



Jörg Witte

Genese des Zahl- und Zeitbegriffs aus der Erinnerung

Von archaischen Kulturen bis zur Renaissance



$$(a + b)^1 = 1a + 1b,$$

$$(a + b)^2 = 1a^2 + 2ab +$$

$$(a + b)^3 = 1a^3 + 3ab^2 + 3a^2b +$$

$$(a + b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 +$$

Wallstein

$$(a + b)^5 = 1a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + 1b^5$$

Jörg Witte

Genese des
Zahl- und Zeitbegriffs
aus der Erinnerung

*Von archaischen Kulturen
bis zur Renaissance*



WALLSTEIN VERLAG

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Wallstein Verlag, Göttingen 2020

www.wallstein-verlag.de

Umschlaggestaltung: Susanne Gerhards, Düsseldorf.

Das Foto zeigt die Vorder- und Rückseite des Ischango-Knochens, der 1950 im damaligen Belgisch-Kongo entdeckt wurde und sich im Museum für Naturwissenschaften in Brüssel befindet.

ISBN (Print) 978-3-8353-3841-8

ISBN (E-Book, pdf) 978-3-8353-4568-3

ISBN (E-Book, epub) 978-3-8353-4569-0

Inhalt

Vorwort

Einleitung

1 Zeit und Zahl in der Erinnerungskultur der Neuzeit

Prolog

Der Mensch der Neuzeit

Episodisches Erinnern während der Renaissance

Perspektive

Lineare Zeit

Ordinalzahlen

Reelle Zahlen

Fazit

2 Merken und Erinnern, Zählen und Rechnen

Prolog

Merkzeichen

Rekursives Erinnern

Zählen

Rechnen

Zahlssysteme und Merkzeichen

Fazit

3 Phänomene des Erinnerns und Wahrnehmens

Prolog

Episodisches und semantisches Erinnern

Vertrautheit und Wiedererkennen

Prozedurales Gedächtnis

Episodisches Erinnern und neuzeitliche Wissenschaft

Wahrnehmen und Beobachten

Der Gegenwartsmoment

Phänomene des Bewusstseins und Naturwissenschaft

Fazit

4 Zahl- und Zeitbegriffe

Prolog

Was ist ein Begriff – oder wie wir begreifen

Mythische Bilder

Vorbegriffliche Konzepte

Die Kardinal- und Ordinalzahlen

Begriffe mit Merkmalen der Bewegung

Zyklische und lineare Zeit

Zahl- und Zeittypen in einer Erinnerungskultur

Zahl, Zeit und Erinnerung bei Kant und Helmholtz

Fazit

5 Zeit und Zahl in der antiken griechischen Erinnerungskultur

Prolog

Antike semantische Erinnerungskultur

Zyklische Zeit bei Platon

Der Zahlbegriff bei Euklid

Antike Mythen

Fazit

6 Eine Entwicklungslogik

Prolog

Vertraut-Sein

Semantisches Erinnern

Episodisches Erinnern

Zusammenfassung

Glossar

Literaturverzeichnis

Anmerkungen

Vorwort

Mittlerweile blicke ich auf jahrzehntelange Erfahrungen in der Hochschullehre der Mathematik zurück. Immer wieder erlebe ich, dass die abstrakten, mathematischen Begriffe vielen Studierenden erhebliche Schwierigkeiten bereiten. Mitunter sehen sie als Alternative nur das sture Einpauken von Rechenregeln, was jedoch nicht nur an einer Hochschule unbefriedigend ist. Die modernen mathematischen Begriffe sind historisch erst sehr spät, nach einer langen Entwicklungsgeschichte, entstanden. Die Babylonier kannten noch keinen Zahlbegriff, entwickelten aber bereits elaborierte Rechentechniken. Wie also ist der Zahlbegriff historisch entstanden?

Ein zweiter Entwicklungsstrang zu diesem Buch entstand, als ich mich als junger Mann intensiv mit einer These des amerikanischen Linguisten Benjamin Lee Whorf auseinandersetzte. Er war von Haus aus Chemiker und arbeitete in einer Versicherung, wo er die Ursache von Bränden ermittelte. Eines Tages brach ein Feuer aus, als Arbeiter während der Reinigung eines leeren Tanks rauchten. Sie hatten sich unter dem Begriff »leerer Tank« die Abwesenheit von entzündlichen Stoffen vorgestellt. Whorf begann sich neben seiner Versicherungstätigkeit mit dem Einfluss der Sprache auf das Denken auseinanderzusetzen und erforschte zu diesem Zweck die Sprache der Hopi-Indianer. Sie unterscheidet sich erheblich vom Englischen sowie von allen anderen indogermanischen Sprachen. Ihre Grammatik kennt keine Zeiten wie Gegenwart, Vergangenheit und Zukunft. Whorf schloss daraus, dass ein Tag nicht vergehe, der folgende Tag entsprechend kein neuer sei, sondern derselbe Tag. Aus gewisser Sicht schien mir die Schlussfolgerung plausibel, schließlich gibt es keine wahrnehmbare Eigenschaft eines Tages, die auf ein Aufeinanderfolgen der

Tage, eine lineare Reihenfolge hinweisen würde. Ich fragte mich, *wie* wir Tage nacheinander in einer linearen, zeitlichen Reihenfolge anordnen. Die Schlussfolgerung Whorfs wurde kontrovers diskutiert und gilt mittlerweile als zweifelhaft; die Frage jedoch, wie wir die Tage unterscheiden und linear in einer Reihenfolge anordnen, beschäftigte mich weiterhin.

