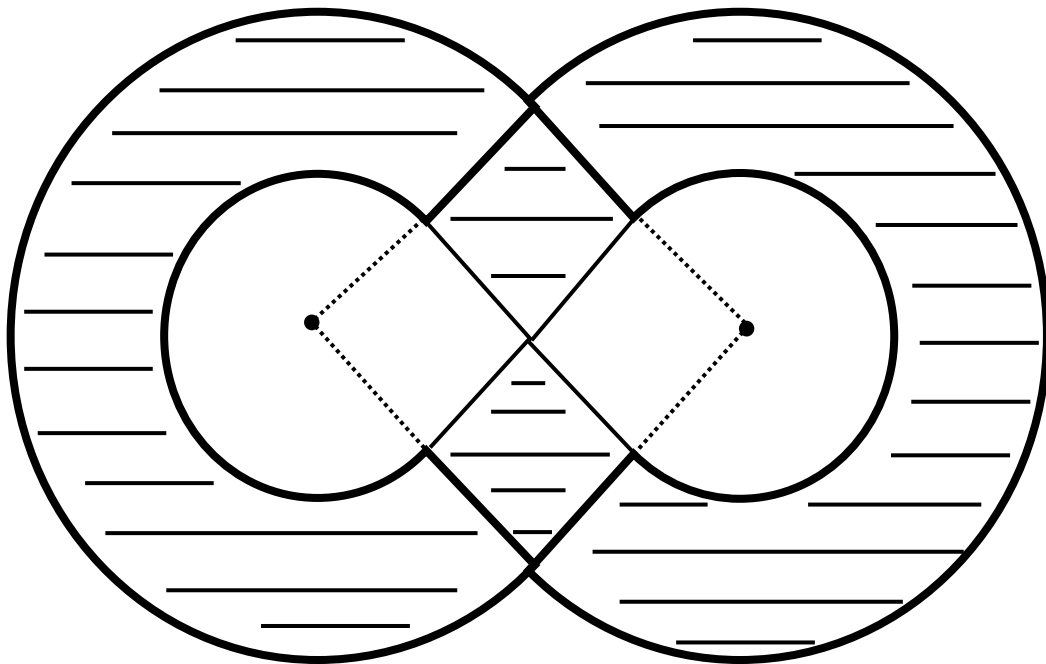


Günter Graumann

Problemorientierter Geometrieunterricht

**Problemfelder für den Geometrieunterricht der
Schuljahre 5 bis 10**



WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Ars Inveniendi et Dejudicandi

Edited by
Torsten Fritzlar und Benjamin Rott
Volume 18

Günter Graumann

**Problemorientierter
Geometrieunterricht**

**Problemfelder für den Geometrieunterricht der
Schuljahre 5 bis 10**

WTM
Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien
Münster

Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese
Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte Informationen sind im Internet über
<http://www.dnb.de> abrufbar

Druck durch:
winterwork
04451 Borsdorf
<http://www.winterwork.de/>

Alle Rechte vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf
ohne schriftliche Einwilligung des Verlags in
irgendeiner Form reproduziert oder unter Ver-
wendung elektronischer Systeme verarbeitet, ver-
vielfältigt oder verbreitet werden.

© WTM – Verlag für wissenschaftliche Texte und
Medien, Ferdinand-Freiligrath-Str. 26, Münster
Münster 2022
ISBN 978-3-95987-222-5

Inhalt

	Vorwort	5
1	Problemorientierter Mathematikunterricht - Begriffsklärungen, Begründungen und Ziele	7
	Begriffsklärungen	7
	Begründungen/Ziele für mehr Problemorientierung im MU	14
2	Problemfelder zu geometrischen Grundbegriffen und zur Figurenlehre	21
	Verbindungen und Schnitte	21
	Dreiecke mit ganzzahligen Seitenlängen	26
	Rechtecke und Quader mit ganzzahligen Seitenlängen	29
	Zusammenlegen und Schneiden von Dreiecken und Rechtecken	30
	Figuren im Gitter	37
	Umfang und Flächeninhalt von Rechtecken	41
3	Kongruente Abbildungen der Ebene und Symmetrie	44
	Verknüpfungen von kongruenten Abbildungen der Ebene	44
	Symmetrie geometrischer Figuren der Ebene	50
	Selbstähnlichkeit und Schrägsymmetrie	52
	Verallgemeinerte Symmetrie	53
4	Dreiecke dynamisch betrachtet	56
	Das gleichschenklige Dreieck	57
	Das rechtwinklige Dreieck und die Thalesfigur	59
	Dreiecke mit einer Seitenlänge und dem gegenüberliegenden Winkelmaß	62
	Dreiecke mit zwei vorgegeben Seitenlängen	64
	Dreiecke mit einer Seitenlänge und einen anliegenden Winkelmaß	66
	Dreiecke mit einer Seitenlänge und einer anderen Festlegung	67
5	Allgemeine Vierecke, Sonderformen von Vierecken und Mittenvierecke	70
	Allgemeine Vierecke	70
	Sonderformen von Vierecken und deren Ordnung	72
	Mittenvierecke und deren Sonderformen	81
	Muster in und um ein Quadrat	87

