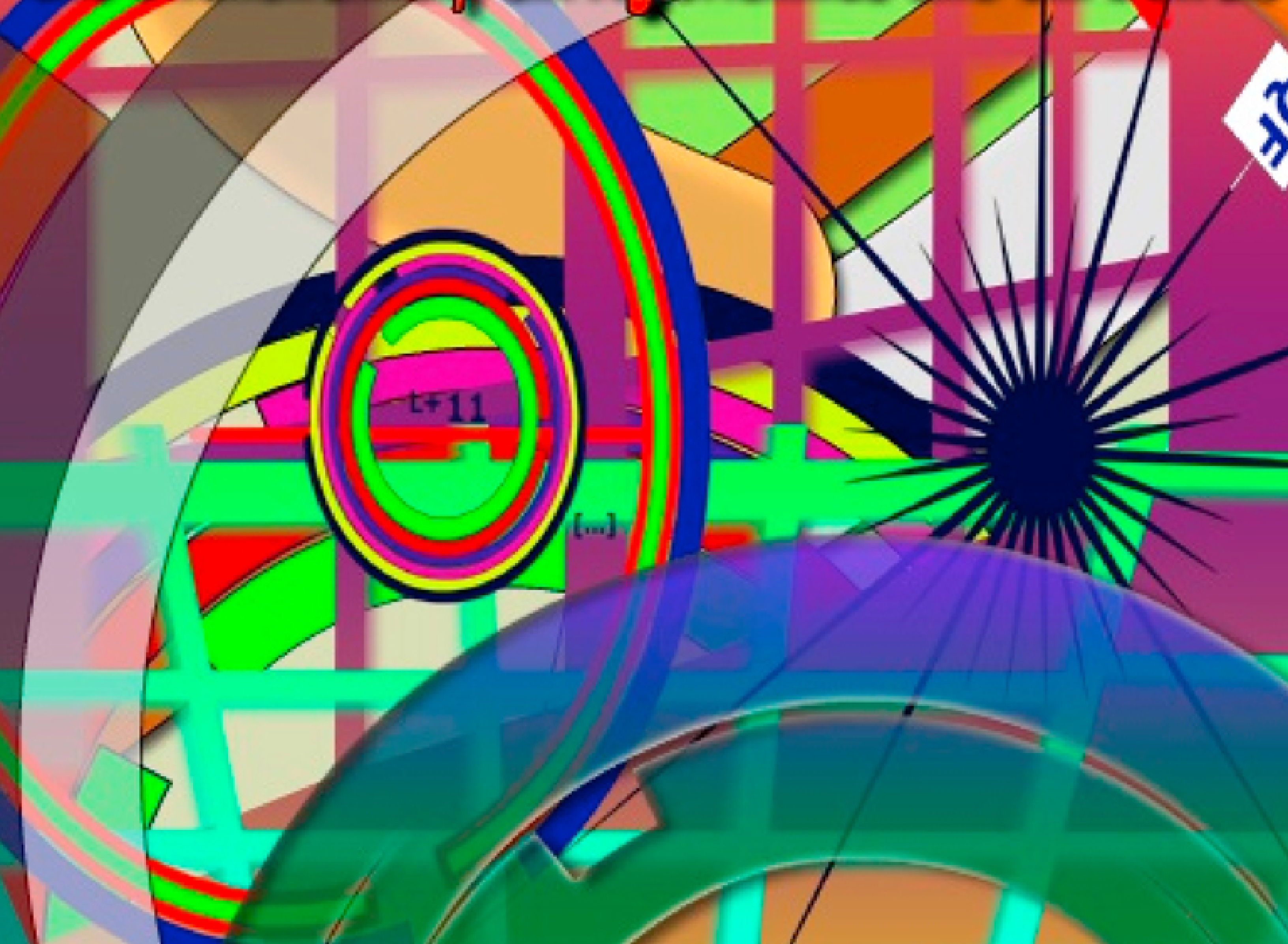
Michael Thiel

Primzahlzwillinge

Die Unendlichkeit, ein Algorithmus und ein Beweis



Inhalt

Einleitung

Das Phänomen ‚Primzahlen' stellt schon seit vielen Jahrhunderten zahlreiche Mathematiker vor noch nicht gelöste Probleme.

Eine offene Frage im Zusammenhang mit den Primzahlen ist, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Primzahlzwillinge sind zwei aufeinander folgende Primzahlen, die zueinander einen Abstand von 2 haben. Dazu zählen die Zahlenpaare 3 mit 5, 5 mit 7, 11 mit 13 oder 17 mit 19.

Diese Arbeit verfolgt das Ziel zu einem Verständnis für das Erscheinen von Primzahlen und Primzahlzwillingen zu gelangen, damit abschließend eine tendenzielle Aussage über die Endlichkeit oder Unendlichkeit von Primzahlzwillingen getroffen werden kann.

In sieben Kapiteln werden dafür, von verschiedenen Ansätzen ausgehend, neue Instrumentarien geschaffen, die potentiell nutzbringend für das Treffen einer solchen Aussage sind.

Im ersten Kapitel befasse ich mich grundlegend mit der Entstehung der Primzahlen. Dabei werde ich die drei Systeme des Zählens, der Addition und der Multiplikation gegenüberstellen, um zu ergründen, warum im Unterschied der drei Systeme die Entstehung der Primzahlen verwurzelt ist.

Diese Verwurzelung wird im zweiten Kapitel erkennbar, wenn man das Multiplikationssystem als ein zeitliches

System betrachtet. Der Zahlenaufbau erfolgt nämlich nach bestimmten Prinzipien, die keineswegs ungeordnet ablaufen.

Das dritte Kapitel stellt Bedingungen auf, die an einer Endlichkeitsbehauptung von Primzahlzwillingen geknüpft sind. Die Endlichkeit fordert nämlich ein regelmäßiges Erscheinen von Produkten aus Primzahlen an bestimmten Positionen im Zahlenteppich. Wenn man nachweisen kann, dass ein solches regelmäßiges Erscheinen sich nie verifizieren kann, dann hätte man einen indirekten Beweis für die Unendlichkeit von Primzahlzwillingen.

Im vierten Kapitel werden daher Positionen bzw. Orte im Zahlenteppich besprochen, an denen Regelmäßigkeiten und Unregelmäßigkeiten auftreten. Das Herausfiltern solcher Zustände hat den Zweck, Wahrscheinlichkeiten aufzuzeigen, die eher für oder gegen die Unendlichkeit von Primzahlzwillingen sprechen.

Das fünfte Kapitel bespricht die Ergebnisse der vorausgehenden Kapitel paradigmatisch an einer Zahl L. Diese schafft nämlich ein Umfeld, von dem aus betrachtet, sehr viele teils miteinander konkurrierende Voraussetzungen erfüllt sein müssten, damit es irgendwann im Zahlenteppich tatsächlich keine Primzahlzwillinge mehr gebe.