Die beiden Fragen hängen zusammen. Durch einen bestimmten Zahlbegriff kann ich eine lineare Reihenfolge von Tagen (oder Monaten, Jahren) denken und durch Ordinalzahlen ausdrücken: erster Tag, zweiter Tag, dritter Tag usw. ... Ich kann dann eine Zeitbestimmung oder zeitliche Beziehungen verstehen. Wie erfahre ich aber eine lineare Reihenfolge? An den gestrigen Tag kann ich mich wahrscheinlich erinnern. So erfahre ich, dass der heutige Tag dem gestrigen Tag nachfolgt. Wie erfahre ich aber, dass der gestrige Tag dem vorgestrigen Tag nachfolgte? Wenn ich mich gestern an vorgestern erinnerte, dann erfahre ich das heute nur, wenn ich mich heute an die gestrige Erinnerung erinnere. Enthält der Gegenstand einer Erinnerung wiederum eine Erinnerung, dann nennen wir sie eine *rekursive Erinnerung*. Eine zeitliche Reihenfolge kann ich durch rekursives Erinnern erfahren, aber auch eine Quantität z. B. von Tagen.

Von den rekursiven Erinnerungen nahm historisch die Genese des Zahl- und Zeitbegriffs ihren Ausgang. Durch rekursives Erinnern kann ich dasjenige konkret erfahren, was ich mit einem abstrakten Zahlbegriff denke. Damit eröffnen sich neue Perspektiven auf die Kulturgeschichte des Zahl- und Zeitbegriffs, die Erkenntnistheorie sowie das Lernen und Lehren der Mathematik.

Göttingen, den 19.10.2019

Danksagung: Dem Wallstein Verlag danke ich für die Aufnahme des Buches in sein Programm. Frau Ursula Kömen und andere Mitarbeiter und Mitarbeiterinnen des Verlages haben mit viel Engagement und Hingabe das Manuskript zur Druckreife gebracht.

Einleitung

In unserer gegenwärtigen Kultur spielt die Mathematik eine dominante und prägende Rolle. Seit der kopernikanischen Wende ist keine Naturwissenschaft ohne Mathematik denkbar. Nach Kant ist in jeder Naturlehre nur so viel Wissenschaft enthalten, wie in ihr Mathematik enthalten ist (Kant I., 1786). Ihr sind die atemberaubenden Fortschritte in Naturwissenschaft und Technik maßgeblich geschuldet. Auch in den Sozial- und Humanwissenschaften wird sie zunehmend angewendet. Ein überzeugendes Merkmal für den Wahrheitsgehalt einer wissenschaftlichen Theorie oder zumindest für ihre Zuverlässigkeit ist, dass auf ihrer Grundlage zukünftige Ereignisse vorausberechnet werden können – z. B. wenn Astronomen Ereignisse wie eine Sonnenfinsternis voraussagen. Die Vorhersagbarkeit ist eine notwendige Voraussetzung, Naturgesetze technisch zu nutzen. Vorhersagen lässt sich nur eine zeitliche Änderung, wie sie durch eine Bewegung verursacht wird. Ein Ingenieur veranlasst, steuert und kontrolliert mit seinen Maschinen Bewegungsvorgänge, ein Wissenschaftler veranlasst sie mit einer Experimentiervorrichtung. Der Wissenschaftler will Zusammenhänge der Bewegungen erkennen. Eine solche Erkenntnis nennt er ein Naturgesetz. Ein Naturgesetz ist eine Aussage über eine mathematische Beziehung. Eigenschaften einer Bewegung wie Zeit, zurückgelegter Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft etc. stehen in einem Zusammenhang, den der Wissenschaftler durch Experimente erkennen will. Ein Ingenieur berechnet auf Grundlage der Naturgesetze Bewegungen einer Maschine voraus, wenn er sie konstruiert. Nicht nur sichtbare Bewegungen wie die einer Antriebsmaschine sind Bewegungen einer Maschine, sondern auch unsichtbare, wie sie beispielsweise bei der Übertragung eines Funksignals

auftreten, oder wie die Bewegungen der Elektronen im Prozessor oder Speicher eines Computers. Letztere können auch indirekt durch das Programm eines Programmierers gesteuert werden. Auf der Basis wissenschaftlicher Theorien können Wahrscheinlichkeiten berechnet werden, mit denen ein zukünftiges Ereignis eintreten wird. Zu den Prognosen mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gehören z. B. Wettervorhersagen. Sozialwissenschaftler prognostizieren ebenfalls mit den Methoden der Statistik Voraussagen über gesellschaftliche Entwicklungen, die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten eintreten werden. Die beeindruckenden Erfolge der Neurowissenschaften, und mit ihnen die darin angewendete Mathematik, beeinflussen erheblich unser Selbstverständnis, insbesondere unsere Vorstellungen über Bewusstsein, Selbstbewusstsein, Wahrnehmen, Denken, Willensfreiheit und Verantwortlichkeit.

Warum ist die Mathematik eine Grundlage einer wissenschaftlichen, zumindest einer naturwissenschaftlichen Erkenntnis und der Technik? Woher kommt ihre enorme Bedeutung für unsere wirtschaftlichen und technischen Lebensumstände, unser naturwissenschaftliches Weltbild und unser Selbstverständnis? Wie hat sich ihre Bedeutung historisch entwickelt? Was offenbart die historische Entwicklung über die Menschen, die Mathematik betreiben oder anwenden? Was verrät sie über uns selbst und über die Gesellschaft, in der wir leben? Auf den folgenden Seiten versuche ich, auf diese Fragen eine Antwort zu finden.

Diese Fragen verweisen auf eine kulturelle Diskrepanz, denn die Haltung sehr vieler Zeitgenossen zur Mathematik steht in einem deutlichen Kontrast zu deren zentraler Position in unserem naturwissenschaftlichen Weltbild. Die Mathematik erscheint vielen lebensfern. Einige prahlen geradezu damit, nie etwas von der Mathematik verstanden zu haben. Die Beschäftigung damit sei sinnlos. Zur Bestätigung stellen sie gerne zur Schau, dass ein Mangel mathematischer Kompetenzen zu keinerlei Einschränkung ihrer

Lebensqualität geführt habe. Sogar Studierende einer Natur- oder Ingenieurwissenschaft verstehen häufig nicht, warum die Mathematik eine Grundlage ihres Studiums ist, mit dramatischen Folgen bis zum Studienabbruch.