6	Vielecke	89
	Regelmäßige Vielecke der Ebene	89
	Winkelmaße in regelmäßigen Vielecken der Ebene	97
	Kombination regelmäßiger konvexer Vielecke an einem Punkt	104
	Räumliche Vielecke	107
	Symmetrische Vielecke	112
7	Pythagoreische Tripel und Heronsche Dreiecke	119
8	Konstruktion von Zahlen und Winkelmaßen mit Zirkel und Lineal	123
	Strecken bei vorgegebener Einheitslänge mit Zirkel und Lineal konstruieren	123
	Winkelmaße mit Zirkel und Lineal konstruieren	126
9	Verhältnisse von Vieleck und Kreis	127
10	Körperformen	130
	Symmetrische Dreieckspyramiden	130
	Parallelepipede (Spate)	136
	Halbreguläre Polyeder	139
	Analogien zwischen ebenen und räumlichen Figuren	147
	Silhouetten von Körpern	150
11	Aspekte der Trigonometrie	151
	Definition und Werte trigonometrischer Funktionen	152
	Familien trigonometrischer Funktionen	154
	Winkelmaße in Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen	155
	Kurven trigonometrischer Funktionen in Polarkoordinaten	156

Vorwort

Problemorientierung im Mathematikunterricht wird schon seit langem immer wieder gefordert. In den Bildungsstandards und Richtlinien taucht seit 2003 der Kompetenzbereich „Problemlösen“ auf. Es ist zwar nicht gemeint, dass der Mathematikunterricht fast nur noch durch Problemorientierung gekennzeichnet sein soll, aber in der Schulpraxis nehmen Unterrichtsphasen mit selbsttätiger Arbeit an Problemen immer noch einen zu geringen Raum ein.

Seit über 30 Jahren werden in der Mathematikdidaktik verschiedene Formen des Umgangs mit Problemen im Mathematikunterricht diskutiert. Dafür verwendet man vielfach statt des klassischen Begriffs des Problemlösens den Ausdruck „Problemorientierung“, wobei auch andere Formen des Umgangs mit Problemen als nur das Lösen vorgegebener Probleme zum Ausdruck kommen soll. Eine besondere Form der Problemorientierung im Mathematikunterricht ist die Behandlung von Problemfeldern, bei denen jeweils ein Themenbereich, der mehrere inhaltlich miteinander verbundene Probleme enthält, erörtert wird. Oft führt die Entwicklung und Bearbeitung von Variationen des Ausgangsproblems zu neuen Einsichten in Mathematik und die Beschäftigung mit Problemfeldern lässt Schülerinnen und Schüler Mathematik als Feld von Entdeckungen erleben.

Bei denen in diesem Buch behandelten Problemfeldern für den Geometrieunterricht im 5. bis 10. Schuljahr ist der Fokus auf innermathematische geometrische Themen gelegt worden. Die aufgeführten Beispiele von Problemfeldern mit Variationen sollen Anregungen zu Reflexionen über Geometrie und mögliche Anreicherungen des Geometrieunterrichts geben. Die jeweils mitgelieferten Lösungen bzw. Lösungshinweise und Bemerkungen sind für Lehrkräfte nicht als Vortragsvorlage gedacht, sondern als Hilfe für das Verständnis und einen möglichen Umgang mit Lösungen sowie als Anregung für weitere Vertiefungen.

