, \pi] \setminus \{0\}$, puis calculer le nombre dérivé de f en $\frac{\pi}{6}$.

On considère la fonction h définie de $]0,+\infty[$ vers R par $h(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.

6. La fonction h est-elle deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$?

7. Vérifier que h est solution de l'équation différentielle

$$xh''(x) + 2h'(x) + xh(x) = 0$$

pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$.

Partie C.

Le plan étant direct, on considère un carré direct $ABCD$. Par ailleurs, E désignant le milieu du segment $[CD]$, soient F et G des points tels que $DEFG$ soit aussi un carré direct.

1. Faire une figure.

2. Soit s la similitude de centre D qui transforme A en B. Donner le rapport et l'angle de s.

3. Déterminer $s(E)$.

4. Soit Γ le cercle circonscrit à $ABCD$ et I le point d'intersection des droites (AE) et (BF).

(a) Calculer $\mathrm{Mes}\left(\widehat{\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{FB}}\right)$. En déduire que $I \in \Gamma$.

(b) Montrer que les droites (IB) et (ID) sont orthogonales.

5. On suppose le plan rapporté au repère orthonormé $\left(A, \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}, \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}\right)$ et $AB = 3$.

(a) Donner l'écriture complexe de s.

(b) On pose $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ et $\overrightarrow{j} = \frac{\overrightarrow{AD}}{AD}$. Soit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Montrer que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est une base et donner la matrice de l'application linéaire associée à s dans cette base.

1.2. Corrigé 2008

Solution de l'Exercice 1 (C).

1.

Soit S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}^2$ de l'équation

$$12x - 5y = 3. \qquad (*)$$

Le nombre premier 5 n'intervient pas dans la décomposition en facteurs premiers $2^2 \times 3$ de 12. De ce fait, les nombres 12 et -5 sont premiers entre eux. Selon le théorème de BÉZOUT, il existe donc un couple $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $12u - 5v = 1$. Ainsi, $(3u, 3v) \in S$. Autrement dit, le couple $(3u, 3v)$ est une solution particulière de l'equation $(*)$ dans $\mathbb{Z}^2$. Il en résulte que

$$S = \left\{(5\ell + 3u, 12\ell + 3v) : \ \ell \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Ainsi, pour conclure la résolution de l'équation $(*)$, il suffit de déterminer le couple (u, v) dont l'existence est garantie par le théorème de BÉZOUT. À cet effet, nous mettons à contribution l'algorithme d'EUCLIDE. Ce dernier livre

$$2 = \mathbf{12} - \mathbf{5} \times 2 \qquad \text{et} \qquad 1 = \mathbf{5} - \mathbf{2} \times 2.$$

De ce fait,

$$1 = \mathbf{5} - (\mathbf{12} - \mathbf{5} \times 2) \times 2 = \mathbf{12} \times (-2) + \mathbf{5} + \mathbf{5} \times 4 = \mathbf{12} \times (-2) + \mathbf{5} \times 5$$
$$= \mathbf{12} \times (-2) - \mathbf{5} \times (-5).$$

Donc, $u = -2$ et $v = -5$. Cependant, $5l + 3u = 5l - 6 = 5(l-1) - 1$ et $12l + 3v = 12l - 15 = 12(l-1) - 3$ pour chaque $l \in \mathbb{Z}$. Par conséquent,

$$S = \Big\{(5k-1, 12k-3): \;\; k \in \mathbb{Z}\Big\}.$$

2.

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de nombres complexes définie par

$$Z_0 = i \qquad \text{et} \qquad Z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) Z_n$$

pour tout $n \geq 0$. Soit du reste M_n le point d'affixe Z_n dans le plan complexe d'origine O.

(a) Montrons par récurrence que

$$Z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)} \tag{$**$}$$

pour tout entier naturel n. De toute évidence,

$$e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\cdot 0\cdot\pi}{6}\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \cdot 1 = i = Z_0.$$

Maintenant, supposons que $Z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}$ pour un entier naturel *n* quelconque. Alors,

$$Z_{n+1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)}.$$

Cependant, $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et sin $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, tandis que

$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \qquad \text{et} \qquad \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$

pour chaque $\alpha \in$ R. De ce fait,

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

et

$$\sin\frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Par conséquent,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6} = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

Il en résulte que

$$Z_{n+1} = e^{i\frac{5\pi}{6}}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}\right)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5(n+1)\pi}{6}\right)}.$$

Ceci conclut la démonstration par récurrence sur *n* de l'égalité ($\ast\ast$).