Die Diskrepanz zwischen der Bedeutung der Mathematik und der ihr entgegengebrachten ablehnenden Haltung spiegelt eine Ungewissheit der Wissenschaftler wider. Auch sie können im Allgemeinen nicht begründen, warum die Mathematik in der modernen Welt eine derart zentrale Rolle spielt.

Auch Einstein fragte sich: »Wie ist es möglich, dass die Mathematik, die doch ein von aller Erfahrung unabhängiges Produkt menschlichen Denkens ist, auf die Gegenstände der Wirklichkeit so vortrefflich passt?« (Einstein, 1921) Anders Galileo Galilei (1564-1641), der konstatierte, das Buch der Natur sei in der Sprache der Mathematik geschrieben (Galilei, 1623).

Während sich Einstein also darüber wunderte, dass die Mathematik auf die Gegenstände der Naturwissenschaft so vortrefflich passt, scheint dies für Galilei nicht rätselhaft zu sein. Folgerichtig fallen für ihn Gegenstände oder Ereignisse der Natur unter gewisse mathematische Begriffe. Galilei lebte über 300 Jahre vor Einstein, zu einer Zeit, als es noch keine moderne Mathematik gab. In der Renaissance verfügte man über die antike griechische Geometrie, wie sie von Euklid (ca. 285–212 v. Chr.) überliefert worden war. Sie fand Anwendung in den verschiedenen Bereichen des gesellschaftlichen, wirtschaftlichen und kulturellen Lebens, wie Navigation, Kartographie, Astronomie oder auch in der Malerei. Galilei verwendete die Euklidische Geometrie für die Kinematik, die Lehre der Bewegungen, und begründete so die moderne Physik. Die beiden Zitate legen die Vermutung nahe, dass sich die Begriffsbildung der modernen Mathematik erheblich von der der Euklidischen Geometrie unterscheidet. Dazu passt, dass man in Überlieferungen aus der Renaissance vergeblich nach einer ablehnenden

Haltung der Mathematik gegenüber sucht. Künstler studierten mathematische Abhandlungen und wandten die Strahlensätze auf ihre Perspektivkonstruktionen an. Durch sie wird auch der eigene Standpunkt dargestellt. Auch Kartographen und Seefahrer nutzten die Strahlensätze, ebenfalls in der Absicht, den eigenen Standpunkt zu bestimmen. Das Wissen um den eigenen Standpunkt ist ein Ausdruck des Selbstbewusstseins der Renaissance. Den eigenen Standpunkt habe ich selbst eingenommen – im Gegensatz zu den physischen Gegenständen, die ich dort vorfinde. Im Kontrast zu den Gegenständen kann ich mich auch dazu entschließen, meinen Standpunkt wieder zu verlassen. Die Menschen der Renaissance stellten sich mit der Euklidischen Geometrie zu der Welt in Beziehung. Die Mathematik wurde keinesfalls als weltabgewandt empfunden – ganz im Gegenteil! Mittels der Mathematik wandte man sich selbstbewusst der Welt zu.

Welche Entwicklung nun nahm die Mathematik in der Neuzeit, bis sie einerseits erheblich zu wissenschaftlichem Erkenntnisgewinn und technischem Fortschritt beitrug, doch andererseits den Zeitgenossen immer fremder wurde und lebens- und wirklichkeitsfremd erschien? Die Begriffe der modernen Mathematik sind deutlich abstrakter, weniger anschaulich, als sie es in der griechischen Antike waren. Der moderne Mathematiker definiert mit seinen Begriffen Strukturen. Er versteht unter einer Struktur eine Menge von Objekten, die in gewissen Beziehungen zueinander stehen – eine Struktur bilden. Z. B. ist die Menge der natürlichen Zahlen eine Menge von Objekten, die nicht näher bestimmt werden. Näher bestimmt werden nicht die Objekte, sondern die Beziehungen zwischen den Objekten. Es wird beispielsweise gefordert, dass jedes Objekt der Menge der natürlichen Zahlen einen Nachfolger in der Menge hat, und dass es in der Menge der natürlichen Zahlen genau ein Objekt gibt, das kein Nachfolger ist. Dieses nennen wir ›Eins‹. Durch diese Nachfolgerbeziehung werden die

Beziehungen zwischen den natürlichen Zahlen charakterisiert. Jede natürliche Zahl kann durch Nachfolgerbeziehungen eindeutig bestimmt werden. So bestimmen wir etwa beim Zählen Schritt für Schritt den Nachfolger der zuletzt gezählten Zahl. Dadurch ist jede gezählte Zahl bereits eindeutig bestimmt. Zusätzliche Merkmale jeder einzelnen natürlichen Zahl braucht es nicht. Die mathematischen Begriffe bestimmen die Beziehungen zwischen den Objekten einer Struktur, von weiteren Eigenschaften der Objekte wird abgesehen, sie bleiben unbestimmt. Sie sind dann inhaltsleer, und wir können uns unter ihnen nichts vorstellen. Daher rührt die Abstraktheit mathematischer Begriffe. Ein Bezug zur eigenen Erfahrung kann nicht mehr oder nur noch schwer erkannt werden, die Objekte erscheinen als ein von der Erfahrung unabhängiges Produkt menschlichen Denkens. Nach Dedekind (1831–1916) sind Zahlen eine freie Schöpfung des menschlichen Geistes.

Die moderne Mathematik wird als eine Wissenschaft der abstrakten Strukturen charakterisiert. Eine abstrakte Struktur wird definiert – sie ist nicht empirisch vorgegeben, sondern eine Schöpfung des menschlichen Geistes. Die Merkmale einer Struktur, wie z. B. Rechenregeln, werden auf möglichst wenige Aussagen, die Axiome, logisch zurückgeführt. Ein beliebiges Merkmal einer Struktur soll dann logisch aus den frei gesetzten Axiomen hergeleitet werden können. Eine abstrakte Struktur erscheint jedoch ausgedacht – ähnlich den Regeln des Schachspiels. Wir werden der Mathematik aber nicht gerecht, wenn wir sie als ein bestenfalls amüsanter, aber letztlich nutzloses Spiel abtun. Schließlich ist sie eine Grundlage der Naturwissenschaft und des technischen Fortschrittes.