Die hier benannten Problemfelder schließen mit dem jeweiligen Ausgangsproblem an Themen des üblichen Geometrieunterrichts an und sind dementsprechend (beginnend mit dem 5. Schuljahr bis hin zum 10. Schuljahr) geordnet. Die danach auftretenden Variationen können allerdings manchmal nur in einer höheren Klassenstufe behandelt werden. Auch ist es möglich, ein Problemfeld mit Ausgangsproblem und den zugehörigen Variationen in Gänze in einer höheren Klassenstufe (einschließlich Sekundarstufe II) zu erörtern.

In dem vorliegenden Buch wird auf die Art der Verwendung der Problemfelder und die methodische Ausgestaltung im Mathematikunterricht verzichtet, da zum einen solche Ausführungen sehr ausführlich sein müssten (die den Rahmen hier sprengen würden) und zum anderen Lehrerinnen/Lehrer immer auch eigene Vorstellungen miteinbringen und die Rahmenbedingungen viel besser berücksichtigen können.

Bevor jedoch einzelne Problemfeldern des Geometrieunterrichts behandelt werden, sollen zunächst noch einige Erläuterungen zur Begriffsklärung sowie zu Begründungen und Zielen eines problemorientierten Mathematikunterricht dargelegt werden. Eine ausführliche Analyse des Themas mit Recherche neuester Literatur ist hier jedoch nicht angebracht.

Das Buch wendet sich in erster Linie an Lehrerinnen und Lehrer sowie Studierende des Lehramts Mathematik, ist aber auch für Schülerinnen und Schüler oder Eltern zum Selbststudium oder als Anregung, z. B. für eine Facharbeit, geeignet.

1. Problemorientierter Mathematikunterricht – Begriffsklärungen, Begründungen und Ziele

Um Missverständnissen vorzubeugen, sei zunächst angemerkt, dass nicht die Absicht verfolgt wird, den gesamten Mathematikunterricht durch verschiedene Formen von Problemorientierung auszufüllen. Vielfältige Erfahrungen über die gängige Unterrichtspraxis zeigen jedoch, dass der Anteil von problemorientierten Unterrichtsphasen am gesamten Mathematikunterricht immer noch sehr gering ist. Es sollen deshalb neben Erläuterungen Anregungen gegeben werden, um *mehr* Problemorientierung im Mathematikunterricht zu etablieren.

1.1 Begriffsklärungen

In Zusammenhang mit Diskussionen über Problemorientierung bzw. die Thematisierung des Umgangs mit Problemen im Mathematikunterricht tritt traditionell der Terminus „Problemlösen“ (problem solving) auf und auch in den Bildungsstandards finden wir diesen Begriff. Seit über 30 Jahren wird in der nationalen und internationalen didaktischen Diskussion die Thematisierung von Problemen im Mathematikunterricht aber viel weiter gesehen. So geht es neben dem *Lösen von vorgegebenen Problemen* auch um *Erkundungen (investigations)*, *Problemfindungen (problem posings)*, *offene Probleme (open problems)*, *Fermiprobleme*, *realitätsbezogene Probleme* und vieles mehr.

Begriffserläuterungen aus historischer Perspektive

Ein Blick in die Geschichte der Pädagogik im Allgemeinen und des Mathematikunterrichts im Besonderen zeigt, dass die heutigen Bestrebungen bezüglich Problemorientierung durchaus nicht neu sind. Die Bedeutung von selbsttätigem bzw. gelenktem Entdecken als Lernmethode wurde seit Sokrates immer wieder hervorgehoben. Im 18. und 19. Jahrhundert sind hier vor allem Rousseau und Fröbel zu nennen. Rousseau sieht im Kind ein Wesen der Natur, dessen Kräfte zur Selbstentfaltung gefördert werden müssen und Fröbel entwickelt Materialien (z. B. den zweifach geteilten Würfel), an denen die Kinder durch eigentätige Handlungen Erkenntnisse gewinnen sollen.

Seit Ende des 19. Jahrhunderts – im Rahmen der Reformpädagogik – findet man dann mehrfach Forderungen nach selbsttätigem und aktivem Lernen. Dabei werden unterschiedliche Begriffe wie „*selbsttätiges Lernen*“, „*entdeckendes Lernen*“, „*Lernen durch Erfahrung*“, „*aktives Lernen*“ oder „*fragend-forschender Unterricht*“ verwendet. Häufig wird aber auch einfach nur von

„Problemlösen im Unterricht“ oder „problemorientiertem Unterricht“ gesprochen. Jeder einzelne Begriff ist dabei mit unterschiedlichen Akzentuierungen verbunden.

