Enrique Vílchez Quesada · Juan Félix Ávila Herrera

MATEMÁTICA PARA INGENIERÍA MEDIANTE EL USO DE CDF's

Recursos WEB
para consulta digital

alphaeditorial

Enrique Vílchez Quesada

Máster en Tecnología e Informática Educativa. Máster en Entornos Virtuales de Aprendizaje. Licenciado en la Enseñanza de la Matemática. Diplomado en Diseño, Desarrollo y Evaluación de Software Educativo.

Académico con categoría de Profesor Catedrático en la Escuela de Informática de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA), impartiendo los cursos de Estructuras Discretas, Fundamentos de Informática e Investigación de Operaciones, fungiendo como docente y coordinador. Investigador asociado a distintas actividades y proyectos vinculados con el desarrollo de software y de materiales educativos computarizados. Coordinador del área en Ingeniería en Sistemas durante el período 2008-2009. Subdirector de la unidad académica de mayo del 2009 a marzo del 2010. Lector de distintos tipos de trabajos de graduación para optar por el grado de Licenciatura en Informática y Educación Matemática y de Maestría en Tecnología e Innovación Educativa. A partir del mes de octubre del año 2007, profesor titular de la Escuela de Informática de la UNA.

Primer promedio en la carrera Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, durante los años 1995 y 1997. Mención honorífica cum laude en la Maestría en Tecnología e Informática Educativa. Primer promedio en la Maestría en Tecnología e Informática Educativa de la Escuela de Informática de la UNA y de toda la Universidad Nacional de Costa Rica a nivel de posgrado durante el año 2005. Segundo lugar del premio Jorge Volio 2008 del Colegio de Licenciados y Profesores (COLYPRO) en Costa Rica. Miembro asociado del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME). Mención Honorífica al Galardón Alumni 2019 con Sello Universidad Técnica Nacional de Costa Rica, por el desempeño y trayectoria profesional en la docencia e investigación.

Autor de diversos artículos y libros y, conferencista a nivel nacional e internacional en múltiples congresos relacionados con los campos de matemática educativa, informática educativa y matemática aplicada.

Juan Félix Ávila Herrera

Licenciado en Matemáticas de la Universidad de Costa Rica. Máster en Computación en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, graduado con honores por ser el primero en su grupo. Doctor en Investigación de Operaciones en el Florida Institute of Technology, en Estados Unidos, graduado con nota perfecta. Autor de publicaciones en matemáticas y computación, y conferencista, tanto a nivel nacional como internacional, en numerosos congresos y simposios en esas áreas.

Profesor catedrático de la Escuela de Informática de la Universidad Nacional de Costa Rica (desde 1993) y profesor de la Escuela de Matemáticas de la Universidad de Costa Rica (desde 1985).

Alpha Editorial
Alfaomega Colombiana S.A.

Calle 62 20-46 esquina, Bogotá
Teléfono (57-1) 746 0102
Fax: (57-1) 210 0122
cliente@alfaomegacolombiana.com

www.alfaomega.com.co
www.alpha-editorial.com

© Primera edición 2020
© Alpha Editorial
© Alfaomega Colombiana S.A.
© Enrique Vílchez Quesada, Juan Félix Ávila Herrera

Todos los derechos son reservados. Esta publicación no puede ser reproducida total ni parcialmente. No puede ser registrada por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, fotoquímico, electrónico, magnético, electroóptico, fotocopia o cualquier otro, sin el permiso previo y por escrito de la editorial.

ISBN 978-958-778-646-0
ISBN versión digital 978-958-778-647-7

Portada: Representación de un ejercicio gráfico compuesto de seis nodos tal como se utiliza en el metodo Wolgram®

Hecho en Colombia
Printed and made in Colombia

Enrique Vílchez Quesada
Juan Félix Ávila Herrera

Matemática para ingeniería mediante el uso de CDF's

alphaeditorial

A mi esposa y a mi madre ... las mejores rosas de mi jardín, a mi hijo Enrique Guillermo ... el mejor ser humano que he conocido.
Enrique Vílchez Quesada

A Dios Todopoderoso y a mi amada familia. Ellos representan el norte de mi vida.
Juan Félix Ávila Herrera

Índice general

Prólogo

1 Lógica formal — Página 1

1.1 Proposiciones 1
1.2 Conectivos lógicos básicos: ¬, ∧, ∨ 4
1.3 La disyunción exclusiva ⊻ 9
1.4 La condicional → 10
1.5 La equivalencia ↔ 13
1.6 Clasificación de proposiciones 16
1.6.1 Tautologías 16
1.6.2 Contradicciones 18
1.6.3 Contingencias 20
1.7 Equivalencias lógicas 21
1.8 Del lenguaje natural al lógico y viceversa 29
1.9 Inferencias lógicas 31
1.10 Conjuntos reales 40
1.11 Predicados 41
1.12 Cuantificadores 45
1.12.1 Cuantificadores en varias variables 50
1.12.2 Negación de cuantificadores 54
1.13 Demostraciones y contraejemplos 58
1.14 Ejercicios 64

2 Teoría de conjuntos — Página 69

2.1 Fundamentos de conjuntos 69
2.2 Operaciones con conjuntos 77
2.3 Conjunto potencia o de partes 88
2.4 Producto cartesiano 90
2.5 Cardinalidad de un conjunto 94
2.6 Demostraciones con conjuntos 105
2.6.1 Demostración usando el equivalente lógico 106
2.6.2 Mostración visual usando sectores 111
2.6.3 Demostración formal (“por elementos”) 117
2.7 Ejercicios 125

3 Parte I: Teoría de funciones — Página 131

3.1 Concepto intuitivo de función 131
3.2 Concepto formal de función 133
3.3 Funciones dadas por fórmulas 140
3.4 Gráfico de una función 144
3.4.1 Graficando puntos en un plano cartesiano 145
3.4.2 Gráfica de una función real de variable real 151
3.5 Biblioteca de gráficas 160
3.6 Dominio máximo de una función 165
3.7 Signo de una función 169
3.8 Monotonía o régimen de variación 171
3.9 Operaciones con funciones 176
3.10 Funciones pares e impares 181
3.11 Problemas de aplicación 187
3.12 Ejercicios 190