Mit dem vorliegenden Buch möchte ich Aufschluss über die Bedeutung der Mathematik geben. Durch eine historische Betrachtung – gleichsam archäologisch – werde ich unter Sedimenten Verborgenes freilegen. Die Bildung eines mathematischen Begriffs findet am Ende einer häufig sehr

langen Entwicklung statt. Dafür gibt es viele Beispiele, etwa die Differential- und Integralrechnung, die von Leibniz und Newton bereits im 17. Jahrhundert entdeckt wurde. Um sie begrifflich zu erfassen, brauchte es den Grenzwertbegriff, der aber erst im 19. Jahrhundert von Cauchy und Weierstraß formuliert wurde. Doch haben Newton und Leibniz wohl kaum etwas entdeckt oder zumindest erahnt, was sich Cauchy und Weierstraß erst im 19. Jahrhundert ausgedacht hätten. Die alten Babylonier kannten schon vor über 3000 Jahren elaborierte Rechentechniken, die zum Teil noch heute angewendet werden. Da ihre Sprache jedoch kein Wort für Zahl besaß, kannten sie auch keinen Zahlbegriff (Damerow, Englund, & Nissen, 1994). Ein Zahlbegriff ist uns erst von den antiken Griechen überliefert. Er ist ein Begriff über eine Anzahl. Der italienische Mathematiker Guiseppe Peano publizierte Ende des 19. Jahrhunderts den modernen Zahlbegriff, indem er die Struktur der natürlichen Zahlen durch eine Nachfolgerbeziehung charakterisierte. Durch die Nachfolgerbeziehung sind die natürlichen Zahlen linear angeordnet, nämlich in der Reihenfolge, in der wir sie zählen: 1, 2, 3 ... usw. Daher werden die so definierten Zahlen auch Ordnungszahlen genannt. Jedoch wurde bereits im 16. Jahrhundert eine Aussage über die natürlichen Zahlen aus der Nachfolgerbeziehung hergeleitet. Also hat sich Guiseppe Peano die Struktur der natürlichen Zahlen nicht ausgedacht. Die Menschen zählten und rechneten schon seit etlichen Jahrtausenden. Sie entdeckten Rechenregeln. Nach und nach entdeckten sie aber auch, dass die Rechenregeln logisch von gewissen Merkmalen der Zahlen abhängen, und allmählich wurden den Mathematikern diese Merkmale bewusst. Das Bewusstsein über die Merkmale ist eine notwendige Voraussetzung, sie zu einem Begriff zusammenzufassen.[1] Die Merkmale wurden also nicht aus den Axiomen hergeleitet, sie waren vor den Axiomen bekannt. Die Entdeckung bestand darin, dass man erkannte, sie aus gewissen Aussagen herleiten zu können.

Anders als häufig angenommen, sind nicht etwa die Axiome zuerst da, und dann ihre logischen Folgerungen, sondern es ist umgekehrt: zuerst die logischen Folgerungen und dann die Axiome. Axiome sind zwar logisch ursprünglich, aber genetisch stehen sie am Ende einer mathematischen Begriffsbildung. Wenn die Menschen schon mit Zahlen gezählt und gerechnet, Rechenregeln erkannt und Eigenschaften über Zahlen ausgesagt haben, bevor ein Zahlbegriff gebildet wurde, dann stellt sich die Frage nach der Herkunft der Zahlen. Was ist ihre Genese?

Nicht unerheblich ist dabei die Frage, warum die antike griechische Geometrie in der Renaissance so populär war, eine weit verbreitete Anwendung fand und sich auf ihrer Grundlage das moderne wissenschaftliche Weltbild entwickelt hat. Die von Euklid überlieferten geometrischen Begriffe haben einen anderen Charakter als die Begriffe der modernen Strukturmathematik. Die Definitionen Euklids bestimmen keine Beziehungen von Objekten einer Struktur, sondern sie charakterisieren die Objekte selbst. Euklid appellierte in seinen Schriften, sich unter den Eigenschaften mathematischer Gegenstände, wie z. B. Punkt und Gerade, etwas vorzustellen. Nach zweieinhalb Jahrtausenden fällt uns heute das Verständnis nicht immer ganz leicht, die euklidischen Definitionen hinterlassen durchaus Rätsel und Interpretationsbedarf. Wir können aber in den Begriffen der Euklidischen Geometrie Merkmale der Bewegung erkennen. Z. B. definiert er eine »Linie« als eine breitenlose Länge. Wenn wir uns nun unter einer Linie etwas vorstellen wollen, dann stellen wir uns im Allgemeinen eine gezeichnete Linie vor. Ein naheliegender Einwand ist, dass eine gezeichnete Linie doch sehr wohl eine Breite habe. Dem wird üblicherweise erwidert, dass eine gezeichnete Linie auch nur die Darstellung einer euklidischen Linie sei, eine Euklidische Linie ist dagegen eine idealisierte Linie. Was ist aber eine idealisierte Linie? Eine idealisierte Linie erhalte man, wenn man von der Breite einer gezeichneten Linie

absehe. Das aber hilft nur bedingt weiter, denn was bleibt dann von ihr übrig?