Das Zwischenergebnis dieser Arbeit wird zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit einer Endlichkeit von Primzahlzwillingen äußerst gering ist, eben weil dann viele verschiedene Bedingungen beim Erscheinen neuer Zahlen erfüllt sein müssten.

Das sechste Kapitel bringt mit dem Primzahl-Automat einen noch nie dagewesenen Algorithmus hervor. Durch diesen lässt sich zeigen, wie und wodurch Primzahlen erscheinen.

Diese Erkenntnis ist neu in der Primzahlenforschung. Darüber hinaus ist der Primzahl-Automat nutzbringend in der Besprechung, ob es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt.

Das siebte Kapitel schafft eine Visualisierung der Unendlichkeitsfrage. In den Gegenfragen ist dann meines Erachtens ein logischer Beweis für die Unendlichkeit von Primzahlzwillingen zu entdecken. Denn: Was wäre, wenn es irgendwann im Zahlenuniversum einen letzten Primzahlzwilling gäbe? Was würde dies an den Ordnungen und Unordnungen im Erscheinen von Zahlen verändern?

An verschiedenen Paradigmen bespreche ich Sachverhalte, die eine Endlichkeit von Primzahlzwillingen ausschließen müssen, wodurch letztlich ein Unendlichkeitsbeweis geschaffen wäre. Das Warum dafür, bespreche ich in meinen Schlussbemerkungen.

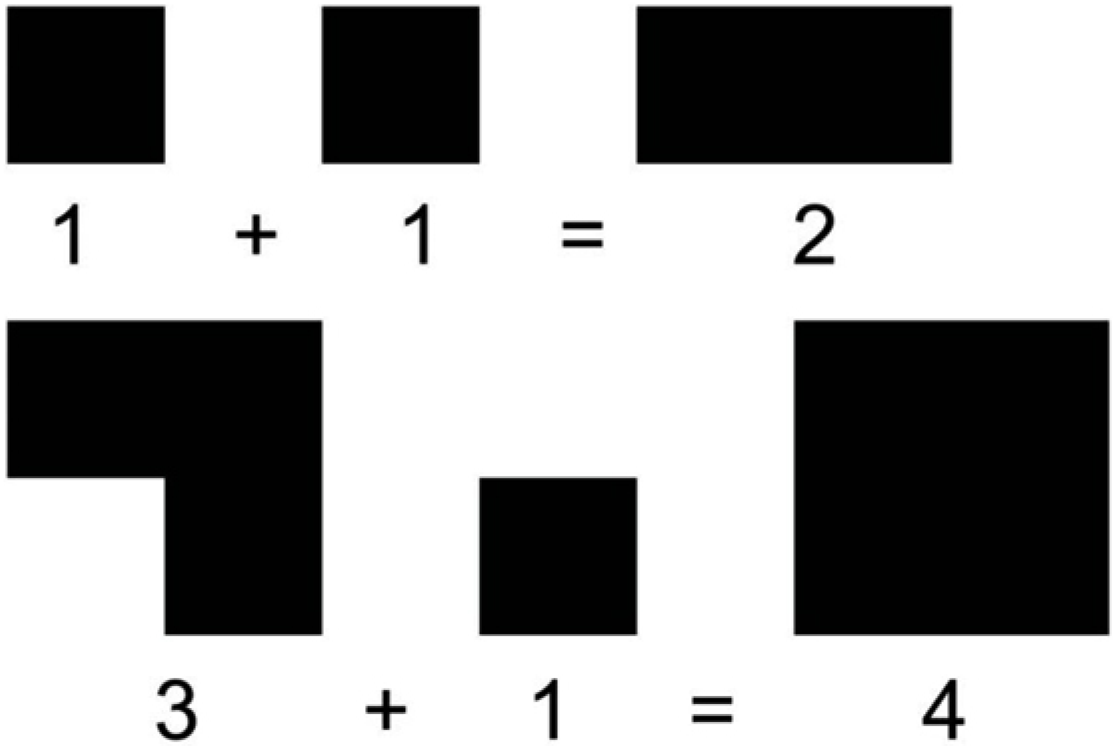
1. Die Entstehung der Primzahlen

1.1 Das Zählen

Es erscheint zunächst banal, wenn man sich die Frage stellt, was überhaupt Zahlen sind. Zahlen sind durch das Abzählen von Dingen entstanden, die sich durch irgendwelche Kennzeichen in einen Sammelbegriff zusammenfassen lassen. Man könnte z.B. die Menschen zählen, die sich zu einer bestimmten Zeit an einem bestimmten Ort befinden oder man zählt, wie viele Äpfel an einem Baum hängen. In diesen Fällen wäre der Sammelbegriff Mensch oder Apfel. Es lassen sich beim Zählen für Dinge sowohl umfassende als auch einschränkende Begriffe wählen. Man könnte sich in einer Zählung dafür entscheiden, jegliches Obst zu berücksichtigen, also nicht danach zu unterscheiden, ob es sich um Äpfel oder Birnen handelt. In diesem Fall wäre der Sammelbegriff also Obst. Für die Zahl, die sich letztlich bildet ist es irrelevant, um welche Art des Gezählten es sich handelt. Wenn jemand beim Zählen z.B. letztlich auf die Zahl 4 kommt, spielt es für das Zustandekommen der 4 keine Rolle, ob der Zählende sich bei den gezählten Gegenständen auf vier Dinge gleicher oder verschiedener Natur bezieht. Für das Zustandekommen der Zahl 4 ist es stattdessen relevant, dass sie sich auf vier Einheiten bezieht. Diese können zu sich selbst genommen in der Regel, nicht derselben, wohl aber dergleichen Natur sein. Daher macht es wenig Sinn, einen einzigen Apfel so zu zählen, als hätte man vier Äpfel.

Beim Zählen geht es somit um bestimmte Einheiten. Zur Beschreibung der Anzahl dieser Einheiten wurden Zahlen geschaffen. Jede Zahl steht daher für die Häufigkeit des

Vorhandenseins einer bestimmten Einheit. Die 2 beschreibt zwei Einheiten und die 4 beschreibt vier Einheiten.