4 Parte II: Teoría de funciones — Página 196

4.1 Funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas 196
4.2 Función inversa 208
4.3 Funciones continuas y discontinuas reales 216
4.4 Función lineal 221
4.5 Problemas de aplicación con funciones lineales 230
4.6 Rectas paralelas y rectas perpendiculares 236
4.7 Intersección entre dos rectas 240
4.8 Otro problemas que utilizan funciones lineales 242
4.9 Función cuadrática 247
4.10 Problemas de aplicación con funciones cuadráticas 253
4.11 Monotonía de una función cuadrática 256
4.12 Intersecciones entre parábolas o rectas 259
4.13 Funciones polinomiales 261
4.14 Ejercicios 263

5 Inducción y progresiones — Página 268

5.1 Notación de sumatoria y productoria 268
5.2 Factoriales y combinaciones 289
5.3 Teorema del binomio 296
5.4 Progresiones aritméticas y geométricas 304
5.5 Inducción matemática 333
5.6 Ejercicios 354

6 Teoría de números — Página 357

6.1 Divisibilidad y números primos 357

6.2 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo 384
6.3 Sistemas de numeración 400
6.4 Teoría de congruencias 428
6.5 Ejercicios 434

Solución de los ejercicios 437

Bibliografía 470

Prólogo

El presente libro introduce distintas áreas de matemática dirigidas a estudiantes de carreras vinculadas con la ingeniería en general, la informática o las ciencias de la computación. El texto puede ser considerado un recurso de apoyo para aquellos alumnos que inician su formación profesional en estos campos, ofreciendo refrescantes alternativas de estudio individual y colectivo.

El libro se destaca por utilizar un enfoque mixto combinando contenidos teórico-prácticos de naturaleza tradicional, con otros asistidos por computadora. Cada uno de los capítulos abordados se complementa con la consulta de una serie de documentos con un formato computable (llamados: *CDF*s), diseñados y desarrollados por los autores con el principal objetivo de brindar herramientas de enseñanza y aprendizaje no convencionales, particularmente en los ejes temáticos de: lógica formal, teoría de conjuntos, teoría de funciones, inducción y progresiones y, teoría de números.

Los documentos con un formato computable que acompañan a este texto proveen interesantes aplicaciones hacia la exploración de ideas, profundización de conceptos y propiedades y, autogeneración de ejercicios con sus correspondientes soluciones en tiempo real. Los *CDF*s integrados diferencian esta obra de otros libros similares en contenido, al otorgar al lector distintas oportunidades didácticas en el marco de una experiencia de revisión dinámica y no lineal.

Las aplicaciones *CDF*s del libro se pueden desplegar en la nube, o bien, de forma local instalando un *plug in* de distribución gratuita denominado **Wolfram CDF Player Free**, disponible en la dirección *URL*:

http://www.wolfram.com/cdf

También, cabe mencionar, que el texto retroalimenta el uso de los distintos *CDF*s, en acompañamiento con un video explicativo. El uso de videos es considerado por los autores como un medio audiovisual de mucha riqueza cognitiva. En este sentido, al ser el tema de funciones un área de difícil comprensión, se han agregado a los capítulos que lo tratan, distintos videos con un abordaje tanto teórico como práctico.

El libro emplea dos imágenes de mucha importancia, tal y como se aprecia en la **Figura 1**. La “Imagen 1” señala la existencia de un *CDF* que puede ser descargado para uso local en el ordenador del usuario, o bien, para su utilización en la Web. La “Imagen 2” indica la presencia de un video que el lector puede consultar con

Imagen 1 Imagen 2

Figura 1: Imágenes iconográficas del libro

el objetivo de profundizar un tema, ver un ejercicio resuelto u obtener una explicación técnica. Todos las direcciones de los archivos descargables y los videos, elaborados por los autores de la presente obra, se pueden encontrar en:

http://libroweb.alfaomega.com.mx/book/matematica_para_ingenieria

El archivo disponible en la dirección electrónica anterior, presenta una serie de códigos junto a los cuáles se asocia uno o varios videos de *YouTube*, o en su defecto, un *CDF*. Cada código socializado se menciona de forma explícita en algún lugar de este texto. En este sentido, el lector, al encontrarse en el libro con un código, debe buscar la dirección *URL* vincula con él, para poder recibir el material ampliado que esta obra ofrece.

Se espera que este libro contribuya con un aprendizaje más exitoso en conocimientos fundamentales de matemática, que proporcionan los cimientos esenciales para el estudio de otras disciplinas de condición no instrumental en la ingeniería, la informática o las ciencias de la computación.

Heredia, Costa Rica, 2020. E. Vílchez y J. Ávila

Capítulo 1

Lógica formal

Sabemos que nuestro idioma es un recurso fundamental de comunicación, sin embargo, diariamente se usan muchas expresiones *ambiguas* o contradictorias que apelan al interlocutor para ser entendidas. La lógica simbólica nos permite estudiar de manera no ambigua el lenguaje natural utilizando para ello símbolos. En este capítulo sentamos las bases de este campo que nos permitirá adentrarnos en temas más complejos tanto en matemáticas como en computación.

> Aristóteles de Estagira (siglo IV AC) es considerado el *fundador* del pensamiento lógico. Su interés por analizar y determinar la correctitud de los razonamientos lógicos destacan como su principal aporte a esta rama de las matemáticas. La lógica era una herramienta al servicio de las demás disciplinas que procuraba expresar sin ambigüedades las diferentes verdades científicas.

1.1 Proposiciones

Definición 1.1

Una *proposición* es una expresión que se puede *tipificar* como falsa o verdadera. Se llamará *valor verdad* o *valor de verdad* al valor asociado con la proposición.

Por convención generalmente se asocia a las proposiciones una letra tal como P, Q, R, p, q, r, entre otras[1]. Para hacer esta asociación se usa la letra, seguida del símbolo de dos puntos (:) y luego la proposición.