(b) Soit *E* l'ensemble des entiers naturels *n* pour lesquels M_n appartient à la demi-droite [*Ox*). Par définition, $n \in E$ si et seulement si abscisse et ordonnée du point M_n sont respectivement positive ou nulle, et nulle. Or, par définition, abscisse et ordonnée de M_n sont respectivement partie réelle et partie imaginaire de Z_n. Puisque

$$\begin{aligned} Z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right)} &= \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{6}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right) + i\cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right), \end{aligned}$$

il s'ensuit que $n \in E$ si et seulement si

$$-\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right) \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right) \leq 0 \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) = 0. \tag{$\dagger$}$$

En outre, $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ pour tout réel. Donc, $\cos \alpha = 0$ si et seulement si $\sin \alpha \in \{-1, 1\}$. De ce fait, la conjonction ($\dagger$) est équivalente à

$$\sin\left(\frac{5n\pi}{6}\right) = -1 \qquad \text{et} \qquad \cos\left(\frac{5n\pi}{6}\right) = 0.$$

Notoirement, le réel $-\frac{\pi}{2}$ est l'unique $\alpha \in \left]-\pi, \pi\right]$ satisfaisant $\cos \alpha = 0$ et $\sin \alpha = -1$. Un réel α vérifie donc $\cos \alpha = 0$ et $\sin \alpha = -1$ si et seulement s'il existe un entier relatif a tel que $\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2a\pi$. Par conséquent, un entier naturel n appartient à E si et seulement s'il existe un entier relatif a tel que

$$\frac{5n\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2a\pi = \frac{(-1-4a)\pi}{2},$$

c'est-à-dire $\frac{5n}{3} = -1 - 4a$, ou encore 3 = 12*a* − 5*n*. Ainsi, un point M_n, avec $n \in \mathbb{N}$, appartient à la demi-droite [*Ox*) si et seulement s'il existe un entier relatif *a* tel que le couple (*a, n*) soit solution de l'équation (∗) de la question **(1)**. Par conséquent, l'ensemble *E* des entiers naturels *n*, pour lesquels M_n appartient à la demi-droite [*Ox*), est déterminé par

$$E = \left\{ 12k - 3 : \ \ k \in \mathbb{Z} \ \ \wedge \ \ 12k - 3 \geq 0 \right\}.$$

Or l'inégalité $12k - 3 \geq 0$ est équivalente à $k \geq \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. De ce fait,

$$E = \left\{ 12k - 3 : \ \ k \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Solution de l'Exercice 2 (E).

Soient *u* et *v* les suites numériques définies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i}{n^2}\right) \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}.$$

1.

Montrons que la suite $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{2}$. À cet effet, notons que chaque terme de cette suite est le produit de l'inverse d'un monôme par la somme d'une suite arithmétique. Notamment,

$$v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i.$$

Il s’agit en l’espèce de la somme des n + 1 premiers termes consécutifs de la suite arithmétique ayant 0 pour terme initial et 1 pour raison, c’est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} i = 0 + 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Par conséquent,

$$v_n = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+2}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

pout tout $n \in$ N*. Cependant, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$ De ce fait, $\lim_{n \to +\infty} v_n = \frac{1}{2} \cdot (1+0) = \frac{1}{2}.$

2.

Soient les fonctions numériques f , g et h définies par

$$f(x) = x - \sin x,$$

puis

$$g(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x$$

et

$$h(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x.$$

La fonction f est dérivable sur R, en tant que somme de deux fonctions dérivables : l’identité et l’opposé du sinus. Du reste,

$$f'(x) = (x)' - \sin' x = 1 - \cos x \geq 0$$

pour tout $x \in$ R. De ce fait, la fonction f est croissante sur R. Donc, $f(x) \geq f(0) = 0 - \sin 0 = 0$

pour tout réel $x \geq 0$.