1.2 Die Addition

Der Mensch stellte meines Erachtens irgendwann fest, dass das Zählen von Dingen mühsam wurde. Zu dieser Erkenntnis kam er potentiell dann, wenn er Dinge bereits gezählt hatte, zu jenen nun aber neue Dinge hinzukamen. Hier ein mögliches Beispiel:

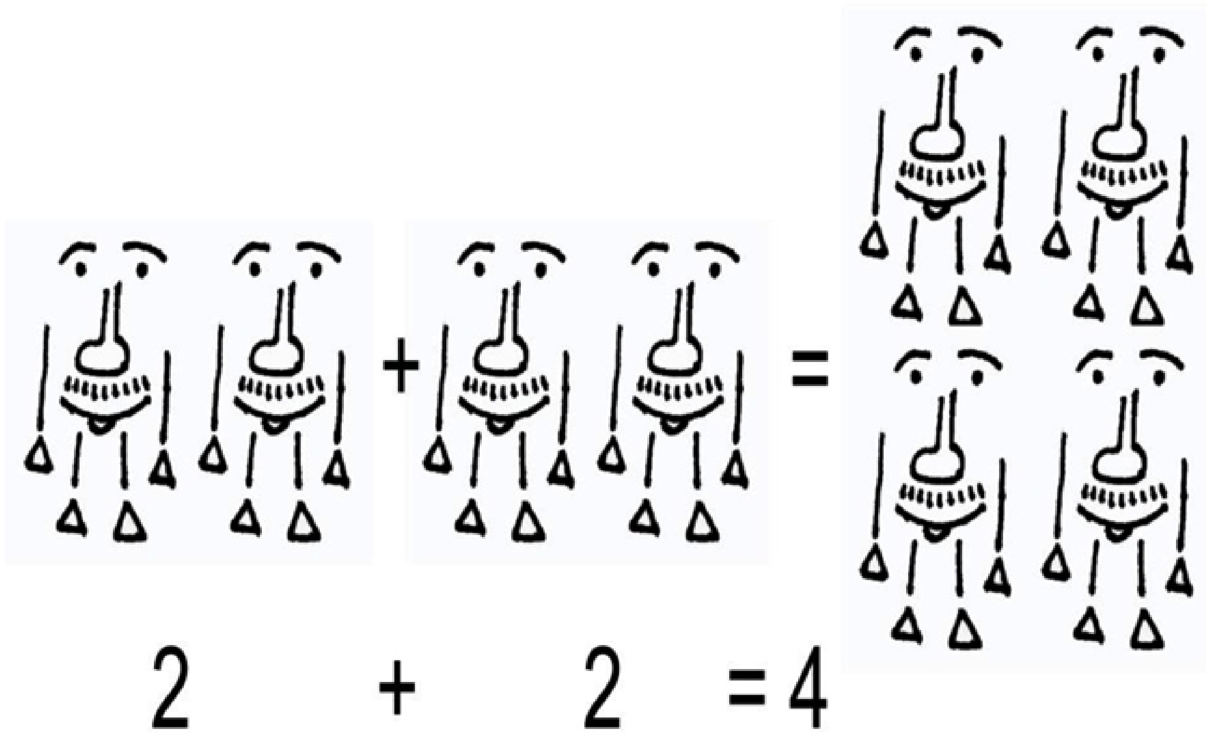
Wenn ein Bauer fünf Kühe besaß, irgendwann dann aber zwei dazu bekam, hatte er bis dato zum Feststellen, wie viele Kühe er besaß, nur die Möglichkeit alle Kühe zusammen noch einmal zu zählen. Er musste also wieder bei der ersten Kuh beginnen, obwohl er sie schon einmal gezählt hatte. Er zählte also alle Kühe, beginnend von den ersten fünf und endend bei den neuen beiden. Sein Resultat am Ende des Zählens offenbarte sieben Kühe. Vielleicht war es gerade dieser Bauer, der irgendwann feststellte, dass sich bestimmte Sachverhalte beim Zählen wiederholen. Vielleicht bemerkte er, dass sich immer genau dann die Zahl 7 offenbart, wenn man zu fünf Dingen zwei dazu bekommt.

Diese Wiederholungen beim Zählen entdeckten womöglich nicht nur Bauern, sondern auch anderen Menschen. Ein anderer stellte vielleicht fest, dass sich das Resultat 5 immer dann ergibt, wenn man zu zwei Dingen drei dazu gibt. Wieder ein anderer stellt fest, dass gleiche Resultate aus dem Zusammenfügen unterschiedlicher Mengen entstehen können. Dieser war es, der feststellte, dass man nicht nur aus fünf plus zwei Dingen, sieben Dinge herausbekommt, sondern auch aus drei plus vier Dingen.

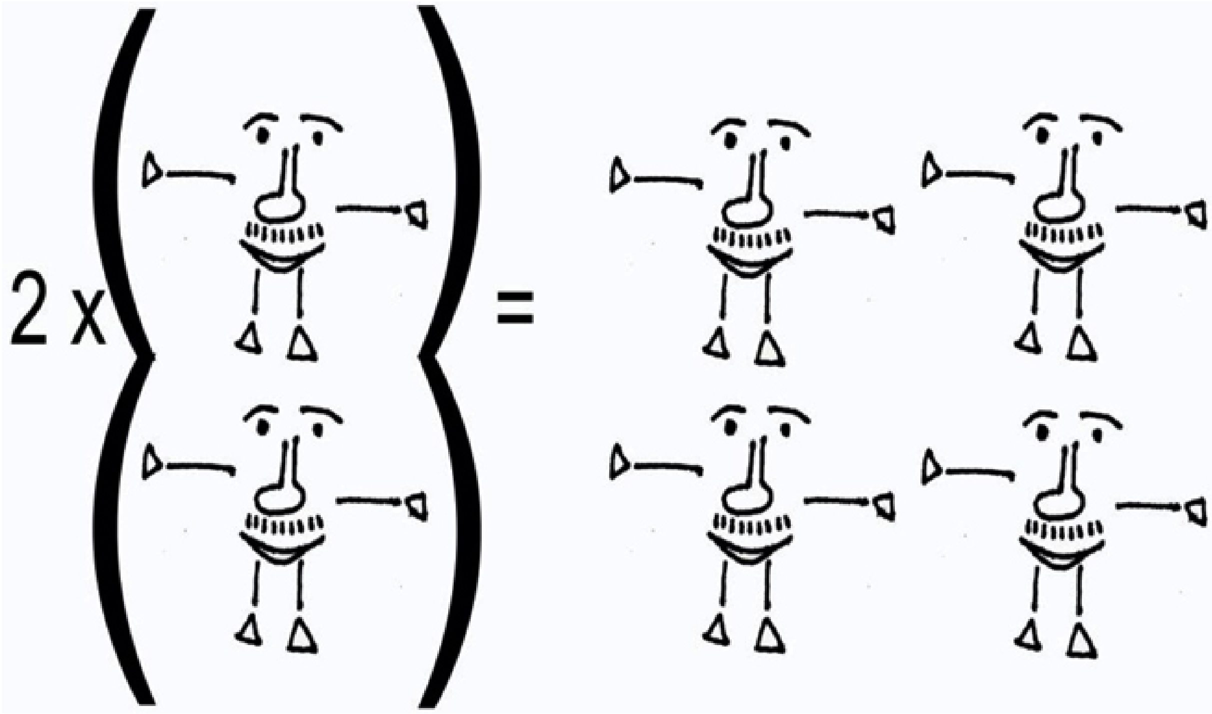
Die Entdeckungen durch Menschen, dass man beim Zusammenfügen bestimmter Dinge eine bestimmte Größe herausbekommt, häuften sich. Daher taten sie sich zusammen und entwickelten ein System, das alle Sachverhalte bzgl. des Dazu Fügens von Dingen umschreiben sollte. Die Rede ist von dem Additionssystem. Es beschreibt das Zusammenfügen von Bündeln, die aus einer bestimmten Anzahl von Einheiten bestehen.