[1] Algunos autores prefieren el uso de mayúsculas solamente.

Ejemplo 1.1

Considere las siguientes expresiones:

1) P: *La suma de 2 y 2 es 4.*

2) Q: *La sangre es roja.*

3) R: *La capital de México es Oaxaca.*

4) S: *La Tierra es el centro del sistema solar.*

5) T: *Una solución de* $x+1=2$ *es* $x=3$.

6) U: *¿Qué hora es?*

7) V: Vaya a la fiesta.

De las proposiciones anteriores algunas son verdaderas (a saber, P y Q), y otras falsas (a saber, R, S y T).
La expresión U no es una proposición pues no se puede afirmar que sea verdadera o falsa. En general, las preguntas no son proposiciones.
La expresión V no es una proposición pues no se puede afirmar que sea verdadera o falsa. En general, las órdenes no son proposiciones.

Las proposiciones también podrían definirse mediante el símbolo := que se utiliza mucho en diferentes campos de las matemáticas. De esta forma, por ejemplo, $P :=$ *Hoy es lunes* es equivalente a P : *Hoy es lunes*. En este texto se usará la forma que emplea solo dos puntos. Vale la pena indicar que en los lenguajes de programación de computadoras es necesario distinguir entre el "igual de asignación" y el "igual de comparación". Muchas veces se usa el := para indicar una asignación o definición y el igual simple, (=) o bien, el doble igual (==) para las comparaciones. Entre humanos se puede utilizar simplemente el = bajo la premisa de que, por contexto, se sabe distinguir su intención.
Sea acostumbra usar la letra V para abreviar la palabra "verdadero" y F, para "falso". Algunos autores usan $\mathcal{V}$ o un "1" en lugar de V y $\mathscr{F}$ o "0" en lugar de F.
En inglés la palabra para verdadero es *true* y la palabra para falso es *false*. En ese idioma las abreviaciones son usualmente T y F. En este texto se usan *indistintamente* la letras V y T para indicar "verdadero". La razón de esto es que más adelante se usará el símbolo $\vee$ que escrito a mano puede confundirse con una V y dificulta la lectura de algunos cálculos.
En este texto para indicar el valor de verdad de una proposición se usará el signo "=". De esta manera, si se escribe $P = V$, se debe entender que P es una proposición cuyo valor de verdad es verdadero. De forma análoga, $P = F$, significa que P es una proposición cuyo valor de verdad es falso. En algunos textos se usan *notaciones* como $\equiv$ o $\doteq$, por ejemplo. En esos casos se escribe $P \equiv V$ o bien $P \doteq V$, respectivamente.
El uso de símbolo "=" conlleva sin embargo, un "peligro" y es que el lector dé por "iguales" dos proposiciones por el hecho de tener el mismo valor de verdad. Lo cierto es que, en este texto, no se define ni se estudia el concepto de igualdad de

proposiciones. Se estudiará, sin embargo, más adelante, el concepto de equivalencia de proposiciones (justamente como aquellas proposiciones que presentan coincidencia en sus valores de verdad) y para estas se empleará el símbolo "≡". El uso "ampliado" del símbolo "=" es una práctica común en computación. Por ejemplo, muchos lenguajes de programación usan el símbolo "=" para expresiones numéricas o para expresiones tipo hileras. El compilador "toma la decisión" sobre cómo actuar en el momento de determinar el contexto. En este libro se adopta esta política y en general es más lo que esto ayuda y simplifica que lo perjudica.

Ejemplo 1.2

Considere las siguientes expresiones:

1) P: *La suma de 2 y 2 es 4*. Se tiene que $P = V$.

2) Q: *La sangre es roja*. Se tiene que $Q = V$.

3) R: *La capital de México es Oaxaca*. Se tiene que $R = F$.

Algunas veces puede *quedar la sensación* de que ciertas proposiciones podrían ser simultáneamente verdaderas o falsas. Si se considere la proposición P: *La pizarra es verde*, se puede decir que hay una pizarra en cierta aula en donde esto es falso y otra, en otro lugar, en donde es verdadero. Lo cierto del caso es que para no dejar lugar a dudas se debería incurrir en una serie de detalles que indiquen claramente a cuál *pizarra* se hace referencia, sin embargo, esto haría bastante *tedioso* el proceso de transición del lenguaje natural al simbólico y, generalmente se supondrá que la afirmación es verdadera o falsa en un cierto contexto del cual se obvian ciertos detalles. Es por esta razón que en lo que sigue se supondrán tres principios fundamentales:

1) *Principio de identidad*: una proposición no cambia su valor de verdad.

2) *Principio de no contradicción*: una proposición no puede tener más de un valor de verdad, es decir, no puede ser falsa y verdadera al mismo tiempo.

3) *Principio del tercero excluido*: una proposición tiene un valor de verdad.

Estos principios se postulan para definir sin lugar a dudas lo que se entiende por una proposición. Por otro lado, el principio de "no contradicción" resulta muy importante en la demostración de teoremas, como se verá más adelante.

Descargue un CDF: código 1.

Este CDF permite estudiar el concepto de proposición mientras se hace un repaso de álgebra.

CDF en la Web: código 2.

Una explicación en video sobre el uso del CDF anterior, se puede obtener utilizando el código número 3.

1.2 Conectivos lógicos básicos: $\neg$, $\wedge$, $\vee$

En el *lenguaje natural* las ideas más complejas se expresan con la ayuda de *conectivos*. Los más simples son el "y", el "o" y la negación. Estos permiten hacer nuevas proposiciones más *complejas* e interesantes, tales como *Hoy es domingo* $\boxed{y}$ *puedo dormir tarde*, *La puerta está abierta* $\boxed{o}$ *la ventana está abierta*, *Hoy* $\boxed{no}$ *es lunes*. La *simbología* para estos conectivos es: para "y" se usa $\wedge$, para "o" se usa $\vee$ y para la *negación* se usa $\neg$. Más adelante, en esta sección, se definirá con precisión estos conceptos.
Al conectivo $\wedge$ se le llama *conjunción*, al conectivo $\vee$, *disyunción* y al operador $\neg$, negación. Se debe notar que el operador negación requiere solo de una proposición para ser usado, mientras que la conjunción y la disyunción requieren de dos proposiciones.