Selbsttätiges Lernen als Unterrichtsprinzip wurde schon vor über hundert Jahren gefordert. „Die großen Pädagogen sind immer für das Prinzip des eigenen Entdeckens eingetreten und haben in der Erziehung ein auf Selbsttätigkeit beruhendes Vorgehen befürwortet. Doch erst wenn wir die Entwicklung unseres Schulsystems in den letzten hundert Jahren betrachten, können wir sehen, wie sich auch im Unterricht mit Schülergruppen das entdeckende Lernen als klare Linie herausbildet. Die Arbeiten von Charlotte Mason, Rachel und Margret MacMillan und Maria Montessori zeigen, dass aufgeklärte, fortschrittliche Pädagogen schon im vergangenen Jahrhundert eine Richtung verfolgt haben, deren Ziel das eigenständige Tun der Kinder war. Sie entwickelten Systeme, bei denen Kinder lernen konnten, indem sie selbst Lösungswege herausfanden“ (FOSTER 1974, S. 24).

Zur gleichen Zeit wurde die amerikanische Pädagogik entscheidend von J. Dewey geprägt. Er favorisierte das **„learning by doing“** (vgl. z. B. DEWEY 1911 und 1949) und hat damit zur Verbreitung der Ideen des selbsttätigen und aktiven Lernens in Nordamerika wesentlich beigetragen. Daran knüpft auch v. Hentig mit seinem Konzept „Schule als Erfahrungsraum“ an, etwa für die von ihm 1974 gegründete Laborschule in Bielefeld (vgl. z. B. v. HENTIG 1973, S. 23).

In England spielte **Selbsttätigkeit und Entdeckung** während des ganzen 20. Jahrhunderts eine wichtige Rolle. „Im Verlauf der Jahre haben sich immer wieder von der Regierung in Auftrag gegebene Gutachten zum Wert des entdeckenden Lernens und der auf selbständiges Arbeiten abzielenden Methoden geäußert“ (FOSTER 1974, S. 26).

In Deutschland wurde in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts von Reformpädagogen ebenfalls die Bedeutung der Selbsttätigkeit der Lernenden betont. Erwähnt sei hier etwa H. Gaudig, der insbesondere die Notwendigkeit der **Förderung der Frageaktivität** der Lernenden betont. „Beim Kinde ist die Frage das Mittel, seinen Wissensdrang zu befriedigen; mit der Frage pocht es an die Pforten der Erkenntnis und Weisheit. [...] Wer fragen kann, vermag sich oder anderen Denkaufgaben zu stellen. Die Kunst ist umso wertvoller, je sinnvoller die Fragestellung ist. Die Frage aber wird umso sinnvoller, je mehr sie sich innerhalb von Gedankenzusammenhängen entwickelt und hier wieder, je mehr sie innerhalb solcher Zusammenhänge das Denken planmäßig in richtige

Bahnen lenkt" (GAUDIG 1930, S. 68 - 69). Aspekte des Umgangs mit Problemfeldern sind hier erkennbar. In ähnlicher Weise argumentiert auch F. Copei, der dem deskriptivem Unterricht den *fragend-forschenden Unterricht*, bei dem eine Problemspannung sich entfalten lässt, die in den Lernenden als Folge selbsterfahrener kognitiver Konflikte entsteht, gegenüber stellt. "Durch das sorgfältige methodische Wegräumen aller Hindernisse kommt es zu gar keiner wirklichen Spannung im Geiste des Kindes. So wird ihm das Ergebnis auch nicht wirkliche Lösung. [...] Das bleibt ein Ziel der intellektuellen Erziehung: nicht den Gegenstand durch ihn wesensfremde Zutaten 'interessant zu machen', sondern im Geist aus der Frage ein echtes 'Interesse' erwachsen zu lassen" (COPEI 1950, S. 114 und 116)¹.