1.3 Die Multiplikation

Dank des Additionssystems konnte man mit einfachen Operationen die Gesamtheit von Einheiten errechnen, die sich durch das Zusammenfügen von Bündeln gleicher oder unterschiedlich großer Anzahlen von Einheiten ergaben.



Irgendwann entdeckten die Menschen, dass sich bestimmte Additionsschritte vereinfachen lassen. Dies ist insbesondere immer dann der Fall, wenn man Bündel zusammenfügt, die eine gleich große Anzahl von Einheiten besitzen. Das Feststellen, wie groß die Anzahl von Einheiten im Resultat ist, erfolgt durch eine andere Rechenoperation, der Multiplikation. Anders als bei der Addition werden hier die Bündel nicht mehr zusammengefügt bzw. zusammengezählt, sondern es wird hierbei zunächst die Häufigkeit der gleich großen Bündel von Einheiten festgestellt, um jene dann mit der Größe der Einheiten innerhalb eines Bündels zu multiplizieren. Die Rechenoperation 2 + 2 = 4 führt zwar zu dem gleichen Resultat wie die Rechenoperation 2 x 2 = 4, aber dennoch sind mit beiden Rechenoperationen unterschiedliche Sachverhalte gemeint.



In der Addition 2 + 2 beschreibt jede 2 ein Bündel mit zwei Einheiten. In der Multiplikation wird nur ein Bündel mit zwei Einheiten beschrieben. Die andere Zahl 2 beschreibt hingegen, dass dieses Bündel zweimal vorhanden ist.

Der Unterschied wird vor allem in den Rechenoperationen sichtbar, die zu anderen Ergebnissen führen, obwohl im Ursprung der Berechnung gleiche Zahlenwerte benutzt wurden.

So ergibt die Addition 3 + 3 = 6 ein anderes Resultat als die Multiplikation 3 x 3 = 9. Um diese Multiplikation in einer Addition zu beschreiben, müsste man stattdessen 3 + 3 + 3 schreiben, weil man eben drei Bündel mit jeweils drei Einheiten zusammengefasst hat.

1.4 Relevanz

Die vorausgehenden drei Abschnitte erscheinen zunächst banal, weil wir die einfachen Rechenoperationen der

Arithmetik ja bereits in der Grundschule erlernt haben. Doch durch den alltäglichen Umgang mit Hochleistungsrechnern verlieren wir vielleicht gerade den Blick auf die einfachen nahe liegenden Rechenoperationen. Doch vielleicht sind gerade hier die entscheidenden Ursachen für die Geheimnisse um die Primzahlen zu entdecken. Denn dass es generell Primzahlen gibt, hängt mit der Kombination des Additions- und Multiplikationssystem zusammen.

1.5 Die Kombination des Additions- und Multiplikationssystems

Wie zuvor ausgeführt beziehen sich beide Systeme auf das Abzählen von Einheiten und vereinfachen dieses auf ihre spezifische Weise.

Beim Abzählen natürlicher Zahlen erscheinen diese auf ihre einmalige und im Hier und Jetzt bestehende individuelle Weise. Die jeweilige Zahl erscheint beim Zählen in dem Moment, in dem man Bezug zu der dazugehörigen Einheit schafft.

Das Entstehen einer Zahl im Additionssystem funktioniert jedoch auf eine andere Weise. Man fügt Bündel von Einheiten zusammen. Als Resultat erhält man eine Zahl, die durchaus Zahlen auslässt, deren Gebrauch vorher beim Zählen noch notwendig war.

Bei der Rechenoperation 2 + 3 = 5 erscheinen so z.B. nicht die Zahlen 1 und 4, obwohl diese beim Raufzählen zur 5 benutzt worden wären. Neu an der Addition im Vergleich zum Zählen ist auch, dass man zu einer gleichen Summe auf verschiedene Arten kommen kann. So lässt sich die 5 nicht nur aus 2 + 3 erzeugen, sondern auch aus 0 + 5, 1 + 4, 3 + 2, 4 + 1 und 5 + 0. Lässt man die Rechenschritte außer Acht, in denen ein Summand die Null und der andere äquivalent der Summe ist (z.B. 0 + 5 und 5 + 0) lässt sich sagen, dass sich jede Zahl $x > 1$ aus $x – 1$ verschiedenen Rechenoperationen mit natürlichen Zahlen erzeugen lässt.

An dieser Stelle wird das Multiplikationssystem interessant, weil sich eine natürliche Zahl x nicht auf eine so vielfache Art und Weise erzeugen lässt. Viel mehr noch haben verschiedene Zahlen hier eine andere Bedeutung als in der Addition. In der Addition hatte die 0 die Bedeutung, dass man etwas hatte, aber nichts dazu bekommt bzw. dass man noch nichts hatte und etwas dazu bekommt. Das Resultat ist in diesem Fall äquivalent mit dem, was man schon hatte bzw. mit dem das man dazubekommt.

In der Multiplikation hingegen spielt die Null insofern nur eine Rolle, da man die Häufigkeit von etwas feststellt, dass man nicht hat, demzufolge, bleibt auch das Resultat immer Nichts bzw. eine Null. 5 x 0 bzw. 0 x 5 ist und bleibt gleich Null.

Die 1 beschreibt in der Multiplikation einen fein zu unterscheidenden Sachverhalt. In der Addition entsteht die Zahl 1 durch das plötzliche Feststellen des Vorhandenseins einer Einheit. In der Multiplikation hingegen wird diese Einheit auf ihre Häufigkeit überprüft und ist diese ebenfalls 1 ergibt sich 1 x 1 = 1.

Für die Entstehung der Zahl 2 ergeben sich in der Multiplikation andere Sachverhalte.

In der Addition gab es drei verschiedene Sachverhalte:

1. Man hatte noch nichts und man bekam nachfolgend ein Bündel mit 2 Einheiten dazu.

   0 + 2 = 2

2. Man besaß eine Einheit und man bekam noch eine dazu.

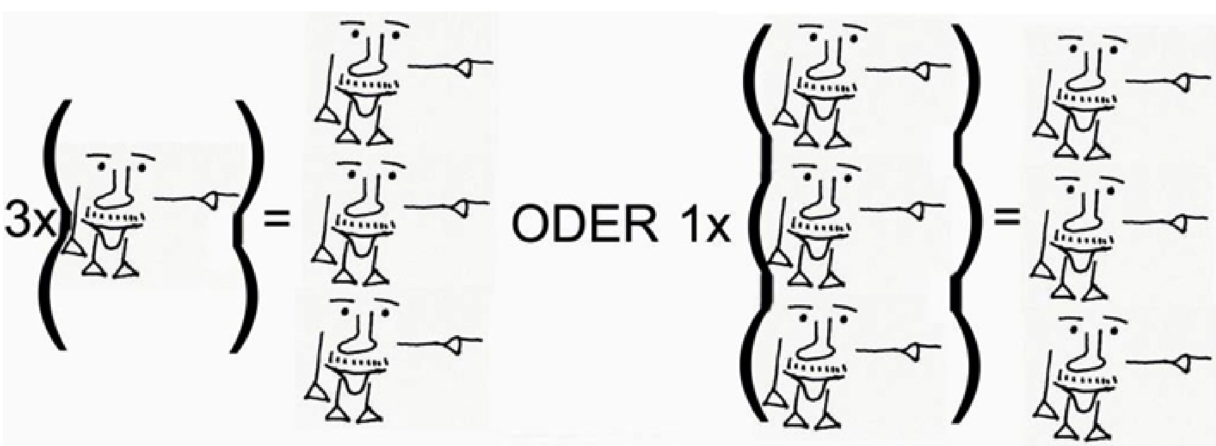
   1 + 1 = 2

3. Man besaß ein Bündel mit zwei Einheiten, man bekam aber nichts dazu, daher blieb alles wie zuvor.

   2 + 0 = 2

In der Multiplikation müssen die Sachverhalte jedoch anders ausgeführt werden, nämlich so, dass man entweder eine Einheit besitzt, die zweimal vorhanden ist (2 x 1 = 2) oder dass man ein Bündel mit zwei Einheiten besitzt, dass eben nur einmal vorhanden ist (1 x 2 = 2).

Interessant bleibt es auch bei der Zahl 3. Diese lässt sich nur in den Rechenoperationen 1 x 3 = 3 oder 3 x 1 = 3 ausdrücken. Zu dem Produkt 3 kommt man nur auf diese beiden Weisen, sofern man als Multiplikatoren und Multiplikanden nur natürliche Zahlen verwendet.



In 1.3 hatte ich bereits den Unterschied der Gleichung 2 x 2 = 4 zur Additionsgleichung 2 + 2 = 4 erläutert. Der Zahl 4 kommt in der Multiplikation eine besondere Bedeutung zu. Sie ist die erste natürliche Zahl, die sich nicht nur aus 1 mit sich selbst multipliziert ergibt, sondern aus zwei anderen

Multiplikatoren bzw. Multiplikanden. In diesem Fall ist die Zahl 2 sowohl der Multiplikator als auch der Multiplikand, der für die Bildung der Zahl 4 verantwortlich ist. Die Zahl 1 ließ sich nur aus sich selbst heraus bilden, die Zahlen 2 und 3 nur aus sich selbst heraus und aus der Zahl 1, die Zahl 4 jedoch offeriert eine ganz neue Möglichkeit innerhalb der Multiplikation. Sie lässt sich nicht nur aus 1 und sich selbst erzeugen, sondern zudem aus zwei ihr gegenüber unterschiedlichen Multiplikatoren und Multiplikanden. Ein Sachverhalt der innerhalb des Zahlenteppichs der Multiplikation häufig auftaucht.

So sind die Zahlen 6, 8, 9, 10 und 12 ebenso Zahlen, die sich durch andere Multiplikatoren bzw. Multiplikanden bilden lassen, als nur durch sich selbst oder durch 1.

2 x 3 = 6

2 x 4 = 8

2 x 2 x 2 = 8

3 x 3 = 9

2 x 5 = 10

3 x 4 = 12

2 x 6 = 12

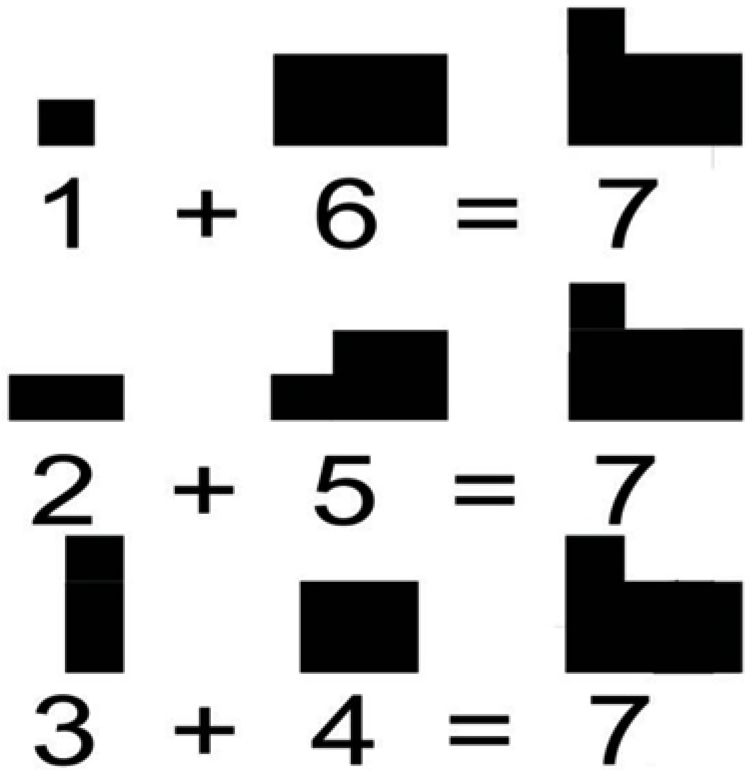
2 x 2 x 3 = 12

Andere Zahlen hingegen entsprechen dem gleichen Sachverhalt wie 2 und 3, sie lassen sich nur durch sich selbst und durch 1 in der Multiplikation bilden. Dazu gehören neben 2 und 3 auch 5, 7, 11 und 13. Solche Zahlen nennt man Primzahlen.

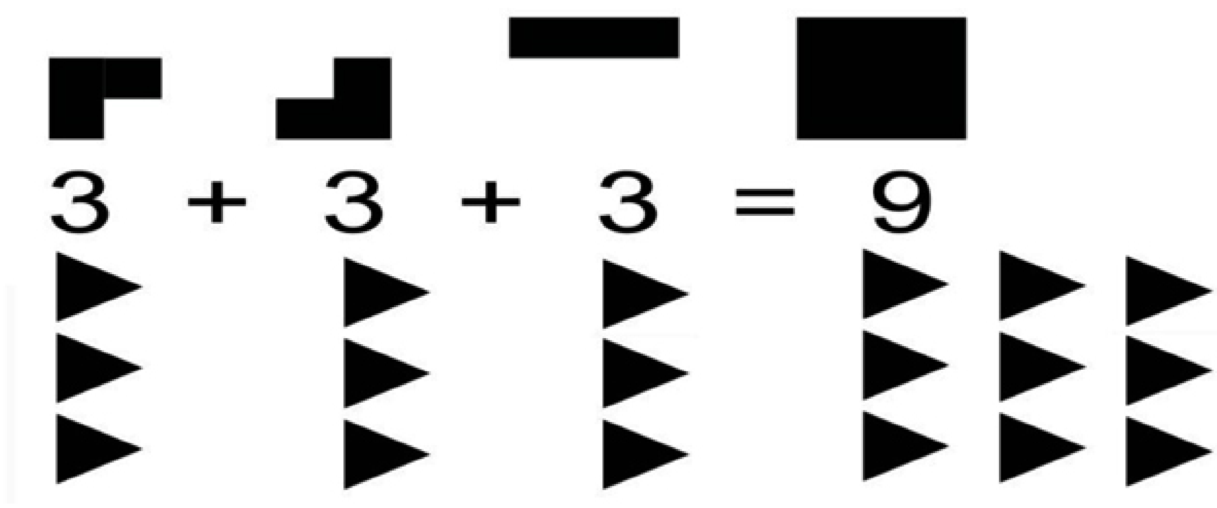
Unter Primzahlen versteht man alle natürlichen Zahlen, die größer als 1 sind und nur durch sich selbst oder 1 teilbar sind.