Ejemplo 1.3

Considere las proposiciones

1) P: *Hoy es domingo*.
2) Q: *Hoy puedo dormir tarde*.
3) R: *La puerta está abierta*.

Aunque es necesario definir con precisión los símbolos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, con el afán de hacer una *primera aproximación* a estos conceptos se hace la siguiente traducción apelando a las nociones usuales que tenemos sobre ellos:

1) La proposición *Hoy es domingo* $\boxed{y}$ *puedo dormir tarde* se puede expresar como $P \wedge Q$.
2) La proposición *Hoy es domingo* $\boxed{o}$ *la puerta está abierta* se puede expresar como $P \vee R$.
3) La proposición *Hoy no es domingo* se puede expresar como $\neg P$.
4) La proposición *Hoy es domingo* $\boxed{y}$ *hoy* $\boxed{no}$ *puedo dormir tarde* se puede expresar como $P \wedge \neg Q$.

Como se dijo antes, estos conectivos permiten generar o construir proposiciones mas *complejas*, pero al ser el resultado una proposición es necesario indicar su valor de verdad, es decir, en qué casos se obtiene una proposición verdadera o falsa de acuerdo con los valores de verdad asignados a las proposiciones conectadas.
Para lograr este propósito se recurre al uso de lo que se conoce como una *tabla de verdad*. Simplemente usando un *arreglo* de filas y columnas (al estilo de una hoja de cálculo en Excel) se colocan los posibles valores de verdad de las proposiciones conectadas y empleando tantas columnas como sean necesarias, se muestran los valores en cada caso.
Se empieza con el operador de la negación $\neg$.

Definición 1.2

Dada una proposición P se define el operador unario ¬ usando la siguiente tabla:

P	$\neg P$
V	F
F	V

Con base en esta tabla es común hacer $\neg F = V$ y $\neg V = F$. El operador ¬ se conoce como un *operador lógico unario* pues solo requiere de una proposición para detallar su definición.

Descargue un CDF: código 4.

Este CDF permite estudiar el concepto de negación y repasar desigualdades.

CDF en la Web: código 5.

Una explicación en video sobre el uso del CDF anterior, se puede obtener utilizando el código número 6.

Para justificar la asignación de un valor de verdad al conectivo ∧ se puede recurrir al siguiente ejemplo. Suponga que usted quiere *comprar un automóvil* y las condiciones para su compra son: "*El auto debe ser verde* $\boxed{y}$ *debe ser para 5 pasajeros*". ¿En qué casos usted compraría el auto?, solamente si el auto cumple con ambas condiciones y en cualquier otro caso, no lo compraría.

Definición 1.3

Sean P y Q dos proposiciones cualesquiera. Los posibles valores de verdad de $P \wedge Q$ se definen mediante la siguiente tabla:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Con base en esta tabla es común hacer:

$$V \wedge V = V, \quad V \wedge F = F, \quad F \wedge V = F, \quad F \wedge F = F.$$

El operador ∧ se conoce como un *operador lógico binario* pues requiere de dos proposiciones para su definición.

Descargue un CDF: código 7.

Este CDF permite estudiar el concepto de conjunción y negación de una proposición utilizando desigualdades.

CDF en la Web: código 8.

Una explicación en video sobre el uso del CDF anterior, se puede obtener utilizando el código número 9.

Para *justificar* la definición de la tabla del conectivo $\vee$ se puede usar el ejemplo de la compra de un automóvil dado anteriormente pero suponiendo ahora que los requisitos son: "*El auto debe ser verde* $\boxed{o}$ *debe ser para 5 pasajeros*". De esta manera un automóvil rojo de 5 pasajeros es admisible al igual que uno verde de 2 pasajeros.

Definición 1.4

Sean P y Q dos proposiciones cualesquiera. Los posibles valores de verdad de $P \vee Q$ se definen mediante la siguiente tabla:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Con base en esta tabla es común hacer:

$$V \vee V = V, \quad V \vee F = V, \quad F \vee V = V, \quad F \vee F = F.$$

El operador $\vee$ es también un *operador lógico binario* pues requiere de dos proposiciones para su definición.

Ejemplo 1.4

Considere las siguientes proposiciones:

1) P: $2+2=10$.
2) Q: *Costa Rica es el país más pequeño del mundo*.
3) R: *Hay 5 continentes*.

De estas se observa que P y Q son falsas y R es verdadera. Por lo tanto, las proposiciones:

1) $2+2=10$ $\boxed{\text{y}}$ *Costa Rica es el país más pequeño del mundo*, que equivale a $P \wedge Q$ resulta falsa, pues las proposiciones conectadas son ambas falsas. Se escribe, $P \wedge Q = F$.
2) $2+2=10$ $\boxed{\text{o}}$ *Costa Rica es el país más pequeño del mundo*, que equivale a $P \vee Q$ resulta falsa, pues las proposiciones conectadas son ambas falsas. Se escribe $P \vee Q = F$.
3) $2+2=10$ $\boxed{\text{o}}$ *Hay 5 continentes*, que equivale a $P \vee R$ resulta verdadera, pues por lo menos una de las proposiciones conectadas (a saber R) es verdadera. Se escribe $P \vee R = V$.

4) (No es cierto que $2+2=10$) $\boxed{\text{O}}$ *Costa Rica es el país más pequeño del mundo*, que equivale a $\neg P \vee Q$ resulta verdadera pues $\neg P$ es verdadera. Se escribe $\neg P \vee Q = V$.

Es importante aclarar que en este tema de lógica, el lector no debe prestar mucha atención al *mensaje* que se manifiesta sino a la estructura que lo compone. De esta manera es claro que la expresión "*Hoy es lunes* y *la leche es blanca*" no comunican algo que pueda resultar "coherente" o "inteligente" para muchas personas, sin embargo, desde el punto de vista lógico tiene pleno sentido.