Ich will daher einen anderen Zugang zu den Begriffen der Euklidischen Geometrie vorschlagen. Versuchen Sie einmal mit geschlossenen Augen Ihre Nasenspitze mit einem Zeigefinger zu berühren! Dabei vollziehen Sie eine Bewegung. Um sie zielgerichtet und kontrolliert auszuführen, müssen Sie Eigenschaften der Bewegung wahrnehmen. Um das besser nachzuvollziehen, können Sie das Experiment etwas abwandeln. Nehmen Sie einen Stift in eine Hand, und versuchen Sie, mit der Spitze des Stiftes Ihre Nasenspitze zu berühren. Mit geschlossenen Augen dürfte Ihnen das sehr viel schwerer fallen. Sie nehmen so auch keine Eigenschaften der Bewegung des Stiftes wahr, sondern nur Eigenschaften ihrer eigenen Körperbewegung. Was sind das für Eigenschaften? Nun bin ich nicht so töricht, Sie darüber belehren zu wollen, was Sie wahrnehmen. Stattdessen fordere ich Sie auf, selbst auf das zu achten, was sie in ihrem Körper spüren, wenn Sie Ihren Zeigefinger bewegen. Zunächst spüren Sie in jedem Augenblick die Lage Ihrer Körperteile zueinander. Die spüren Sie aber auch, wenn Sie sich nicht bewegen. Während der Bewegung spüren Sie zusätzlich, wie schnell sie ihren Zeigefinger bewegen, und auch, in welche Richtung. Für das Wahrnehmungsphänomen gibt es eine physiologische Erklärung. Es gibt Sinneszellen in den Muskeln, Sehnen und Gelenken, auf die Eigenbewegungen in jedem Moment einen Eindruck machen. Richtung und Geschwindigkeit einer Eigenbewegung erfahren wir permanent als Sinneseindruck. Er wird uns selten bewusst, da wir meistens routiniert, also unbewusst darauf reagieren. Wenn wir die in jedem Moment wahrnehmbare Richtung einer Eigenbewegung als euklidische Länge interpretieren, dann können wir mithilfe dieser Eigenbewegung eine euklidische Linie erfahren. Eine Bewegung ist nur in einer Richtung, der euklidischen »Länge«, möglich. Eine Bewegung in eine andere Richtung, etwa in die Senkrechte,

die euklidische »Breite«, ist nicht gleichzeitig, mit ein und derselben Bewegung möglich. Dafür ist eine zweite Bewegung nötig. Ich werde den Zusammenhang zwischen Bewegung und der Euklidischen Geometrie im ersten Kapitel vertiefen. An dieser Stelle möchte ich jedoch festhalten, dass die Begriffe der Euklidischen Geometrie Merkmale der Bewegung aufweisen. Diese Merkmale haben es den mobilen Menschen der Renaissance erlaubt, die antike Geometrie anzuwenden.

Während im Mittelalter die Menschen vorwiegend ortsgebunden lebten und sogar weitgereiste Ritter, Adlige oder Kreuzfahrer kaum Vorstellungen über die zurückgelegten Distanzen entwickelten,^[2] wurden die Menschen während der Renaissance mobil. Weite Handelsreisen auf Land und zur See wurden unternommen, neue Kontinente und Seewege entdeckt. Bereits ab dem späten Mittelalter gingen die jungen Gesellen nach ihrer Lehrzeit in einem städtischen Handwerksbetrieb auf Wanderschaft und entwickelten so im Gegensatz zur ortsgebundenen Landbevölkerung eine gewisse Weltläufigkeit. Die Mobilität brachte es mit sich, dass die Euklidische Geometrie mit ihren Merkmalen der Bewegung Anwendung fand – z. B. in Kartographie und Navigation. Galilei begründete die Physik mit der Kinematik, der Lehre der Bewegungen. Er experimentierte mit der schiefen Ebene und Pendeln und entdeckte so mathematische Beziehungen zwischen Bewegungsvorgängen. Nach Newton (1643–1727) bestand die Aufgabe der Physik darin, »[...] aus den Erscheinungen der Bewegung die Kräfte der Natur zu erklären, und hierauf durch diese Kräfte die übrigen Erscheinungen zu erklären« (Newton, 1872). Bis heute hängen die physikalischen Größen wie Weg, Zeit, Masse oder elektrische Ladung direkt oder indirekt mit Bewegungsvorgängen zusammen. Jede Messung einer physikalischen Größe beruht auf Bewegungen – es wird eine Ortsveränderung gemessen.

Eine Bewegung hat neben räumlichen auch zeitliche Eigenschaften. Eine räumliche Eigenschaft kann durch die Geometrie erfasst werden, eine zeitliche durch die Arithmetik. So kann man durch Ordinalzahlen eine zeitliche Reihenfolge ausdrücken: erstes Ereignis, zweites Ereignis, drittes Ereignis usw. Der Schwerpunkt der antiken griechischen Mathematik lag auf der Geometrie. Die zeitlichen Eigenschaften einer Bewegung spielten nur eine untergeordnete Rolle – ganz anders als in der Neuzeit. Der Grund dafür ist eine andere Zeitvorstellung. Zeitliche Eigenschaften von Bewegungen wurden in der griechischen Antike in dem Lauf der sieben damals bekannten Wandelsterne Mond, Sonne, Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn erkannt. Die griechischen Astronomen machten in ihnen periodische Wiederholungen aus. Ein Wandelstern kehrt stets zu jedem Ort auf seiner Bahn zurück. Seine Bahn besitzt daher keine Vergänglichkeit. Platon glaubte gar, dass sich auch die Konstellationen der sieben Wandelsterne sowie der Fixsterne wiederholen. Ihm zufolge waren die astronomischen Konstellationen dasjenige, was man in der griechischen Antike Zeit nannte. Platon drückte damit, wie vor ihm bereits die Pythagoreer, die zyklischen Zeitvorstellungen der griechischen Antike aus (Platon, 2009). Ganz anders seit der Renaissance: Nun setzten sich lineare Zeitvorstellungen durch. Demzufolge ist ein Ereignis, das vergangen ist, ein für alle Mal vergangen. Es kehrt nicht mehr wieder – und das ist ein fundamentaler Unterschied zur zyklischen Zeit.