Die Frage ist nun, wie entstehen diese Primzahlen und warum lassen sie sich in der Multiplikation nicht durch andere natürliche Zahlen bilden. Im Grundprinzip des Zählens erscheinen die Primzahlen als charakterschwache Zahlen. Hier beschreiben sie lediglich die Häufigkeit einer bestimmten Einheit. In der Addition erhalten sie ihren Charakter dadurch, dass Bündel mit einer bestimmten Anzahl von Einheiten zu einem großen Bündel zusammengefügt werden. Abgesehen von der Zahl 2 lassen sich alle Primzahlen nur durch Bündel bilden, von denen mindestens eins eine andere Anzahl an Einheiten hat, als die anderen Bündel. Allerdings muss man dabei beachten, dass mindestens eins der Bündel nicht nur aus der Einheit 1 besteht bzw. nicht nur aus einem Bündel, deren Anzahl an Einheiten der Endsumme entspricht.

In Beachtung dieser Regel lässt sich die Zahl 3 so nur aus einem Bündel mit einer Einheit und einem Bündel mit zwei Einheiten bilden. Die Zahl 5 lässt sich aus einem Bündel mit zwei Einheiten und einem Bündel aus drei Einheiten bilden. Die Zahl 7 hat die Möglichkeiten sich aus einem Bündel mit einer Einheit und einem Bündel mit 6 Einheiten bilden zu lassen (1 + 6 = 7), aus einem Bündel mit 2 Einheiten und einem mit 5 Einheiten (2 + 5 = 7) oder aus einem Bündel mit 3 Einheiten und einem aus 4 Einheiten (3 + 4 = 7). Doch in keinem der Gleichungen erscheinen die Bündel mit einer gleich großen Anzahl an Einheiten.



Zunächst könnte man vermuten, dass es daran liegt, weil alle Primzahlen (außer 2) ungerade Zahlen sind, sie daher keine einheitliche Bündelung zulassen. Doch nimmt man die ungerade nicht prime Zahl 9 zeigt sich, dass diese sich zumindest in drei Bündel mit jeweils drei Einheiten aufteilen lässt.



Ebenso ergeht es der nicht primen Zahl 12. Auch sie lässt sich in gleichmäßige Bündel aufteilen. Sie lässt sich in 2 Sechserbündel, in 3 Viererbündel, in vier Dreierbündel oder in 6 Zweierbündel unterteilen.

Ich stelle somit fest, dass eine nicht prime Zahl sich immer in gleichmäßige Bündel unterteilen lässt, die nicht nur Bündeln entsprechen, die nur eine Einheit besitzen oder einem Bündel, deren Anzahl an Einheiten so groß ist, wie die Zahl selbst. Primzahlen hingegen lassen sich nur in Bündel aufteilen, deren Anzahl an Einheiten nicht größer als 1 ist oder sie lassen sich nur in ein Bündel aufteilen, dessen Anzahl an Einheiten der Primzahl selbst entspricht.

Additionssystem

0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Multiplikationssystem

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225

Wenn man das Additionssystem betrachtet, erkennt man schnell, dass sich jede Zahl durch Addition aus zwei ihr gegenüber, kleineren Zahlen bilden lässt. Dabei kann jede ihr gegenüber, kleinere Zahl Summand sein. In dem Multiplikationssystem ist dies nicht möglich. Für die Bildung einer Zahl sind als Multiplikatoren und Multiplikanden nur ganz bestimmte Zahlen möglich. Aus der 1 oder sich selbst, lässt sich jede Zahl durch Multiplikation bilden, aber nicht aus anderen Zahlen. So lässt sich die Zahl 8 aus den beiden Zahlen 2 und 4 bilden. Für die Zahl 9 ist nur die 3 als natürlicher Multiplikator und Multiplikand möglich. Die Zahl 12 hingegen lässt 4 andere Zahlen für ihr Zustandekommen zu, nämlich 2, 3, 4 und 6.

Dass Primzahlen außer 1 und sich selbst keine natürlichen Teiler besitzen, liegt daran, dass sie sich nicht in gleichmäßige Bündel aufteilen lassen.

Die Multiplikation ist die verkürzte Beschreibung der Bündelung innerhalb der Addition.

So wird 3 + 3 + 3 + 3 zu 4 x 3 oder 6 + 6 zu 2 x 6 verkürzt. Die Multiplikation beschreibt somit die Häufigkeit von Bündeln mit einer bestimmten Anzahl von Einheiten auf verkürztem Weg. Dies erleichtert vor allem dann die Rechenoperationen, wenn man die gesamte Anzahl an Einheiten von ganz vielen Bündeln mit gleichgroßer Anzahl an Einheiten herausbekommen möchte.

Wie bereits gezeigt wurde, lassen sich Primzahlen nicht in exakt mehrere gleichgroße Bündel, die größer als 1 sind, aufteilen. Selbst wenn man die Anzahl der Bündel erhöht, gelingt dies nicht. Benutzt man für die Zahl 7 zwei Bündel erhält man eins mit 3 Einheiten und ein anderes mit 4 Einheiten (3 + 4 = 7). Benutzt man drei Bündel erhält man zwei mit jeweils 2 Einheiten, aber auch ein weiteres mit 3 Einheiten. Es kann also keinen anderen Weg innerhalb der Multiplikation geben eine Primzahl aus anderen natürlichen Zahlen zu bilden, als aus 1 oder sich selbst.

Dennoch erscheinen Primzahlen im Multiplikationssystem, dies jedoch nur in der ersten Zeile bzw. Spalte unterhalb bzw. neben den Multiplikatoren bzw. Multiplikanden. Hier schaffen sie eine Ausgangsbasis für das Bilden höherer Zahlen. Ohne die Primzahlen ist das Multiplikationssystem nämlich genauso wenig denkbar. Würden die Primzahlen keine Grundlage bilden, kämen sie also auch nicht als Multiplikatoren und Multiplikanden in Frage. Das System würde über die Zahl 1 nicht hinaus kommen oder nur als reines Abzählsystem die Zahlen erschaffen.