Se debe notar que en la elaboración de las tablas de verdad de los operadores ¬, ∧ y ∨ (ver Pág. 4), se usaron diferentes números de filas o renglones. En el caso del operador negación ¬ solo se utilizaron dos renglones (aparte del encabezado) mientras que para los operadores ∧ y ∨, se necesitaron 4 renglones (aparte del encabezado). En general, si se trata de una *proposición simple o atómica* (es decir, que no involucra conectivos), se necesitan 2^1 renglones, de dos proposiciones, 2^2 renglones, de tres proposiciones, 2^3 renglones y así sucesivamente. A continuación, se muestran las tablas que generalmente se obtienen al trabajar con una, dos o tres proposiciones.

P
T
F

P	Q
T	T
T	F
F	T
F	F

P	Q	R
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

No está mal considerar otros órdenes en cuanto a los valores de verdad de las proposiciones, sin embargo, se recomienda que se *adopte* el orden anterior para que el trabajo en equipo y la revisión por parte de su tutor sea más sencilla. Al igual que ocurre con los operadores aritméticos, en los operadores lógicos también se sigue una *prioridad* de evaluación y es ¬, ∧, ∨, es decir, primero se hacen las negaciones, luego las conjunciones, y finalmente las disyunciones. Si se desea alterar este orden, se pueden emplear los paréntesis ( ), [ ], o bien, las llaves { }.

Ejemplo 1.5

Hacer la tabla de verdad para $(p \vee q) \wedge (p \vee q)$.

Solución. Se debe notar que el uso de paréntesis en este caso es muy importante. Si se remueven, se obtendría $p \vee q \wedge p \vee q$, en cuyo caso, primero se debería calcular el valor de verdad de $q \wedge p$ (debido a la prioridad del operador "∧") y luego, el del resto de la expresión.

La siguiente es la tabla de verdad para $E = (p \vee q) \wedge (p \vee q)$.

p	q	$p \vee q$	E
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

Ejemplo 1.6

Hacer la tabla de verdad para $(p \wedge \neg q) \vee r \vee (p \wedge q)$.

Solución. En este caso se debe primero hallar el valor de verdad de las expresiones entre paréntesis. Para realizar la tabla de verdad de $E = (p \wedge \neg q) \vee r \vee (p \wedge q)$ se puede optar por hacer algunas designaciones que faciliten el cálculo.

$$E = \underbrace{(p \wedge \neg q)}_{A} \vee r \vee \underbrace{(p \wedge q)}_{B}$$

La tabla de verdad es como sigue:

p	q	r	$\neg q$	A	$A \vee r$	B	E
T	T	T	F	F	T	T	T
T	T	F	F	F	F	T	T
T	F	T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T	F	T
F	T	T	F	F	T	F	T
F	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T	F	T
F	F	F	T	F	F	F	F

Los conectivos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$ son fundamentales en un sistema lógico y generalmente todo lenguaje de programación de computadoras posee comandos o palabras reservadas para estos conectivos.

En las siguientes secciones se estudian *otros operadores* binarios importantes. Sin embargo, eventualmente se verá que dichos operadores se pueden *expresar* de manera *equivalente* utilizando los operadores básicos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$.

George Boole fue un matemático británico (1815–1864) que contribuyó significativamente en los campos de la lógica y la teoría de conjuntos. Las aplicaciones del álgebra de Boole son de suma importancia para la computación y el desarrollo tecnológico actual.

Descargue un CDF: código 10.

Este CDF permite estudiar el concepto de negación, conjunción y disyunción usando desigualdades.

CDF en la Web: código 11.

Una explicación en video sobre el uso del CDF anterior, se puede obtener utilizando el código número 12.

Descargue un CDF: código 13.

Este CDF permite estudiar el concepto de negación, conjunción y disyunción usando tablas de verdad.

CDF en la Web: código 14.

Una explicación en video sobre el uso del CDF anterior, se puede obtener utilizando el código número 15.

1.3 La disyunción exclusiva $\veebar$

Hay ciertas situaciones en la vida en la que dos cosas no pueden ser *simultáneamente* verdaderas o falsas. Por ejemplo, la puerta no puede estar a la vez abierta y cerrada, o también resulta claro que una persona no puede estar viva y muerta al mismo tiempo. Es por esta razón que se introduce un nuevo operador que se conoce como la *disyunción exclusiva* y se denota por $\veebar$.

Definición 1.5

Sean P y Q dos proposiciones cualesquiera. Los posibles valores de verdad de $P \veebar Q$ se definen mediante la siguiente tabla:

P	Q	$P \veebar Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 1.7

Sea P: $2+2=5$, Q: $1=1+0$ y R: $\sqrt{9}=2$. Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1) $P \veebar Q$.

2) $R \veebar R$.

3) $\neg P \vee (R \veebar R)$.

Solución. Dado que $P=F$, $Q=V$ y $R=F$, entonces se tiene que:

1) $P \veebar Q = F \veebar V = V$.

2) $R \veebar R = F \veebar F = F$.

3) $\neg P \vee (R \veebar R) = V \vee F = V$.

Descargue un CDF: código 16.

Este CDF permite estudiar el concepto de negación, conjunción y disyunción (la regular y la exclusiva) usando desigualdades.

CDF en la Web: código 17.

Una explicación en video sobre el uso del CDF anterior, se puede obtener utilizando el código número 18.

1.4 La condicional →

En el lenguaje natural hay muchas expresiones dadas como reglas o recetas que de alguna forma rescatan cierto trozo de conocimiento o sabiduría. Algunos ejemplos de estas expresiones son: “Si eres buena persona, te irá bien en la vida”, “A quien madruga, Dios le ayuda”, entre otras. A continuación, se formaliza esta idea introduciendo el operador implicación.

Definición 1.6

Dadas dos proposiciones P y Q, la *proposición condicional* $P \to Q$ (también conocida como la *implicación*) se define mediante la siguiente tabla de verdad:

P	Q	$P \to Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

La expresión $P \to Q$ se suele leer como “Si P, entonces Q” o también “P implica Q”.