Vergänglichkeit erfahren wir durch persönliche Erinnerungen. Wenn ich mich an ein Ereignis erinnere, das ich erlebte, dann ist für mich das Ereignis vergangen. Es bleibt mir nur noch die Erinnerung. Den neuzeitlichen linearen Zeitvorstellungen liegt eine Erinnerungskultur zugrunde: Sie ist maßgeblich von Erinnerungen an persönlich Erlebtes geprägt. Dabei erfährt das Individuum, dass es während des Wechsels der Erscheinungen stets dasselbe bleibt. Diese Erfahrungen brachten das neuzeitliche

Selbstbewusstsein hervor. Doch auch zyklische Zeitvorstellungen hatten sich aus Erinnerungen heraus entwickelt. Um zu erkennen, dass gewisse Ereignisse immer wiederkehren, müssen sie als solche wiedererkannt werden. Dafür muss ich mir Merkmale der Ereignisse in das Gedächtnis eingepägt, gemerkt haben. Ein Wiedererkennen der Merkmale eines Ereignisses ist nicht notwendigerweise eine Erinnerung an persönlich Erlebtes, sondern ein Wissen über ein Ereignis, es setzt zumindest ein solches Wissen voraus. Es erscheint das gleiche Ereignis immer wieder, wenn es jedes Mal die gleichen Merkmale hat. An den Erscheinungen eines Ereignisses wird immer wieder der gleiche Begriff mit seinen Merkmalen, immer wieder, platonisch gesagt, die gleiche Idee erkannt. So erscheint alle vier Wochen der gleiche Vollmond, an jeder Erscheinung eines Vollmondes kann ich die gleichen Merkmale erkennen, denn die Vollmonde unterscheiden sich nicht. Wenn ich mich jedoch persönlich daran erinnere, dass ich bereits einen Vollmond erlebt habe, während ich einen Vollmond sehe, dann habe ich nacheinander zwei Erscheinungen eines Vollmondes erfahren. Während der moderne Mensch in der linearen Zeit erfährt, dass er im Wechsel der Erscheinungen stets derselbe bleibt, erfährt ein Mensch mit einer zyklischen Zeitvorstellung, dass wiederkehrende Ereignisse, die ihm erscheinen, stets dieselben sind. Eine Vorstufe der bewussten Erinnerung ist das Vertrautsein mit gewissen Merkmalen. Das Vertrautsein ist eine Voraussetzung für sensomotorische Fertigkeiten, etwa beim Fahrradfahren mit Merkmalen der Gleichgewichtslage und des Fortbewegens, ohne sich bewusst an sie zu erinnern. Stattdessen ist die Reaktion eine routinierte und unbewusste. Eine bewusste Erinnerung würde sogar zu einer Beeinträchtigung der sensomotorischen Fertigkeiten führen. Eine Kultur des Vertrautseins finden wir in vor- und frühgeschichtlichen Kulturen. Sie führt zu einer Handlungszeit, d. h. die Zeit erscheint in der Art und Weise, wie Handlungen strukturiert sind. Die Menschen dieser Kulturen waren mit

den Merkmalen zyklisch wiederkehrender Ereignisse der Natur vertraut und reagierten auf sie mit landwirtschaftlichen und rituellen Verrichtungen. Ihre Handlungen wurden durch periodisch wiederkehrende Ereignisse der Natur strukturiert.

Wir haben bis hier drei Gedächtnisoperationen unterschieden: persönliches Sich-Erinnern, Wissen und Vertrautsein. Ihnen entsprechen die drei Zeiten: lineare Zeit, zyklische Zeit und Handlungszeit.

Parallel zur Gedächtnis- und Zeitentwicklung verlief die Genese des Zahlbegriffs. Archaische Darstellungen einer Anzahl sind gekerbte Knochen oder Hölzer, Knotenschnüre, Mengen von Kieselsteinen oder Muschelschalen. Sie sind vermutlich Merkzeichen, ähnlich den Strichen auf einer Strichliste. Strichlisten und Ähnliches können auch ohne Zahlkenntnis verwendet werden, sie dienen der Unterstützung des Gedächtnisses. Die Existenz eines Merkzeichens verweist auf die Existenz eines der gemerkten Gegenstände. Ein Mensch, der mit dem Merkmal der Existenz vertraut ist, kann ein Merkzeichen verwenden. Wie kann sich ein Mensch mit dem Merkmal der Existenz vertraut machen? An dieser Stelle soll ein kurzer Hinweis genügen, das Thema wird im ersten Kapitel noch vertieft: Wenn ich mich an einem physischen Gegenstand stoße, dann spüre ich seine Existenz – mehr noch: ich spüre auch meine eigene Existenz. Ich merke, dass es außer mir bzw. meinem Körper noch einen anderen Gegenstand gibt. Ich erlebe eine Mehrzahl. Manchmal kann man Menschen dabei beobachten, wie sie beim Zählen mit dem Zeigefinger auf den gezählten Gegenstand zeigen – als ob sie ihn leicht anstoßen wollten, um sich seiner Existenz zu vergewissern. Ein Merkzeichen hat mit einem gemerkten Gegenstand das Merkmal der Existenz gemeinsam. Nehmen wir einmal an, dass ein Mensch, der nicht zählen kann, sich die Existenzen mehrerer Gegenstände einprägen will. Wenn er kein äußeres Medium zur Verfügung hat, in das er Merkzeichen einprägen kann, dann muss er sich die Existenz

jedes einzelnen Gegenstandes ins Gedächtnis einprägen. Wie wird er vorgehen? Zuerst nimmt er einen der Gegenstände wahr und bildet sich ein Existenzurteil: »Es gibt einen Gegenstand.« Dieses prägt er sich ins Gedächtnis ein. Dann nimmt er einen weiteren Gegenstand wahr und urteilt: »Es gibt einen zusätzlichen Gegenstand.« Das Existenzurteil prägt er sich ein. Da er aber das vorangegangene Existenzurteil nicht vergessen darf, prägt er sich zusätzlich eine Erinnerung an das vorangegangene Existenzurteil an. Sukzessive führt er Merkschritte aus. In einem Merkschritt prägt er sich Folgendes ein:

- ein Existenzurteil und
- eine Erinnerung an den vorangegangenen Merkschritt, insofern er stattgefunden hat.