Das Multiplikationssystem ist zwar durch die Vereinfachung des Zusammenfassens von gleichmäßigen Bündelungen aus der Addition heraus entstanden, ansonsten schafft es aber keine Transparenz zu dem Additionssystem. Wenn wir beide Systeme gegenüberstellend betrachten, erkennen wir, dass beide völlig voneinander verschiedene Sacherverhalte beschreiben. Im Multiplikationssystem erscheinen außerhalb der ersten Spalte bzw. Zeile keine Primzahlen. Dazu kommt, dass durch die Multiplikation sehr schnell viel höhere Zahlenwerte erreicht werden, als bei der Addition. So ergibt die Summe aus 15 + 15 nur 30, wobei das Produkt aus 15 x 15 bereits 225 ergibt. Das liegt natürlich daran, weil mit 15 + 15 auch nur 2 x 15 beschrieben wird.

Für die Bildung einer natürlichen Zahl sind nicht so viele Multiplikationen aus natürlichen Zahlen möglich als bei der Addition. Dennoch werden alle Zahlen als Ausgangsbasis verwendet. Wenn ich meine beiden Systeme betrachte, die als Ausgangsbasis jeweils 15 Zahlen für beide Summanden bzw. Multiplikator und Multiplikand vorgeben, entdecke ich, dass die Anzahl der möglichen Gleichungen gleich ist. In beiden Systemen erscheinen 225 Gleichungen. Dennoch erreicht die höchste Summe des Additionssystems nur die Zahl 30. Allein die Zahl 16 lässt sich in fünfzehn

Gleichungen ausdrücken, deren Summanden kleiner oder gleich 15 sind.

Der Grund, warum in der Addition jede natürliche Zahl x > 1 generell aus x – 1 Gleichungen gebildet werden kann, deren Summanden größer als 0 sind, wurzelt darin, dass sich jede Zahl x auf die generelle Häufigkeit von Einheiten bezieht und jene lassen sich eben in alle möglichen kleineren Bündel von Einheiten aufteilen. Jede höhere Zahl hat eine Einheit mehr als die vorausgehende. Der Zahlenstrahl erweitert sich um eine Einheit und da diese eben auch in ein Bündel mit einer Einheit beschrieben werden kann, hat die höhere Zahl zur vorausgehenden eben auch eine Gleichung mehr.

In der Multiplikation funktioniert das nicht, weil eine nächst gebildete Zahl, nicht nur eine Einheit mehr dazu bekommt, sondern gleich ein Bündel mit einer bestimmten Anzahl an Einheiten. Wenn man 14 Bündel besitzt, mit jeweils 15 Einheiten, so beträgt die gesamte Anzahl an Einheiten 210. Wenn man ein Bündel dazu bekommt, erweitert sich die Anzahl der Einheiten eben nicht nur um eine Einheit, sondern um 15 Einheiten.

14 x 15 + 15 = 225.

Weil das neue Bündel einer Anzahl an Einheiten entsprach, die mit den vorherigen Bündeln gleich ist, lässt sich diese Rechenoperation auch in 15 x 15 = 225 beschreiben. Hätte man jedoch nur ein Bündel mit 14 Einheiten dazubekommen, wäre es nicht möglich die 225 in einer reinen Multiplikation aus einer Fünfzehnerbündelung zu beschreiben.

14 x 15 + 14 = 224.

Zwar lässt sich die 224 in andere Bündelungen aufteilen, z.B. in 16 Vierzehnerbündel oder in 28 Achterbündel, aber nicht in Fünfzehnerbündeln.

Wenn man den Übergang von 14 x 15 = 210 zu 15 x 15 = 225 betrachtet, entdeckt man, dass die Fünfzehnerbündelungen von der vorausgehenden zur nächsten Gleichung einen Sprung machen, nämlich genau um 15 Einheiten. Dadurch entsteht zwischen 210 und 225 eine Lücke, in denen es keine Fünfzehnerbündelungen aus natürlichen Zahlen, innerhalb der reinen Multiplikation gebildet, geben kann. Die Zahlen 211 bis 224 müssten daher aus Bündelungen anderer Größe entstehen, aber nicht durch die Zahl 15. Die Zahl 224 lässt sich so z.B. in Bündel der Größe 2, 8, 14 u.a. aufteilen.

Zwei andere Zahlen dieses Bereichs lassen hingegen keine Bündelung aus mindestens zwei Zahlen gleicher Größe zu. In diesem Bereich sind es die Zahlen 211 und 223. Beide Zahlen sind daher Primzahlen. Sie lassen sich nur durch 1 oder durch sich selbst teilen.

Es zeigt sich also, dass sich durch die Sprünge, die Multiplikationen von Bündeln hervorbringen, Lücken von Zahlen ergeben, die nicht in mehrere gleichmäßige Bündel größer 1 aufgeteilt werden können.

Meine nächste Frage ist daher, warum werden manche Zahlen, nämlich die Primzahlen, durch die Sprünge so übergangen, dass sie diese Bündelungen nicht zulassen.

Auffällig innerhalb des Multiplikationssystems ist, dass es manche Zahlen gibt, die sich auf verschiedene Weise Bündeln lassen. Mein Verdacht ist, dass sie dafür verantwortlich sind, dass es zu keiner Bildung von

Primzahlen kommt, die aus mehreren Bündeln größer 1 bestehen.

Ein auffälliges Exemplar ist die Zahl 12, die im Verhältnis ihrer Größe bereits vier verschiedene Bündelungen aus Zahlen größer 1 zulässt.

Sie kann sowohl aus Zweier-, Dreier, Vierer- und Sechserbündeln gebildet werden. Dies heißt aber auch, dass die Zahlen 2, 3, 4, und 6 erst wieder durch die nachfolgend zweite, dritte, vierte oder sechste Zahl in Bündelungen verwendet werden können. So lässt sich die 14 erst wieder in Zweierbündel, die 15 in Dreierbündel, die 16 in Viererbündel und die 18 in Sechserbündel aufteilen. Gleiches gilt auch für die Zahlen, die der 12 vorausgehen, so kann die Aufteilung in Zweierbündel erst wieder ab der Zahl 10, die Aufteilung in Dreierbündel erst ab der Zahl 9, die Aufteilung in Viererbündel erst ab der Zahl 8 erfolgen. Die Zahlen 11 und 13, die der Zahl 12 unmittelbar vorausgehen bzw. nachfolgen, können somit nicht durch eine Zweier-, Dreier, Vierer- oder Sechserbündelung beschrieben werden. Andere Bündelungen mit jeweils 5 oder 7 Einheiten sind im Umfeld von 11 und 13 schon durch 7, 10, 14 und 15 besetzt, so dass diese für 11 und 13 genauso wenig in Frage kommen. Die Zahlen 11 und 13 sind somit Primzahlen, weil sie sich außer in Einer oder Elfer- bzw. Dreizehnerbündel nicht aufteilen lassen.

Die Zahlen 11 und 13 wurden in gewisser Weise durch die Häufung möglicher Bündelungen auf der Zahl 12 ausgelassen. Jeder Sprung des Zweier-, Dreier-, Vierer- und Sechserbündels vorausgehend oder nachfolgend der Zahl 12 verhinderte sozusagen ein Auftreffen jener Bündel auf die Zahlen 11 und 13. Da diese eben auch nicht von weiteren gleichgroßen Bündeln erfasst wurden, wurden sie zu Primzahlen.