Es importante justificar por qué la proposición condicional se define de esta forma. Suponga que un amigo le promete a usted un *helado* si le ayuda con la tarea. La única forma en la que esta promesa resulte falsa es que usted ayude con la tarea pero no obtenga un helado. Las otras posibilidades no hacen falsa la promesa. Otra forma de de verlo es aplicar el principio de que *no se puede deducir algo falso de algo verdadero*.
Las proposiciones condicionales son sumamente importantes en computación y particularmente en el campo de la *inteligencia artificial* (fue tal vez la primera opción adoptada para modelar sistemas expertos, consultar [12]). Las condicionales permiten registrar las reglas que rigen un proceso o procedimiento. Este

tipo de proposición $P \to Q$ se divide en dos partes en las que a P se le denomina el *antecedente* y a Q, el *consecuente*. En la práctica, si se tiene (por cierta) una regla del tipo $P \to Q$, cuando se sabe que P es verdadero, se concluye que Q (el consecuentemente) también lo es. A este tipo de razonamiento se le denomina *modus ponens* y se retomará de nuevo más adelante (consultar también [4, 10]).

En cuanto a la precedencia de la condicional, el orden es como sigue: $\neg$, $\wedge$. $\vee$, $\to$.

Ejemplo 1.8

Hacer la tabla de verdad para $p \vee q \to \neg q$.
Solución. La tabla corresponde a:

p	q	$p \vee q$	$\neg q$	$p \vee q \to \neg q$
T	T	T	F	F
T	F	T	T	T
F	T	T	F	F
F	F	F	T	T

Ejemplo 1.9

Hacer la tabla de verdad para $(p \to r) \vee \neg q \vee p \vee q$.
Solución.

p	q	r	$p \to r$	$\neg q$	$p \vee q$	$\neg q \vee p \vee q$	$(p \to r) \vee \neg q \vee p \vee q$
T	T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T

Ejemplo 1.10

Traducir las siguientes expresiones dadas en lenguaje natural a expresiones lógicas.

1) Si Juan viene mañana, iremos al cine.

2) Si Miguelito come bien y estudia mucho, entonces crecerá feliz.

3) Si Carlos no maneja con cuidado, se puede accidentar e ir a dar al hospital.

Solución. Se puede empezar haciendo la designación de las proposiciones como sigue:

1) P: *Juan viene mañana*, Q: *(Nosotros) iremos al cine*. La traducción podría ser: $P \to Q$.

2) P: *Miguelito come bien*, Q: *(Miguelito) estudia mucho*, R: *(Miguelito) crecerá feliz*. La traducción podría ser: $P \wedge Q \to R$.

3) P: *Carlos maneja con cuidado*, Q: *(Carlos) se puede accidentar*, R: *(Carlos) va a ir a dar al hospital*. La traducción podría ser: $\neg P \to (Q \wedge R)$.

El lenguaje natural puede ser en muchos casos *ambiguo*. Para ser justos, es necesario decir que en este tipo de ejercicios en los que se debe traducir del lenguaje natural a expresiones lógicas, pueden darse situaciones en las que la persona que propone el ejercicio no aclara suficientemente la expresión. Por ejemplo, si se pide traducir "voy a casa y almuerzo o me quedo", no queda claro (para el interlocutor) si se quiere decir "(voy a casa y almuerzo) o me quedo", o bien, "voy a casa y (almuerzo o me quedo)".

Ejemplo 1.11

Suponga que P: *Hoy es lunes*, Q: *Yo debo lavar*, R: *Yo debo cocinar*. Traducir las siguientes expresiones lógicas a lenguaje natural.

1) $P \wedge Q \to R$.

2) $P \to Q \vee R$.

3) $\neg P \to \neg(Q \to R)$.

Solución. Se debe aclarar que no hay una forma única de hacer esta traducción. La siguiente es una entre otras:

1) $P \wedge Q \to R$: *Si hoy es lunes y debo lavar, entonces debo cocinar*.

2) $P \to Q \vee R$: *Si hoy es lunes, entonces debo lavar o cocinar*.

3) $\neg P \to \neg(Q \to R)$: *Si hoy no es lunes, entonces no es cierto que cuando lavo entonces cocino.*

En el lenguaje natural se tienen varias formas alternativas para referirse a la proposición $p \to q$ (se ejemplificará con la condicional: si llueve, me mojo):

1) q si p (me mojo si llueve). Se debe notar que en este caso se invierten las posiciones del antecedente y del consecuente.

2) p solo si q (llueve solo si me mojo).

3) p es suficiente para q (que llueva es suficiente para que me moje).

4) q es necesario para p (quedar mojado es necesrio para que llueva).

La lista anterior no es exhaustiva pero en lenguaje natural se debe tener presente que expresiones como P causa (produce, conduce a) Q y expresiones semejantes se deben *reconocer* como $P \to Q$. Además, el lector debe notar que según la expresión utilizada *no siempre se brinda primero el antecedente y luego el consecuente*.

Definición 1.7

A partir de una proposición de la forma "si P, entonces Q", o bien, $P \to Q$ se pueden construir ciertas proposiciones derivadas.

- *Conversa* o recíproca: Si Q, entonces P, o bien, $Q \to P$.
- *Inversa*: Si no P, entonces no Q, o bien, $\neg P \to \neg Q$.
- *Contrapositiva*: Si no Q, entonces no P, o bien, $\neg Q \to \neg P$.

Se verá después que *solo* la proposición $p \to q$ y la proposición $\neg q \to \neg p$ son (lógicamente) equivalentes.

Ejemplo 1.12

Escriba la conversa, inversa y contrapositiva de la condicional "Si estudio mucho, obtengo buenas notas".

Solución. Se puede definir P : estudio mucho y Q : obtengo buenas notas.

1) Conversa: Si obtengo buenas notas, entonces estudio mucho.
2) Inversa: Si no estudio mucho, no obtengo buenas notas.
3) Contrapositiva: Si no obtengo buenas notas, no estudio mucho.