Eine Betonung des Aspektes "Problemorientierung" und eine genauere *Untersuchung von Problemlöseprozessen* geht auf die zwischen 1920 und 1945 durchgeführten Forschungen der Gestaltpsychologen (vgl. etwa KÖHLER 1925, DUNCKER 1935 und WERTHEIMER 1945) zurück. Die Gliederung von Problemlöseprozessen in bestimmte Phasen, die Verwendung heuristischer Strategien beim Prozess der Lösungsfindung und die Berücksichtigung nicht-linearer Lernprozesse trat damit in das Blickfeld pädagogischer Überlegungen. Bemerkenswert ist, dass die Gestaltpsychologen viele Beispiele für ihre Untersuchungen dem Bereich der Elementarmathematik entnommen haben.

Eine intensive Auseinandersetzung mit Problemlösestrategien und Phaseneinteilungen des Problemlöseprozesses in der Mathematik und der Mathematikdidaktik wurde in den 1940er und 1950er Jahren durch die ungarischen Mathematiker Polya² und Hadamard³ angestoßen. Schon zu Beginn des 20. Jahrhunderts entstand in Ungarn eine Vereinigung von Mathematikern und Mathematiklehrern, die eine außerunterrichtliche Förderung mittels Problemlöseaktivitäten von mathematisch interessierten Schülern betrieb.

Während der 1970er Jahre versuchte man dann, die Problemlösefähigkeit von Schülern durch das direkte Unterrichten *heuristischer Strategien (Heurismen)*⁴ zu erhöhen. Der Erfolg dabei war jedoch nicht besonders hoch. Wesentliche Resultate von Forschungen hierzu findet man in dem bekannten Buch "Mathematical Problem Solving" (SCHOENFELD 1985). U.a. stellt Schoenfeld

¹ Bei der Behandlung von Problemfeldern – im Gegensatz zum einfachen Lösen von gegebenen Problemen - spielen die von Gaudig und Copei genannten Aspekte berücksichtigt werden.

² Vgl. etwa G. POLYA (1945) "How to solve it" bzw. in deutscher Übersetzung "Schule des Denkens"(1949).

³ Vgl. etwa J. HADAMARD (1954) „The Psychology of Invention in the Mathematical Field“.

⁴ Nach SCHOENFELD (1985) werden *heuristische Strategien* als Methoden, die ein Individuum beim Problemlösen benötigt, charakterisiert.

fest, dass die Komponenten, welche ein Individuum beim Problemlösen benötigt, in vier Gruppen geteilt werden können: (1) Ressourcen, (2) Heuristiken, (3) Kontrolle, (4) Belief-Systeme. Als wichtiger Aspekt für die Entwicklung der Problemlösefähigkeiten stellte sich auch die Förderung der *Metakognition*⁵ heraus, die u.a. die Auswahl heuristischer Strategien lenkt.

Ergänzend sei bemerkt, dass die Analyse des Problemlöseverhaltens von Mathematikerinnen und Mathematikern die Aufmerksamkeit auch darauf lenkte, dass bei der Bearbeitung von Problemen *kreatives Verhalten* von großer Bedeutung ist (vgl. etwa SCHOENFELD 1985). Deshalb wurde neben der Forschung über Metakognitionen in den 1990er Jahren auch die Kreativität bei der Beschäftigung mit Mathematik näher untersucht (vgl. etwa DÖRNER 1999).

Definitionen des Begriffs „Problem“

In der erziehungswissenschaftlichen wie in der mathematikdidaktischen Literatur findet man unterschiedliche Festlegungen und Erklärungen darüber, was unter einem Problem zu verstehen sei. Das Wort „Problem“ stammt aus dem Griechischen und bedeutet so viel wie „*das Vorgelegte*“, insbesondere auch „*die vorgelegte zu lösende Aufgabe*“ bzw. „*die Fragestellung*“ oder „*die Schwierigkeit*“. Die zuletzt genannte Bedeutung tritt uns auch meist in der umgangssprachlichen Bedeutung von „Problem“ (z. B. in der Redewendung „Wo liegt das Problem?“ oder „Damit wirst du ein Problem haben!“) entgegen. Der bekannte Kreativitätsforscher Dörner erklärt ein Problem als einen Zustand, der aus irgendwelchen Gründen für nicht wünschenswert gehalten wird, wobei diejenige Person, die versucht, ein Problem zu lösen, beim Auftreten des Problems nicht über die Mittel verfügt, diesen unerwünschten Zustand unmittelbar in einen erwünschten Zustand zu überführen (DÖRNER 1987, S. 10). In den USA und einigen anderen Ländern wird der Begriff „Problem“ (problem) teilweise sehr viel weiter verwendet als in Deutschland; z. B. wird mit dem Begriff „word problem“ in der Regel nur eine in Text gekleidete Aufgabe, die nicht unbedingt ein Problem (in unserem Sinne) für die Lernenden darstellt, verstanden.