Das System des Zählens ist ein System gleichmäßig großer Schritte. Jede nächst größere Zahl ist um exakt eine Einheit größer. Bei der Multiplikation verhält es sich hingegen anders. Von einer bestimmten Zahl ausgehend gehen die zur Bildung beteiligten Multiplikatoren bzw. Multiplikanden in einer ungleichmäßig- großen Schrittanzahl auf die nächste Zahl zu. Wie groß die Schritte bzw. Sprünge sind, hängt von ihrer Größe ab, bzw. auf wie viele Bündel sie sich mit wie vielen Einheiten beziehen.

Im Multiplikationssystem vollziehen sich verschiedenartige Schritte, die ich mit dem Begriff ‚Zeit' in Beziehung setzen möchte. Eine größere Zahl in der Funktion eines Multiplikators bzw. Multiplikanden macht größere Schritte. Sie erreicht schneller eine höher liegende Zahl. Dafür hinterlässt sie aber auch eine größere Lücke an Zahlen, an dessen Bildung sie nicht beteiligt sein kann. Im nachfolgenden Kapitel möchte ich das Multiplikationssystem als ein spezielles Zeitsystem betrachten, dass in einer neuen Art und Weise die Entstehung von Zahlen und Primzahlen fixiert.

2. Das Multiplikationssystem als zeitliches System

Warum ich das Multiplikationssystem als Zeitsystem betrachten möchte, begründe ich zunächst mit der Zahl 12.

Wenn ich die Aussage mache, dass 12 = 12 ist, gehe ich erst einmal davon aus, dass diese Aussage wahr ist. Mit dem Gleichheitszeichen „=" beschreibe ich, dass ein Sachverhalt mit einem anderen in gleicher Natur erscheint, doch er muss deshalb keineswegs identisch mit dem Sachverhalt sein.

Wenn ich die Aussage 12 = 12 betrachte, sehe ich, dass die erste 12 mit der zweiten 12 schon aus dem Grunde nicht identisch sein kann, weil sich die eine rechts des Gleichheitszeichens, die andere links des Gleichheitszeichens befindet.

In den beiden Gleichungen 2 x 6 = 12 und 3 x 4 = 12 wird zwar der gleiche Sachverhalt im Resultat 12 beschrieben, aber durch die verschiedenen Rechenoperationen wird nicht die gleiche Entstehungsgeschichte erzählt. Meine Frage lautet daher, worin, abgesehen von unterschiedlichen Zahlenwerten der Multiplikatoren bzw. Multiplikanden, der Unterschied zwischen beiden Rechenoperationen besteht.

Sicherlich liegt der Unterschied teils in der Größe der Bündelung und der Häufigkeit jener Bündel. Doch meine Frage geht weiter zurück, denn ich möchte verstehen, was der Unterschied ist und welche Bedeutung er hat. Zur Ergründung gehe ich wieder auf die Entstehung der Zahlen innerhalb der verschiedenen Operationen zurück. Beim reinen Raufzählen benötigt man von der Zahl 1 beginnend zwölf Zähloperationen um zu der Zahl 12 zu gelangen.

In der Multiplikation kann sich die Anzahl der Zähloperationen verkürzen. In der Entscheidung, eine Rechenoperation mit natürlichen Zahlen in der Multiplikation durchzuführen, wurzelt auch das Wissen darüber, dass man die Gesamtanzahl aller Einheiten gleichgroßer Bündel ermitteln will. Hätte man dieses Wissen nicht, hätte man sich zur Ermittlung der Gesamtanzahl möglicherweise ja auch für die Operationen Abzählen oder Addition entschieden. Insofern geht der Entscheidung für die Multiplikation eben auch die Bedingung voraus, dass es sich bei den Bündeln um gleichgroße Bündel handelt. Mit dieser Bedingung im Hinterkopf ergeben sich für die Rechenoperationen 2 x 6 = 12 und 3 x 4 = 12 zwei voneinander verschiedene Sachverhalte.

Ich betone noch einmal, dass die Entscheidung zur Multiplikation das Wissen darüber voraussetzt, dass es sich bei den Bündeln um gleichgroße Bündel handelt. (Dies wurde vorher schon einmal ermittelt oder es ist aufgrund einer bestimmten Form des Bündels direkt erkennbar). Insofern reicht es aus, wenn wir vor dem Rechenschritt nur die Anzahl an Einheiten eines Bündels ermitteln. Dazu könnten wir über das Abzählen gelangen. Im Falle, dass der Multiplikator für die Häufigkeit von Bündeln steht und der Multiplikand für die Anzahl von Einheiten, benötigen wir für das Ermitteln des Multiplikanden in der Gleichung 2 x 6 sechs Zähloperationen und in der Gleichung 3 x 4 vier Zähloperationen. Das Ermitteln der Häufigkeit (Multiplikator) von Bündeln erfordert weitere Zähloperationen. In der Gleichung 2 x 6 sind dies zwei weitere Zähloperationen und in der Gleichung 3 x 4 drei Zähloperationen. Daraus ergibt sich, dass mit dem Wissen, dass es sich um gleichgroße Bündel handelt, die Gleichung 2 x 6 insgesamt acht

Zähloperationen erfordert, wobei die Gleichung 3 x 4 nur insgesamt sieben Zähloperationen erfordert. Wenn die Zähloperationen in der gleichen Geschwindigkeit verlaufen, ergibt sich daraus ein kurioser

neuer Sachverhalt. Dies würde nämlich bedeuten, dass die 12, die aus 3 x 4 gebildet wird, früher zustande kommt, als die 12 aus 2 x 6. Beide Produkte ergeben zwar 12, erscheinen aber um eine Zähloperation zeitlich versetzt.

Zur Ermittlung der Zähloperationen gelange ich, indem ich den Multiplikator und den Multiplikanden addiere. Die zeitliche Versetzung zur Entstehung eines Produktes gleichen Zahlenwertes kann aber noch viel größer sein. Bereits bei den Multiplikationen natürlicher Zahlen, die zur Zahl 24 führen, liegt die Summe der Zähloperationen bei 4 x 6 bei 10, bei 3 x 8 bei 11 und bei 2 x 12 bei 14 Zähloperationen.

Die Relevanz, warum ich das Multiplikationssystem als Zeitsystem erfasse, liegt in dem Grund, dass ohne Berücksichtigung der zeitlichen Abläufe innerhalb des Systems keine erkennbare Ordnung geschaffen werden kann, die Rückschlüsse darüber gibt, warum und vor allem an welchen Stellen Primzahlen entstehen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225

Das obige Multiplikationssystem zeigt den Wirrwarr. Es beschreibt die Abläufe bei den Multiplikationen ausgehend von den Multiplikatoren und Multiplikanden. Wie ich am Produkt 12 bereits gezeigt habe, erscheint diese zeitlich versetzt. Dies bestätigt sich auch im Multiplikationssystem.