De manière analogue à f , la fonction g, somme d'un polynôme et du cosinus, est dérivable sur R. Par ailleurs,

$$g'(x) = \left(-1 + \frac{x^2}{2}\right)' + \cos' x = x - \sin x = f(x) \geq 0$$

pour tout réel $x \geq 0$. Donc, g est croissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$. D'où

$$g(x) \geq g(0) = -1 + \frac{0^2}{2} + \cos 0 = -1 + 1 = 0$$

pour chaque réel $x \geq 0$.

Comme f et g, la fonction h, somme d'un polynôme et du sinus, est dérivable sur R avec

$$h'(x) = (-x)' + \left(\frac{x^3}{6}\right)' + \sin' x = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x = g(x) \geq 0$$

pour tout $x \in [0,+\infty[$. Ainsi, la fonction h est croissante sur l'intervalle $[0,+\infty[$. Ceci induit

$$h(x) \geq h(0) = -0 + \frac{0^3}{6} + \sin 0 = 0$$

pour chaque réel $x \geq 0$.

Somme toute, pour tout nombre réel $x \geq 0$, les images respectives de x par f , g et h sont supérieures ou égales à 0.

3.

À l'évidence, l'égalité $n = 1$ entraîne $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3 = 1 \leq 1^4$. Maintenant, supposons la validité de l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 \leq n^4$$

pour un entier naturel non nul n quelconque. Alors,

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i^3\right) + (n+1)^3 \leq n^4 + (n+1)^3.$$

Cependant,

$$(n+1)^3 = (n+1)(n+1)^2 = (n+1)(n^2+2n+1) = n^3+3n^2+3n+1$$

et

$$(n+1)^4 = (n+1)(n^3+3n^2+3n+1) = n^4+4n^3+6n^2+4n+1.$$

Par conséquent,

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 \leq n^4+n^3+3n^2+3n+1 \leq n^4+4n^3+6n^2+4n+1 = (n+1)^4.$$

Eu égard à la règle de récurrence, il en résulte que

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 \leq n^4$$

pour chaque $n \in$ N*.

4.

Soit $n \in$ N* et $i \in$ N tel que $1 \leq i \leq n$. Alors, $f\left(\frac{i}{n^2}\right) \geq 0.$ Autrement dit,

$$\frac{i}{n^2} - \sin\left(\frac{i}{n^2}\right) \geq 0 \qquad \text{ou} \qquad \sin\left(\frac{i}{n^2}\right) \leq \frac{i}{n^2}.$$

Du reste, $h\left(\frac{i}{n^2}\right) \geq 0.$ Ceci signifie que

$$-\frac{i}{n^2} + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{i}{n^2}\right)^3 + \sin\left(\frac{i}{n^2}\right) \geq 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{i}{n^2} - \frac{1}{6n^6} \cdot i^3 \leq \sin\left(\frac{i}{n^2}\right).$$

Tout compte fait,

$$\frac{i}{n^2} - \frac{1}{6n^6} \cdot i^3 \leq \sin\left(\frac{i}{n^2}\right) \leq \frac{i}{n^2}$$

pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2} - \frac{1}{6n^6} \cdot \sum_{i=1}^{n} i^3 \leq \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i}{n^2}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}.$$

En d'autres termes,

$$v_n + \frac{1}{6n^6} \cdot \left(-\sum_{i=1}^{n} i^3\right) \leq u_n \leq v_n.$$

Or, la question **(3)** assure la validité de l'inégalité $-n^4 \leq -\sum_{i=1}^{n} i^3$. Donc,

$$v_n - \frac{1}{6n^2} = v_n + \frac{1}{6n^6} \cdot (-n^4) \leq v_n + \frac{1}{6n^6} \cdot \left(-\sum_{i=1}^{n} i^3\right).$$

Par conséquent,

$$v_n - \frac{1}{6n^2} \leq u_n \leq v_n. \qquad (\dagger\dagger)$$

Au demeurant, la suite $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge notoirement vers 0. De ce fait,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{6} \times 0 = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \left(v_n - \frac{1}{6n^2}\right) = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}.$$

D'après le *théorème des gendarmes* et selon les inégalités (*††*), il s'ensuit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}.$$

Solution de l'Exercice 3.