Im Anschluss an Dörner sei hier die folgende im deutschsprachigen Raum übliche Definition (in der Formulierung von KANTOWSKI 1980, S. 195) festgehalten:

⁵ Nach Schoenfeld sind *Metakognitionen* Reflexionen über das eigene Denken. Forschungen hierüber fokussieren oft auf folgenden drei Kategorien: "1. Your knowledge about your own thought processes. ... 2. Control, or self-regulation. ... 3. Beliefs and intuitions." (SCHOENFELD 1987, S. 190)

*Ein **Problem** ist eine für die Löserperson neue Situation, die mit für die Löserperson bekannten Verfahren nicht routinemäßig bewältigt werden kann.*

Bei dieser Definition wird deutlich, dass dieses Konzept relational ist, also auch von dem Individuum und von der Zeit abhängt. Beispielsweise ist für ein Kind der vierten Klasse eine einfache Multiplikationsaufgabe kein Problem, für ein Kind der zweiten Klasse kann es aber eines sein. Die zu findende Lösungsmethode hängt natürlich nicht nur vom Alter, sondern insbesondere auch von den Kenntnissen und Fähigkeiten des Individuums ab.

Ergänzend sei noch der Begriff der *Aufgabe (task)* erwähnt. Sowohl in der Fachliteratur als auch in der Umgangssprache wird er in verschiedenen Weisen verwendet. Mit Blick auf die in der Mathematikdidaktik meist verwendete Begrifflichkeit ist es aber angebracht, das Wort „Aufgabe“ als *Oberbegriff von allen möglichen Aufgabentypen und Problemen* zu verwenden.

Erwähnt sei in diesem Zusammenhang eine Klassifizierung von GETZELS & AL. (1975, S. 102), bei der systematisch alle Ja-Nein-Möglichkeiten, die bei den zentralen Variablen (Fragestellung, Lösungsmethode, Lösung) vorkommen, durchgespielt werden. Unterscheidet man zusätzlich noch nach Lehrer und Schüler, so gibt es sechs verschiedene Fälle mit je zwei Alternativen, d.h. insgesamt 2^6 Möglichkeiten. Jedoch ergeben dabei nicht alle Möglichkeiten sinnvolle Aufgabensituationen. In der folgenden Tabelle sind die vier wichtigsten dargestellt.

<i>Fall</i>	<i>Fragestellung</i>		<i>Lösungsmethode</i>		<i>Lösung</i>	
	<i>Lehrer</i>	<i>Schüler</i>	<i>Lehrer</i>	<i>Schüler</i>	<i>Lehrer</i>	<i>Schüler</i>
1 (Routineaufg.)	+	+	+	+	+	-
2 (klass.Problem)	+	+	+	-	+	-
3 (offenes Probl.)	+	-	+	-	+	-
4 (völlig offene S.)	-	-	-	-	-	-

Tabelle 1. Klassifizierung von Aufgabensituationen nach GETZELS & AL. mit vier beispielhaften Fällen (wobei + „bekannt“ bzw. „vorgegeben“ und – „unbekannt“ bzw. „nicht vorgegeben“ bedeutet)

Fall 1 beschreibt die üblichen Schulbuchaufgaben (meist Routineaufgaben), bei denen alles vorgegeben ist und die Schüler die Lösung finden müssen. Fall 2 beschreibt eine klassische schulische Problemaufgabe, bei der die Lehrenden genau wissen, worum es geht. Fall 3 ist ein Fall eines offenen Problems, wie es bei Erkundungen in Problemfeldern (vgl. etwa GRAUMANN 1999, 2000 oder 2002) auftritt. Fall 4 ist eine extreme Situation: keiner weiß vorher genau,

worum es geht. Von der Lehrerin / dem Lehrer oder auch von den Schülerinnen und Schülern wird eine Situation - wie z.B. die Spirale von Ulam (vgl. etwa ZIMMERMANN 1986) – präsentiert und es wird gemeinsam versucht, verschiedene Probleme in der Situation zu finden, deren Lösung dann zur Diskussion steht. Auch die Lehrerin / der Lehrer weiß also nicht vorher, welche Probleme die Schülerinnen und Schüler finden, welche behandelt werden und welche zu einem Ergebnis führen.