Descargue un CDF: código 19.

Este CDF permite estudiar el concepto de negación, conjunción, disyunción y condicional usando desigualdades. El símbolo ⇒ en este CDF se refiere a →.

CDF en la Web: código 20.

Una explicación en video sobre el uso del CDF anterior, se puede obtener utilizando el código número 21.

1.5 La equivalencia ↔

En el lenguaje natural generalmente hay varias formas de *decir lo mismo* usando expresiones diferentes. Se reconocen como equivalentes porque resultan ser falsas o verdaderas al mismo tiempo. Por ejemplo, la expresión "Si es tico, es costarricense" es equivalente a "Si no es costarricense, no es tico", solo por mencionar un caso. También, hay expresiones que a veces se identifican como equivalentes cuando no lo son, pues no son verdaderas o falsas al mismo tiempo. Por ejemplo,

la expresión “Si eres aseado, te bañarás todos los días” no es equivalente a “Si no eres aseado, no te bañarás todos los días” (¿Por qué?)

Definición 1.8

Sean P y Q dos proposiciones. Se define la *bicondicional* $P \leftrightarrow Q$ como $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$. Por lo tanto, la proposición $P \leftrightarrow Q$ tiene la siguiente tabla de verdad:

P	Q	$P \to Q$	$Q \to P$	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

Se observa entonces que $P \leftrightarrow Q$ es verdadero cuando P y Q coinciden en su valor de verdad, y es falso, en cualquier otro caso. Al símbolo $\leftrightarrow$ se le llama también *doble implicación* o *equivalencia*.
En cuanto a la *precedencia* de una proposición bicondicional, el orden es como sigue: $\neg$, $\wedge$. $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$.

Ejemplo 1.13

Hacer la tabla de verdad para $(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \to \neg Q)$.
Solución. La tabla de verdad es:

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \to \neg Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow (\neg P \to \neg Q)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T

Se nota así que las expresión $P \to Q$ y la expresión $\neg P \to \neg Q$ no siempre coinciden en sus valores de verdad.

Ejemplo 1.14

Hacer la tabla de verdad para $P \to Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$.
Solución. La tabla de verdad es como sigue:

P	Q	$P \to Q$	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$(P \to Q) \leftrightarrow \neg P \vee Q$
T	T	T	F	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

Se nota así que las expresión $P \to Q$ y la expresión $\neg P \vee Q$ siempre coinciden en sus valores de verdad.

Ejemplo 1.15

Hacer la tabla de verdad para $(P \vee (P \wedge Q)) \leftrightarrow P$.
Solución. La tabla de verdad es como sigue:

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee (P \wedge Q)$	$P \leftrightarrow P \vee (P \wedge Q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	F	T
F	F	F	F	T

Se nota así que las expresión $P \vee (P \wedge Q)$ y la expresión P siempre coinciden en sus valores de verdad.

En el lenguaje natural se tienen varias formas para referirse a la doble implicación $P \leftrightarrow Q$:

1) P si y solo si Q.
2) Q si y solo si P.
3) Si P, entonces Q, y recíprocamente.
4) Si Q, entonces P, y recíprocamente.
5) P es una condición necesaria y suficiente para Q.
6) Q es una condición necesaria y suficiente para P.

Descargue un CDF: código 22.

Este CDF permite estudiar el concepto de negación, conjunción, disyunción, la condicional y la bicondicional usando desigualdades.

CDF en la Web: código 23.

Una explicación en video sobre el uso del CDF anterior, se puede obtener utilizando el código número 24.

Descargue un CDF: código 25.

Este CDF permite estudiar el concepto de negación, conjunción, disyunción, la condicional y la bicondicional usando tablas de verdad.

CDF en la Web: código 26.

Una explicación en video sobre el uso del CDF anterior, se puede obtener utilizando el código número 27.

Descargue un CDF: código 28.

Este CDF permite hacer la tabla de verdad de una expresión lógica que involucra negación, conjunción, disyunción, la condicional y la bicondicional.

CDF en la Web: código 29.

Una explicación en video sobre el uso del CDF anterior, se puede obtener utilizando el código número 30.

1.6 Clasificación de proposiciones

En esta sección se hace una *clasificación* de una proposición dependiendo de los valores de verdad que presente. Hay muchas proposiciones que se forman combinando otras proposiciones mediante el uso de los operadores lógicos. A estas se les denomina *proposiciones compuestas*. Dichas proposiciones pueden exhibir distintos valores de verdad dependiendo de los (valores de verdad) empleados. Como se verá, hay *tres* posibles casos para estos valores y, es basado en ello, es que se hará la clasificación.

1.6.1 Tautologías

Definición 1.9

Una proposición $\mathscr{P}$ se dice una *tautología* si su valor de verdad es *siempre* verdadero, sin importar las valores de verdad que se le asignen a las proposiciones que la componen. Se tiene en este caso $\mathscr{P} = V$, siempre.

En la práctica se reconoce que una proposición compuesta $\mathscr{P}$ es una tautología si cuando se elabora la tabla de verdad asociada a ella, la última columna está compuesta exclusivamente de de símbolos "T" (o bien, símbolos "V"). Se nota entonces que las proposiciones de los ejemplos 1.14 y 1.15 son tautologías mientras que la del ejemplo 1.13, no lo es.
En el lenguaje natural se pueden encontrar numerosos ejemplos de tautologías:

1) *Ana está viva o muerta.*

2) *Carmen es mi madre o no es mi madre.*

3) *De cada cuatro estudiantes, dos son la mitad.*

Ejemplo 1.16

Verificar que $\mathscr{P} = P \vee \neg P$ es una tautología.
Solución. La tabla de verdad es como sigue:

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
T	F	T
F	T	T

Claramente en la última columna hay solo símbolos "T". La proposición $\mathscr{P}$ es una tautología.

Ejemplo 1.17

Verificar que $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$ es una tautología.
Solución. La tabla de verdad es:

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P$	$\neg Q$	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

Claramente en la última columna hay solo símbolos "T". La proposición $\mathscr{P}$ es una tautología.