In einem Merkschritt wird gegebenenfalls eine Erinnerung an den vorangegangenen Merkschritt eingepägt, in dem selbst wiederum eine Erinnerung an einen Merkschritt eingepägt worden sein kann. Eine solche Erinnerung an eine Erinnerung nennen wir *rekursive Erinnerung*. Dieser Begriff ist zentral für das vorliegende Buch. Die Erinnerung eines Merkschrittes kann eine Erinnerung im Sinne von Wissen sein, oder eine im Sinne eines persönlichen Sich-Erinnerns. Nehmen wir einmal an, dass die Erinnerung eines Merkschrittes ein Wissen ist. Was genau wissen wir dann? Wir wissen, dass es einen Gegenstand gibt, und gegebenenfalls, dass es noch einen weiteren Gegenstand gibt, und dass es vielleicht noch einen zusätzlichen Gegenstand gibt usw. Das Wissen eines Merkschrittes liefert uns eine Menge von Existenzurteilen – wir kennen dann die Anzahl der Gegenstände. Wenn wir z. B. wissen, dass es einen Gegenstand gibt, und dass es noch einen Gegenstand gibt, und dass es noch einen weiteren Gegenstand gibt, dann wissen wir, dass es drei Gegenstände gibt. Die

Aussage »Es gibt drei Gegenstände« und die Aussage »Es gibt einen Gegenstand, und es gibt noch einen Gegenstand, und es gibt noch einen weiteren Gegenstand« sind äquivalent. Wenn wir uns nun in einem Merkschritt persönlich an den unmittelbar vorangegangenen Merkschritt erinnern, dann erfahren wir, dass der erinnerte Merkschritt bereits vergangen ist. Er wurde also vor dem aktuellen Merkschritt vollzogen. Dieser folgt dem erinnerten Merkschritt nach. Wir erfahren eine Nachfolgerbeziehung. Durch die Nachfolgerbeziehung können Merkschritte linear angeordnet werden. Die Menge aller ausgeführten und – zumindest theoretisch – noch ausführbaren Merkschritte haben die Struktur von Ordnungszahlen. Die Genese des Zahlbegriffs verläuft mit einer zunehmenden Verinnerlichung. Ausgangspunkt sind die äußeren Merkzeichen mit ihrem Merkmal der Existenz. In der zweiten Phase der Genese ist eine Menge von Existenzurteilen, die in das Gedächtnis eingeprägt worden sind – also verinnerlicht worden sind, eine Anzahl. In der dritten Phase werden nicht nur Existenzurteile in das Gedächtnis eingeprägt, sondern auch der Vorgang des Urteilens und Erinnerns. Dadurch, dass ich mich persönlich rekursiv daran erinnere, dass ich die vorangegangenen Merkschritte selbst ausgeführt habe, erhalte ich nicht nur eine Menge von Existenzurteilen, sondern auch die Reihenfolge, in der ich geurteilt habe.

Die Untersuchung wirft eine erkenntnistheoretische Frage auf. Mathematische Begriffe haben Merkmale, die wir durch unsere eigenen Tätigkeiten erfahren können – wie Eigenbewegungen oder Einprägen und Erinnern. Wie können wir mit diesen Begriffen Sachverhalte begreifen, die unabhängig vom Menschen existieren, wie z. B. die Naturgesetze der Physik? Sind die Tätigkeiten solche, mit denen wir Erfahrungen gewinnen können, und kann deswegen die Mathematik in den Erfahrungswissenschaften angewendet werden? Werden solche Tätigkeiten

von einem Experimentator in einem Experiment ausgeführt? Diesen Fragen widme ich mich im vierten Kapitel.

Wir fragen nach der Bedeutung der Mathematik, insbesondere des Zahlbegriffs in unserer modernen Lebenswelt. Die Gegenstände der Mathematik scheinen zunächst ausgedacht. Ihre Eigenschaften werden aus Axiomen logisch hergeleitet, die wiederum frei gesetzt sind. Eine Bedeutung der Mathematik für die Erkenntnis und den erkennenden Menschen ist nicht ohne Weiteres sichtbar. Eine historische Betrachtung zeigt aber, dass die Begriffsbildung, insbesondere die mit Axiomen, erst am Schluss einer langen Entwicklung stattfand. Menschen zählten, rechneten und entdeckten Rechenregeln, bevor ein Zahlbegriff gebildet wurde.

Im Folgenden wird dargelegt, dass der Ursprung der Zahlen in dem Bedürfnis oder der Notwendigkeit lag, sich eine Mehrzahl von Gegenständen in das Gedächtnis, oder auch ein externes Medium, einzuprägen. Entsprechend lag der Ursprung des Zählens und Rechnens in den Gedächtnisoperationen *Einprägen* und *Erinnern*. Z. B. kann man sich unter der Addition, dem *Dazu-zählen*, ein fortlaufendes Einprägen in das Gedächtnis vorstellen, genauer: ein fortlaufendes Ausführen von Merkschritten. Wir wollen uns einer Antwort durch eine historische Untersuchung der Entwicklung von Erinnerungskulturen nähern, wobei wir eine Erinnerungskultur mit ihrem Zahl- und Zeitbegriff bzw. mit ihren Erscheinungsformen von Zahl und Zeit verschränken. Merkmale des jeweils kulturprägenden Erinnerns treten in ihrem Umgang mit Zeit und Zahl in Erscheinung. Sie werden in der griechischen Antike zum Begriff der zyklischen Zeit und dem Anzahlbegriff sowie in der Neuzeit zum Begriff der linearen Zeit und dem Begriff der Ordnungszahlen zusammengefasst. Wir werden eine Entwicklungslogik des Gedächtnisses entdecken, d. h., dass gewisse Phasen der Gedächtnisentwicklung notwendig andere Phasen voraussetzen, auf ihnen aufbauen. Mit der Entwicklung des Gedächtnisses

geht die Genese des Zahl- und Zeitbegriffs einher. Die Entwicklungslogik betrifft nicht nur die historische – die hier dargestellt werden wird –, sondern auch die individuelle Entwicklung. Daher kann die Mathematikdidaktik durch diese Untersuchung neue Impulse erhalten. Darüber hinaus verspricht sie neue Erkenntnisse für die Wissenschafts- und Kulturgeschichte, die Erkenntnistheorie und das damit zusammenhängende Selbstverständnis. Studierende eines MINT-Faches lernen, mathematische Sachverhalte in anschaulich nachvollziehbare Zusammenhänge einzuordnen. Sie gewinnen dadurch an Verständnis, mathematischer Lernkompetenz und Motivation.