Typen von Problemen

Ein Problem kann man entsprechend wie bei Getzels & al. zunächst einmal in drei Aspekte gliedern: die *Problemstellung*, die *Problembearbeitung* und die *Endsituation*. Damit kann man verschiedene Typen von Problemen unterscheiden, je nachdem welche der drei Aspekte gegeben bzw. klar sind und welche gesucht sind bzw. von der Löserperson noch geklärt werden müssen.

Bei den klassischen Problemen sind dabei die Problemstellung und die gewünschte Endsituation klar vorgegeben, gesucht ist ein Lösungsweg. Wir sprechen in einem solchen Fall von *geschlossenen Problemen*. Auf diese Situation passt dann auch die Bezeichnung des „*Problemlösens*“ im traditionellen Sinne. Hierzu gehören etwa die früher üblichen Textaufgaben und die Beweisfindungsaufgaben.

Seit den 1980er Jahren wird aus didaktischen Gründen in der Mathematikdidaktik neben diesem Typ von Problemen in internationalen und nationalen Diskussionen über Problemorientierung der Typ vom *offenen Problem (open problem)* favorisiert. Das ist ein Problem, bei dem entweder die Fragestellung noch gewisse Interpretationen bzw. Variationen zulässt oder/und das gesuchte Ergebnis nicht klar vorgegeben ist bzw. zu weiteren Fragestellungen Anlass gibt. D. h. bei einem offenen Problem ist neben der Lösungsmethode auch die Anfangs- oder/und Endsituation des Problems offen.

Bei den offenen Problemen unterscheidet man weiterhin drei verschiedene Fälle, je nachdem ob die Anfangssituation offen ist oder die Endsituation offen ist oder beide offen sind. Im Fall, dass zu Beginn ein klar definiertes Problem gegeben wird, dieses aber verschiedene weitere Bearbeitungen zulässt, ist es im englischsprachigen Raum üblich vom „*open-ended problem*“ zu sprechen. Im Fall, dass die Fragestellung noch geklärt werden muss und nur das Untersuchungsthema grob bekannt ist, spricht man von einem „*open approach*“. Im Fall, dass sowohl die Problemstellung als auch das Ziel nicht klar vorgegeben sind, liegt ein „*both-sided open problem*“ vor. Stehen dabei die

Aktivitäten des Suchens nach Fragen und Informationen sowie nach neuen Erkenntnissen im Vordergrund, so verwendet man vielfach auch den Begriff der „*Erkundung*“ (*investigation*).

Einen besonderen Fall offener Probleme stellen die sogenannten „*Fermi-Probleme*“ dar, bei denen keine eindeutigen Antworten erwartet werden können, sondern nur Schätzungen verschiedener Art. Vielmehr geht es bei diesen darum, vorgegebene Sachbestände grob gesehen richtig einzuschätzen bzw. sachlich richtig einzuordnen, z. B. wenn es darum geht, die Anzahl der Atome im Weltall oder alle Möglichkeiten der Kombination von Genen bei einer Kreuzung von Arten oder (wie bei einem von Fermi seinen Studierenden genannten Problem) die Anzahl der Klavierstimmer im Chicago der 1920er Jahre abzuschätzen.

Einen anderen besonderen Fall von offenen Problemen kennen wir als *offene Sachrechenaufgaben* (*open word problems*) im Sinne von Sachrechenaufgaben ohne Fragestellung⁶ bzw. Sachrechenaufgaben mit noch zu besorgenden Informationen oder Aufgaben in Form von komplexen Sachrechenproblemen. Außerdem taucht Ende der 1970er Jahre bei Heinrich Winter der Begriff der „*produktiven Sachaufgabe*“ (vgl. WINTER 1977) auf, wobei diese Aufgaben ähnlich wie die offenen Sachrechenaufgaben keine Routineaufgaben sein sollen. Seit Ende der 1980er Jahre wird vielfach der Begriff „*realitätsbezogene Probleme*“ (*real world problems*) verwendet. Ein wichtiger Gesichtspunkt ist dabei die Reflexion über Modellierungsprozesse.