Ejemplo 1.18

Verificar que $[P \to (Q \to R)] \leftrightarrow [(P \wedge Q) \to R]$ es una tautología. Mostrar además, sin embargo, que $[(P \to Q) \to R] \leftrightarrow [(P \wedge Q) \to R]$, no lo es.
Solución. La tabla de verdad para $\mathscr{P} = (P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (P \wedge Q \to R)$ es como sigue:

P	Q	R	$Q \to R$	$P \to (Q \to R)$	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \to R$	$\mathscr{P}$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T

Claramente en la última columna hay solo símbolos "T". La proposición $\mathscr{P}$ es una tautología.
Con referencia a $\mathscr{P} = (P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (P \wedge Q \to R)$, se tiene la siguiente tabla de verdad:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \to R$	$P \to Q$	$(P \to Q) \to R$	$\mathscr{P}$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	T	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	F	F

Se concluye así que $\mathscr{P} = (P \to (Q \to R)) \leftrightarrow (P \wedge Q \to R)$ no es una tautología. En este caso los paréntesis hacen una diferencia muy importante.

Ejemplo 1.19

Determinar si la expresión $W = P \wedge (Q \leftrightarrow R) \wedge (R \to S)$ es una tautología.
Solución. Hacer la tabla de verdad para W resulta un trabajo pesado e *innecesario*. Es pesado porque al estar W formada por 4 proposiciones atómicas se requieren $2^4 = 16$ renglones. Y es innecesario porque al dar un vistazo a W se nota que es una conjunción de tres proposiciones. Si P es falso, W será falsa y esto permite concluir que no es una taulogía.

1.6.2 Contradicciones

En el lenguaje natural las contradicciones se refieren a ideas o expresiones que "no tienen sentido". Se formaliza aquí este concepto.

Definición 1.10

Una proposición $\mathscr{P}$ se dice una *contradicción* si su valor de verdad es *siempre falso*, sin importar las valores de verdad que se le asignen a las proposiciones que la componen. Se tiene en este caso que $\mathscr{P} = F$, siempre.

En la práctica se reconoce que una proposición compuesta $\mathscr{P}$ es una contradicción si cuando se elabora la tabla de verdad asociada a ella, la *última columna* está compuesta exclusivamente de símbolos "F".

Ejemplo 1.20

Verificar que $\mathscr{P} = P \wedge \neg P$ es una contradicción.
Solución. Con referencia a la proposición $\mathscr{P} = P \wedge \neg P$, se tiene la siguiente tabla de verdad:

P	$\neg P$	$P \wedge \neg P$
T	F	F
F	T	F

Claramente en la última columna hay solo símbolos "F". La proposición $\mathscr{P}$ es una contradicción.

Ejemplo 1.21

Determinar si $(P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$ es una contradicción.
Solución. Con referencia a la proposición $\mathscr{P} = (P \to Q) \leftrightarrow (P \wedge \neg Q)$, se tiene la siguiente tabla de verdad:

P	Q	$P \to Q$	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\mathscr{P}$
T	T	T	F	F	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F

Claramente en la última columna hay solo símbolos "F". La proposición $\mathscr{P}$ es una contradicción.

Ejemplo 1.22

Determinar si la expresión $W = P \wedge (Q \leftrightarrow R) \wedge (R \to S)$ es una contradicción.
Solución. Este ejemplo es una continuación del Ejemplo 1.19. Ya sea había visto que W *no* es una *tautología* argumentando que si P es falso, entonces W será falsa.
Para ver que W no es una contradicción se debe encontrar asignaciones para P, Q y R para las que W sea verdadero. Esto requiere que:

$$\underbrace{P}_{V} \wedge \underbrace{(Q \leftrightarrow R)}_{V} \wedge \underbrace{(R \to S)}_{V} = V$$

Así, se puede poner $P = V$, $Q = V$, $R = V$ y $S = V$, para obtener:

$$\underbrace{V}_{V} \wedge \underbrace{(V \leftrightarrow V)}_{V} \wedge \underbrace{(V \to V)}_{V} = V$$

Se concluye por lo tanto, que W no es una contradicción.

1.6.3 Contingencias

En el lenguaje natural hay proposiciones que a veces son verdaderas y otras veces falsas dependiendo del "contexto". Se formaliza aquí esta idea.

Definición 1.11

Una proposición $\mathscr{P}$ se dice una *contingencia* si su valor de verdad es en *algunos* casos verdadero y en otros falso, dependiendo de los valores de verdad que se le asignen a las proposiciones que la componen.

En la práctica se reconoce que una proposición compuesta $\mathscr{P}$ es una contingencia si cuando se elabora la tabla de verdad asociada a ella, la última columna está compuesta de símbolos "T" y "F". Por lo menos uno de cada tipo.

Ejemplo 1.23

Determinar si $P \wedge (Q \to R)$ es una contingencia.
Solución. Con referencia a la proposición $\mathscr{P} = P \wedge (Q \to R)$, se tiene la siguiente tabla de verdad:

P	Q	R	$Q \to R$	$P \wedge (Q \to R)$
T	T	T	T	T
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	T	T	F
F	T	F	F	F
F	F	T	T	F
F	F	F	T	F

Claramente en la última columna hay dos tipos de símbolos ("T" y "F"). La proposición $\mathscr{P}$ es una contingencia.

Ejemplo 1.24

Determinar si la expresión $W = P \wedge (Q \leftrightarrow R) \wedge (R \to S)$ es una contingencia.
Solución. Este ejemplo es una continuación de los Ejemplos 1.19 y 1.22. En el Ejemplo 1.19 se vio que W no es una tautología. En el Ejemplo 1.22 se vio que W no es una contradicción. Se concluye entonces que la expresión representada por W es una *contingencia*.

Se concluye este apartado indicando que las proposiciones pueden ser clasificadas en una de tres tipos: tautología (solo "T"), contradicción (solo "F") o contingencia (contiene los dos tipos de símbolos).

Descargue un CDF: código 31.