Der Aufbau des Buches

Der Aufbau des Buches orientiert sich an der These, dass dem Zahl- und Zeitbegriff vorbegriffliche Konzepte zugrunde liegen, die ihnen historisch vorausgegangen sind.

Zeit und Zahl in der Erinnerungskultur der Neuzeit

Wir beginnen mit der Kultur, die uns vertraut ist, nämlich unserer eigenen. Der Mensch der Neuzeit verdankt sein Selbst- und Gegenstandsbewusstsein sowie seine zeitliche und räumliche Orientierung Erfahrungen mit dem episodischen Erinnern. Dieses prägt maßgeblich Politik, Wirtschaft und Kultur. Der Mensch der Neuzeit erfährt eine linear zeitliche Ordnung durch episodisches Erinnern, aber auch die Struktur der Ordinalzahlen und sogar den punktförmigen Gegenwartsmoment. All diese Erfahrungen gehen in den modernen Zahl- und Zeitbegriff ein und sind eine notwendige Voraussetzung der Naturwissenschaft.

Merken und Erinnern, Zählen und Rechnen

Dieses Kapitel widmet sich den Anfängen in der Entwicklung des Zahl- und Zeitbegriffs. In archaischen Kulturen verwendeten die Menschen Merkhilfen wie gekerbte Knochen oder Hölzer, Knotenschnüre, Haufen aus Kieselsteinen oder Muschelschalen. Mit ihnen sind archaische Rechnungen möglich. Ein Mensch, der sich eine bestimmte Menge an Gegenständen nicht in ein äußeres Medium einprägen will, sondern in sein Gedächtnis, muss das schrittweise tun. Zahlzeichen oder Zahlwörter können das Gedächtnis entlasten.

Phänomene des Erinnerns und Wahrnehmens

Nachdem in den ersten beiden Kapiteln die Bedeutung der Phänomene des Erinnerns für vorbegriffliche Zahl- und Zeitkonzepte im Vordergrund stand, untersuche ich anschließend hier nun die Phänomene eingehender, u.a. ihren Zusammenhang mit dem Wahrnehmen. So lässt sich das kulturprägende Erinnern einer Epoche identifizieren, aber auch ihre vorbegrifflichen Zahl- und Zeitkonzepte.

Zahl- und Zeitbegriffe

Was sind Begriffe? Wofür verwenden wir sie? Was haben sie mit logischem Denken zu tun? Wir lernen einen Begriff als eine Zusammenfassung von Merkmalen kennen, über die wir etwas aussagen, aus denen wir logische Schlüsse ziehen können. Da wir die Merkmale eines Zahl- und Zeitbegriffs nur nacheinander durch entsprechende vorbegriffliche Konzepte erfahren können, wird zur Begriffsbildung ein gewisses Erinnerungsvermögen benötigt.

Zeit und Zahl in der antiken griechischen Erinnerungskultur

Die Ergebnisse der letzten beiden Kapitel finden hier Anwendung auf die antike griechische Epoche. Wir können nun das kulturprägende Erinnern als ein semantisches identifizieren. In Platons Zeitbegriff und in Euklids Zahlbegriff erkennen wir Merkmale gewisser semantischer Erinnerungen. Nun wird deutlich, worin sich die moderne Mathematik von der antiken griechischen Mathematik unterscheidet.

Eine Entwicklungslogik

An einer Erinnerung sind im Allgemeinen mehrere Gedächtnisarten beteiligt. Sie sind nicht voneinander unabhängig. Einige bauen auf anderen auf und lassen eine Entwicklungslogik erkennen. Dieser gehorcht auch die kulturelle Entwicklung des Erinnerungsvermögens. Sie korrespondiert mit der Entwicklung der Zahl- und Zeitbegriffe sowie ihrer vorbegrifflichen Konzepte.

1. Zeit und Zahl in der Erinnerungskultur der Neuzeit

Prolog

Während der Renaissance fanden erhebliche Umwälzungen des gesellschaftlichen Lebens statt. In der Folge wurde das Mittelalter von der Neuzeit abgelöst. Der selbstbewusste Mensch der Neuzeit betrat die Bühne der Geschichte; in den Stadtstaaten Oberitaliens, aber auch in Nordeuropa entwickelten sich bürgerliche Gesellschaften; es entstanden die Naturwissenschaften und Technik. Ihre Grundlagen sind empirische Beobachtungen während eines Experimentes oder Naturbeobachtungen, wie z. B. astronomische Beobachtungen, und die Mathematik, die nach einer Phase der Stagnation während des Mittelalters in der Neuzeit eine rasante Entwicklung erfuhr. Die bei einem Experiment oder in der Natur beobachteten Erscheinungen und Ereignisse begegnen einem Wissenschaftler nacheinander in einer linearen zeitlichen Reihenfolge. Ein Naturgesetz ist eine Aussage über den linearen Zeitverlauf von gewissen Bewegungen oder Veränderungen in der Natur, die von Bewegungen verursacht werden. Ein Naturwissenschaftler kann ein Ereignis vorausberechnen, wenn er ein geeignetes Naturgesetz kennt. Während eines Experimentes zeigt sich der Zeitverlauf gewisser Bewegungen oder Veränderungen. Dafür werden im Allgemeinen Gegenstände und ihre räumlichen Beziehungen mit ihren zeitlichen Veränderungen beobachtet und eine Ortsveränderung gemessen, etwa die eines Massekörpers oder elektrisch geladenen Teilchens, die Ausdehnung einer Feder oder der Quecksilbersäule eines Thermometers, mechanische oder elektromagnetische Schwingungen. Durch die Beobachtungen kann ein Naturgesetz bestätigt oder widerlegt werden. Welches sind die Impulse für die Entwicklung? Gibt es einen Zusammenhang des Selbstbewusstseins des modernen Menschen mit den Naturwissenschaften auf Basis der Empirie