Im Rahmen der Behandlung von offenen Problemen wird seit den 1990er Jahren in der internationalen Mathematikdidaktik auch der Begriff des *Problemfeldes* (*problem field*) verwendet. Unter einem Problemfeld versteht man einen Themenbereich, der mehrere inhaltlich miteinander verbundene Probleme enthält. Häufig steht dabei ein Problem (meist ein open-ended problem) im Mittelpunkt, an das sich etwa durch Variation einzelner Aspekte oder das Auftauchen unbekannter Aspekte weitere Fragestellungen anschließen. Man kann deshalb sagen, dass ein Problemfeld durch eine Gruppe von inhaltlich verbundenen Problemen, die ein gemeinsames Ausgangsproblem („generating problem“) haben, charakterisiert ist. Ein Problemfeld bietet daher mehr Möglichkeiten, in Richtung verschiedener allgemeiner Ziele zu arbeiten.

Ebenfalls in diese Kategorie sind die Aufgabensammlungen unter dem Label der *Aufgabenvariation* zuzuordnen, die eine Arbeitsgruppe unter Leitung von H. Schupp mit diesen Themenkomplex entwickelt hat (vgl. SCHUPP 2002). Es

⁶ U.a. damit die Schülerinnen und Schüler sich mit dem Sinn der Aufgabenstellung auseinandersetzen.

geht dabei darum, dass Schülerinnen und Schüler verschiedene Variationsprinzipien an einer vorgegeben Aufgabe kennen lernen und anschließend selbst bei weiteren Aufgaben anwenden können.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass bei der Beschäftigung mit offenen Problemen bzw. Problemfeldern neben dem Problemlösen die Aktivität der *Problemfindung* und des *Probleme Erstellens (problem posing)* wichtig ist. Es sollen dadurch Erfahrungen gesammelt werden, welche Zusammenhänge zwischen verschiedenen Problemen bzw. Gebieten der Mathematik bestehen und eventuell auch wie sich neue mathematische Theorien aus einer Fragestellung heraus entwickeln können.

1.2 Begründungen/Ziele für mehr Problemorientierung im Mathematikunterricht

„Bildungsziele erfordern eine grundlegende Veränderung vom Auswendiglernen und Begreifen zum Lernen, wie man denkt. Die eigentliche Aufgabe besteht darin, die Fähigkeit zur Problemlösung und zum kritischen, unabhängigen und originellen Denken zu entwickeln. [...] Ebenso muss die Bildung das Interesse gewinnen, die Energie freizusetzen und die Fähigkeit jedes Schülers zu aktivieren, selbst zu lernen und anderen dabei zu helfen. [...] Die Studierenden brauchen heute eine tolerante und weitgefaste Bildungsform, die Wissen sucht, das neugierig macht und nicht das Ungewohnte ausschließt oder ablehnt.“ (WEIZSÄCKER & WIJMAN 2018, S. 369 - 375).

Im Einzelnen können Begründungen und Ziele eines problemorientierten Mathematikunterrichts aus verschiedenen Perspektiven betrachtet werden:

Eine erste Gruppe von Begründungen für Problemorientierung betrifft die *allgemeinen Ziele des Mathematikunterrichts*. Wir sehen diese eingebettet in die generelle Aufgabe der Schule, Schülerinnen und Schüler so zu fördern, dass sie unabhängig und selbstständig handeln können, ein kritisches Denken an den Tag legen und vielseitige Fähigkeiten besitzen, um sich im gegenwärtigen und zukünftigen Leben in der Gesellschaft zurecht zu finden. Auf den Mathematikunterricht bezogen geht es dabei insbesondere um die *Fähigkeit des selbständigen und kreativen Arbeitens* in gegebenen Situationen und die *Problemlösefähigkeiten*, angefangen von dem Sich-Einlassen auf Schwierigkeiten über die Verwendung heuristischer Strategien bis hin zur Fähigkeit, mögliche Weiterentwicklungen zu erkennen. Aber auch die *Fähigkeiten des Klassifizierens, Ordnen, Systematisierens und Strukturierens* werden