Soit l'espace *E* rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$. On considère les points *A*(3,−2, 2) ; *B*(6, 1, 5) ; *C*(6,−2,−1) et *D*(0, 4,−1).

1.

Pour déterminer le produit vectoriel $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, il convient de noter que

$$\overrightarrow{AB} = (6-3)\overrightarrow{i} + (1-(-2))\overrightarrow{j} + (5-2)\overrightarrow{k} = 3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k}$$

et

$$\overrightarrow{AC} = (6-3)\overrightarrow{i} + (-2-(-2))\overrightarrow{j} + (-1-2)\overrightarrow{k} = 3\overrightarrow{i} + 0\overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{i} + \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{j} + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \cdot \overrightarrow{k} \\ &= -9\overrightarrow{i} + 18\overrightarrow{j} - 9\overrightarrow{k} = -9\left(\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right).\end{aligned}$$

De toute évidence, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \overrightarrow{0}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont de ce fait non colinéaires. Ceci signifie que les points *A*, *B* et *C* sont non alignés.

2.

(a) Observons que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 3 + 3 \times 0 + 3 \times (-3) = 9 - 9 = 0.$$

Les droites (*AB*) et (*AC*), sécantes en *A*, sont donc perpendiculaires en *A*. Le triangle *ABC* est par conséquent rectangle en *A*.

(b) Soit (P_1) le plan orthogonal à la droite (*AC*) passant par *A*. Alors, un point *M* (*x, y, z*) de l'espace *E* appartient au plan (P_1) si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$. Cependant,

$$\overrightarrow{AM} = (x-3)\overrightarrow{i} + (y+2)\overrightarrow{j} + (z-2)\overrightarrow{k}$$

et

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot (x-3) + 0 \cdot (y+2) - 3 \cdot (z-2) &= 3x - 9 - 3z + 6 \\ &= 3(x - z - 1).\end{aligned}$$

Par conséquent, $x - z - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P_1).

(c) Soit (P_2) le plan d'équation $x + y + z - 3 = 0$. Alors, le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ est normal à (P_2). Par ailleurs,

$$x_A + y_A + z_A - 3 = 3 + (-2) + 2 - 3 = 0.$$

Ainsi, le point A appartient à (P_2). Du reste,

$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 3\overrightarrow{k} = 3\left(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}\right) = 3\overrightarrow{n}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est de ce fait colinéaire au vecteur $\overrightarrow{n}$, normal au plan (P_2) contenant le point A. Par conséquent, (P_2) est orthogonal à la droite (AB) en A.

3.

Soit p la projection orthogonale sur le plan (P_2). Alors, pour des points $M(x, y, z)$ et $M'(x', y', z')$, l'égalité $M' = p(M)$ est satisfaite si et seulement si $M' \in (P_2)$ et s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{MM'} = \lambda \cdot \overrightarrow{n}$, où $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$. Ceci équivaut à la validité du système suivant :

$$\begin{cases} x' + y' + z' - 3 = 0, \\ x' - x = \lambda, \\ y' - y = \lambda, \\ z' - z = \lambda. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} x' = x + \lambda, \\ y' = y + \lambda, \\ z' = z + \lambda, \\ x + y + z + 3\lambda - 3 = 0. \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{cases} \lambda = 1 - \frac{1}{3}(x + y + z), \\ x' = x - \frac{1}{3}(x + y + z) + 1 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z + 1, \\ y' = y - \frac{1}{3}(x + y + z) + 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 1, \\ z' = z - \frac{1}{3}(x + y + z) + 1 = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 1. \end{cases}$$

Par conséquent, la projection orthogonale sur le plan (P_2) est donnée de manière analytique par

$$p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}, \;\; M(x, y, z) \mapsto M'(x', y', z'),$$

où

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z + 1, \\ y' = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z + 1, \\ z' = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z + 1. \end{cases}$$

4.